

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ НАГРУЗКАМИ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

член-корр. НАН Беларуси, д.т.н. ¹Плескачевский Ю.М.,
д.ф.-м.н. ²Старовойтов Э.И., д.ф.-м.н. ²Леоненко Д.В.

¹Национальная академия наук Беларуси, Минск

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. В настоящее время широкое применение в технике и строительстве получили многослойные, в том числе трехслойные, элементы конструкций. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий. В связи с этим создание расчетных моделей трехслойных стержней, с применением различных кинематических гипотез и комплексных термосиловых локальных нагрузок, становится актуальной задачей.

В монографиях [1–8] рассматриваются различные механико-математические модели многослойных элементов конструкций как при квазистатических, так и при динамических нагрузках. Там приведены постановки соответствующих краевых задач, изложены методы их расчета, получен ряд аналитических решений, проведена их числовая апробация. Деформирование трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием, рассмотрено в работах [9–14]. Изгиб упругих трехслойных стержней со сжимаемым наполнителем в температурном поле при непрерывных нагрузках рассмотрен в статье [15]. Здесь приведена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом нагружении *трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым наполнителем при локальных равномерно распределенных, синусоидальных и параболических нагрузках*. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного стержня.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень. Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя.

На стержень действуют силовые поверхностные нагрузки $p(x), q(x)$ и тепловой поток интенсивности q_t , направленный перпендикулярно верхнему несущему слою. На торцах стержня в первом и втором несущих слоях заданы усилия $N_p^{(1)}, Q_p^{(1)}, M_p^{(1)}, N_p^{(2)}, Q_p^{(2)}, M_p^{(2)}$; индекс p принимает значения 0 и 1, указывая координату торца, на котором задано усилие. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей *несущих* слоёв, h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k=1, 2, 3$ – номер слоя), b_0 – ширина стержня.

Считаем поверхность $z = -c - h_2$ и контур стержня теплоизолированными. Это позволяет неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , вычислять с достаточной точностью по формуле, приведенной в [3, 4].

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x), u_1(x), w_2(x)$ и $u_2(x)$:

▪ в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

▪ в заполнителе

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2, \quad (-c \leq z \leq c) \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Компоненты тензора деформаций следуют из (1) и соотношений Коши [7]. Внутренние усилия в слоях вводятся соотношениями ($\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений)

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,$$

$$N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz, \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz \quad (2)$$

Уравнения равновесия и граничные условия в усилиях для рассматриваемого стержня получены вариационным методом Лагранжа:

$$\begin{cases} H_1 - P_{1,x} = b_0 p, \\ H_1 + P_{2,x} = 0, \\ S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 \left(q + \frac{p_{2,x} h_1}{2} \right), \\ S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В соотношениях (3) введены обобщенные внутренние усилия

$$H_1 = \frac{Q^{(3)}}{2c}, \quad H_2 = \frac{N_z^{(3)}}{2c}, \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}, \quad P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)}, \quad T_1 = \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c},$$

$$S_1 = \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)},$$

$$T_2 = \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_2 = - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} + \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)} \quad (4)$$

На торцах стержня должны выполняться силовые граничные условия ($x=0, l$):

$$P_1 = N_p^{(1)}, \quad P_2 = N_p^{(2)}, \quad T_1 - S_{1,x} = Q_p^{(1)}, \quad T_2 - S_{2,x} = Q_p^{(2)}, \quad S_1 = M_p^{(1)}, \quad S_2 = M_p^{(2)} \quad (5)$$

Здесь $N_p^{(1)}$, $Q_p^{(1)}$, $M_p^{(1)}$, $N_p^{(2)}$, $Q_p^{(2)}$, $M_p^{(2)}$ – заданные усилия на торцах стержня в несущих слоях; индекс $p=0, l$ указывает торец, на котором они приложены.

В качестве физических уравнений состояния в слоях стержня используются термоупругие соотношения закона Гука:

$$s_i^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_i^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (i=x, z; k=1, 2, 3) \quad (6)$$

где $s_i^{(k)}$, $\varepsilon_i^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материала k -го слоя, вычисляемые по формуле Белла [2]; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; T_k – приращение температуры, отсчитываемое от начального значения T_0 .

Используя (6), выделим силовую (индекс «0») и температурную (индекс «t») составляющие в компонентах тензора напряжений:

▪ в несущих слоях ($k=1,2$)

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)t}, \quad \sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)}, \quad \sigma_{xx}^{(k)t} = 3K_k \alpha_{0k} T_k;$$

▪ в заполнителе ($k=3$)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(3)} &= \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)t}, \quad \sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3 \varepsilon_{xx}^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}, \quad \sigma_{xx}^{(3)t} = 3K_3 \alpha_{03} T_3, \quad \sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)t} \\ \sigma_{zz}^{(3)0} &= 2G_3 \varepsilon_{zz}^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}, \quad \sigma_{zz}^{(3)t} = 3K_3 \alpha_{03} T_3, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $K_k^+(T_k) = K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k)$, $K_k^-(T_k) = K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k)$.

Проведя операцию, подобную (7), с внутренними усилиями (2), получим:

$$N_x^{(k)} = N_x^{(k)0} - N_x^{(k)t}, \quad N_z^{(3)} = N_z^{(3)0} - N_z^{(3)t}, \quad M_x^{(k)} = M_x^{(k)0} - M_x^{(k)t} \quad (8)$$

Линейные составляющие (индекс «0») и температурных добавки (индекс «t») в (8) вычисляются по формулам:

▪ в несущих слоях ($k=1,2$)

$$\begin{aligned} N_x^{(k)0} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} dz = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} dz, \quad N_x^{(k)t} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)t} dz = 3b_0 \int_{h_k} K_k \alpha_{0k} T_k dz, \\ M_x^{(k)0} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} z dz = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} z dz, \quad M_x^{(k)t} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)t} z dz = 3b_0 \int_{h_k} K_k \alpha_{0k} T_k z dz; \end{aligned}$$

▪ в заполнителе ($k=3$)

$$\begin{aligned} N_x^{(3)0} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}) dz, \quad N_x^{(3)t} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)t} dz = 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 dz, \\ N_z^{(3)0} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)0} dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)}) dz, \quad N_z^{(3)t} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)t} dz = 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 dz, \\ M_x^{(3)0} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} z dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}) z dz, \quad M_x^{(3)t} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)t} z dz = 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 z dz, \\ Q^{(3)0} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)0} dz, \quad M_{xz}^{(3)0} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} z dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)0} z dz \end{aligned}$$

В обобщенных усилиях (4) с помощью соотношений (7) также выделим температурные составляющие:

$$\begin{aligned} H_1^0 &= \frac{Q^{(3)0}}{2c}, \quad H_2 = H_2^0 - H_2^t, \quad H_2^0 = \frac{N_z^{(3)0}}{2c}, \quad H_2^t = \frac{N_z^{(3)t}}{2c}, \quad T_1^0 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)0}}{2c}, \\ T_2^0 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)0}}{2c}, \quad S_1 = S_1^0 - S_1^t, \quad S_1^0 = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)0} - M_x^{(1)0} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)0} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)0}, \\ S_1^t &= \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)t} - M_x^{(1)t} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)t} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)t}, \quad S_2 = S_2^0 - S_2^t, \\ S_2^0 &= -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)0} - M_x^{(2)0} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)0} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)0}, \quad S_2^t = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)t} - M_x^{(2)t} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)t} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)t}, \\ P_1 &= P_1^0 - P_1^t, \quad P_1^0 = \frac{N_x^{(3)0}}{2} + \frac{M_x^{(3)0}}{2c} + N_x^{(1)0}, \quad P_1^t = \frac{N_x^{(3)t}}{2} + \frac{M_x^{(3)t}}{2c} + N_x^{(1)t}, \quad P_2 = P_2^0 - P_2^t, \\ P_2^0 &= \frac{N_x^{(3)0}}{2} - \frac{M_x^{(3)0}}{2c} + N_x^{(2)0}, \quad P_2^t = \frac{N_x^{(3)t}}{2} - \frac{M_x^{(3)t}}{2c} + N_x^{(2)t} \end{aligned} \quad (9)$$

Если в уравнения равновесия (3) подставить выражения линейных составляющих внутренних усилий (9) через искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$, то, при $p = \text{const}$, получим систему линейных дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_4 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} &= p, \\ -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + a_{15} w_{1,xxxx} - a_{16} w_{2,xxxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 = q - q_t, \\
& -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - a_{16} w_{1,xxxx} + a_{13} w_{2,xxxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 = q_t \quad (10)
\end{aligned}$$

где температурные добавки q_t и коэффициенты a_1, \dots, a_{17} определяются с учетом температурной зависимости параметров упругости материалов по толщине пакета:

$$\begin{aligned}
q_t &= -\frac{H_2'}{b_0} = -\frac{N_z^{(3)l}}{2cb_0}, \quad a_1 = \frac{L_0(G_3)}{4c^2}, \quad a_2 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
a_3 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \quad a_4 = L_0(K_1^+) + \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
a_5 &= \frac{L_0(K_3^+)}{4} - \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \quad a_6 = \frac{L_1(K_1^+)}{2} - \frac{L_0(K_1^+)}{2} \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{h_1 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_7 &= \frac{h_2}{8c^2} (c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+)), \quad a_8 = \frac{L_0(K_3^+)}{4c^2}, \\
a_9 &= L_0(K_2^+) - \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \quad a_{10} = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2} \\
a_{11} &= \frac{h_1 L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{h_1 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)^2 \frac{L_0(G_3)}{4} - \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
a_{12} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2} + \frac{L_1(K_3^-)}{8c^2} (h_1 - h_2) + \frac{L_0(K_3^-)}{8c} (h_1 + h_2) - \frac{L_1(G_3)}{8c^2} (h_1 - h_2), \\
a_{13} &= L_2(K_2^+) + L_1(K_2^+) \left(c + \frac{h_2}{2}\right) - \frac{h_2^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_2^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_2^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_{14} &= \frac{h_2 L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{h_2 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 \frac{L_0(G_3)}{4} + \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
a_{15} &= L_2(K_1^+) - L_1(K_1^+) \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{h_1^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_{16} &= \frac{h_1 h_2}{16c^2} (c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+)), \quad a_{17} = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2},
\end{aligned}$$

$$L_n(f_k(z)) \equiv \int_{h_k} f_k(z) z^n dz \quad (n = 0, 1, 2).$$

В качестве граничных можно использовать либо силовые (5), или кинематические условия. В данном случае приняты кинематические условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в концевых поперечных сечениях $x=0, l$ должны выполняться следующие требования:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k=1, 2). \quad (11)$$

2. Решение краевой задачи для термоупругого стержня. Решение системы дифференциальных уравнений (10) предполагается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (11):

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\
w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) \quad (12)
\end{aligned}$$

где $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ – искомые амплитуды перемещений.

Внешнюю нагрузку и температурные составляющие в слоях стержня также представим в виде разложений в ряды:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \quad p = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right),$$

$$p_m = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \quad q_t = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_{tm} = \frac{2}{l} \int_0^l q_t(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx \quad (13)$$

После подстановки перемещений (12) и нагрузок (13) в систему дифференциальных уравнений (10) получим систему линейных алгебраических уравнений для искоемых амплитуд перемещений U_{1m} , U_{2m} , W_{1m} , W_{2m} при m -ой гармонике. Решение этой системы можно выписать в определителях, либо решать численно. Далее по формулам (12) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (1), деформации – из соотношений Коши, напряжения – из (6).

3. Локальная поверхностная нагрузка. Рассматривается деформирование в температурном поле несимметричного по толщине трехслойного стержня под действием локальной поперечной поверхностной нагрузки $q(x)$ (прямоугольной), равномерно распределенной в интервале $a \leq x \leq b$ (рис. 1, а). Аналитический вид нагрузки будет

$$q(x) = q_0 (H_0(b-x) - H_0(a-x)).$$

где $H_0(x)$ – функция Хевисайда, q_0 – интенсивность нагрузки.

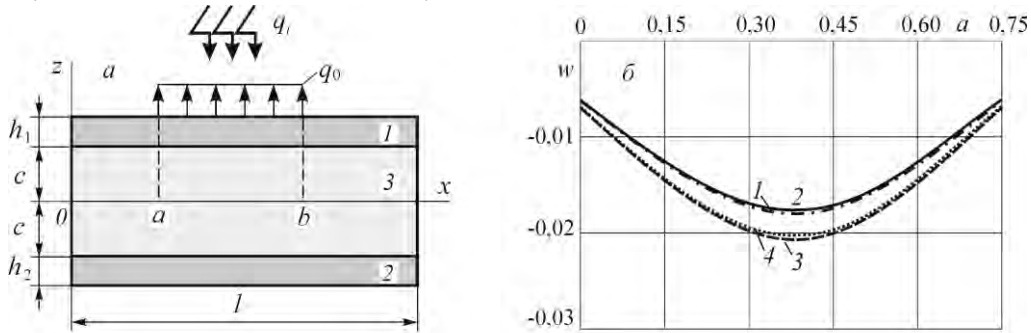


Рис. 1. Воздействие локальной прямоугольной нагрузки в температурном поле

После вычисления интеграла в (5), получим коэффициенты разложения нагрузки (13) в ряд

$$q_m = -\frac{2q_0}{\pi m} \left(\cos \frac{\pi mb}{l} - \cos \frac{\pi ma}{l} \right).$$

Используя коэффициенты (13), находятся амплитуды перемещений U_{1m} , U_{2m} , W_{1m} , W_{2m} . Суммированием рядов по формулам (12) вычисляются искомые функции, перемещения в слоях стержня следуют из соотношений (1).

Численные результаты получены при интенсивности температуры $q_t = 5000$ Дж/(м²с) и нагрузки $q_0 = -10$ МПа. Расчетная температура на поверхности стержня достигала 540 К. Материалы слоев Д16Т–фторопласт-4–Д16Т, их упругие характеристики приведены в [6, 7]. Толщины слоев, отнесенные к длине стержня, принимались $h_1 = 0,04$, $h_2 = 0,02$, $h_3 = 0,18$.

На рис. 1, б приведены прогибы несущих слоев стержня в поперечном сечении с координатой $x=0,5l$ в зависимости от координаты a левого края интервала нагрузки при постоянной длине $b-a=0,25l$: 1, 3 – прогиб первого слоя изотермический и термостатический, 2, 4 – аналогичные прогибы второго несущего слоя. Разность этих прогибов дает величину обжатия заполнителя, которая здесь не велика. По мере продвижения нагрузки с

левого конца стержня к правому прогибы растут, достигают максимума при $a=0,37l$, т.е. когда нагрузка распределена симметрично относительно концов стержня в интервале $\{0,37; 0,62\}$, и затем убывают. Температурная составляющая прогибов – 23 %. Обжатие заполнителя здесь также незначительно, что объясняется малостью нагрузки.

4. Локальная распределенная синусоидальная нагрузка. Предположим, что на поверхность рассматриваемого трехслойного стержня в области $0 \leq x \leq b$ действует нагрузка $q(x)$, распределенная по полуволне синусоиды (рис. 2, а):

$$q(x) = q_0 H_0(b-x) \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) \quad (14)$$

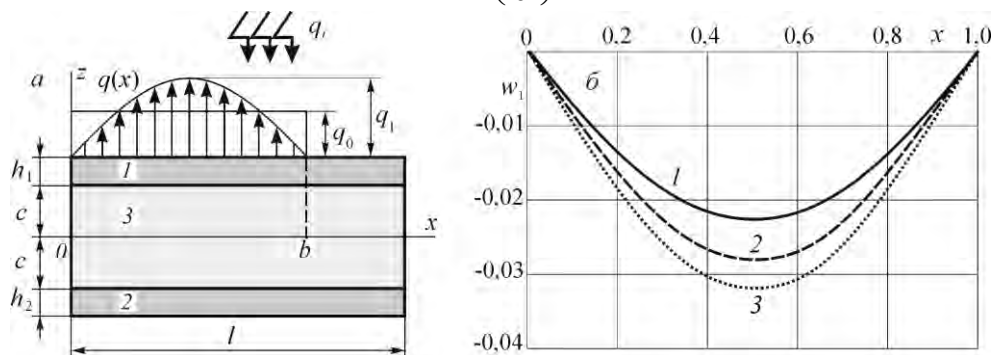


Рис. 2. Воздействие локальной синусоидальной нагрузки в температурном поле

Подставив нагрузку (14) в соответствующую формулу из (13), получим выражения для параметров q_m :

$$q_m = \frac{bq_0}{\pi} \left[\frac{1}{bm-l} \sin \frac{\pi(bm-l)}{l} - \frac{1}{bm+l} \sin \frac{\pi(bm+l)}{l} \right] \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

Здесь должно выполняться условие $bm \neq l$, чтобы не возникало деление на ноль. В сечениях стержня, где $b=l/p$ (p – натуральное число), при $m \neq p$ работает формула (15), если $m=p$, то

$$q_p = \frac{2q_0}{l} \int_0^l H_0(b-x) \left(\sin \frac{\pi p x}{l} \right)^2 dx = \frac{q_0}{l} \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi p x}{l} \right) dx = \frac{q_0 b}{l}.$$

Величина амплитуды синусоидальной нагрузки, равнодействующая которой статически эквивалентна прямоугольной нагрузке, действующей на ту же поверхность стержня, получена из условия равенства площадей, занимаемых рассматриваемыми нагрузками:

$$q'_0 = \frac{q_0 l}{\int_0^b \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx} = \frac{1}{2} \pi q_0.$$

Численные результаты получены при амплитудах нагрузок $q_0 = -5 \cdot 10^6$ Па и $q'_0 = 0,5\pi q_0$.

На рис. 2, б показано изменение прогибов в первом слое вдоль продольной оси трехслойного стержня при действии статически эквивалентных распределенных нагрузках ($b=l$): 1 – прямоугольная; 2 – синусоидальная (обе изотермические); 3 – синусоидальная термосиловая. При одинаковой равнодействующей максимальные перемещения больше от синусоидальной нагрузки. Их различие при изотермическом нагружении составляет 22 %. Температурное воздействие добавляет еще 15 % к прогибу при синусоидальной нагрузке.

Следовательно, при одинаковом статическом эквиваленте рассмотренных распределенных нагрузок более опасной, с точки зрения прочности, является синусоидальная,

т. к. она вызывает прогибы слоев большие по величине, чем равномерно распределенная нагрузка.

5. Локальная распределенная параболическая нагрузка $q(x)$ действует на поверхность трехслойного стержня на участке $0 \leq x \leq b$, где $b \leq l$ (рис. 3, а). Ее аналитический вид и коэффициенты разложения в ряд будут

$$q(x) = \frac{4q_0x}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) H_0(b-x), \quad q_m = \frac{8lq_0}{b(\pi m)^2} \left[\frac{2l}{b\pi m} \left(1 - \cos \frac{\pi mb}{l}\right) - \sin \frac{\pi mb}{l} \right].$$

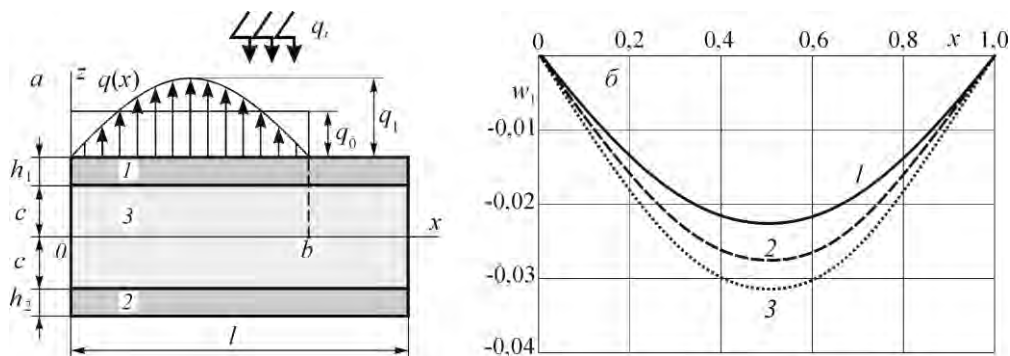


Рис. 3. Воздействие локальной прямоугольной нагрузки в температурном поле

Величина амплитуды q'_0 параболической нагрузки, равнодействующая которой эквивалентна равномерно распределенной по той же поверхности нагрузке q_0 , будет

$$q'_0 = q_0 b \int_0^b \frac{4x}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx = 1,5q_0.$$

Численные результаты. На рис. 3, б, показано изменение прогибов в слое 1 вдоль оси стержня при различных по форме нагрузках, распределенных по всей поверхности первого слоя ($b=l$): 1 – прямоугольная, 2 – параболическая, 3 – параболическая с температурой. При одинаковой равнодействующей максимальные перемещения от параболической нагрузки больше по величине примерно на 17 % соответствующих перемещений от равномерно распределенной нагрузки. Температура добавляет к перемещениям еще 18 %.

6. Выводы. Предложенные уравнения равновесия упругих трехслойных стержней со сжимаемым наполнителем позволяют исследовать их напряженно-деформированное состояние при действии локальных нагрузок различных видов в температурном поле. Численные расчеты показали существенное влияние температуры на перемещения в стержне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. *Механика многослойных конструкций* / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Плескачевский, Ю.М. *Деформирование металлополимерных систем* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 342 с.
3. Плескачевский, Ю.М. *Динамика металлополимерных систем* / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
4. Горшков, А.Г. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций* / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
5. Старовойтов, Э.И. *Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании* / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 380 с.
6. Старовойтов, Э.И. *Сопротивление материалов* / Э.И. Старовойтов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

7. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
8. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
9. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.
10. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.
11. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2009. – Vol. 44, no. 5. – P. 744–755.
12. Starovoitov, E.I. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 47, no. 5. – P. 580–589.
13. Leonenko, D.V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol. 47, no. 1. – P. 111–118.
14. Kuznetsova E.L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 50, no. 3. – P. 359–366.
15. Журавков, М.А. Деформирование трехслойного упругого стержня со сжимаемым наполнителем в температурном поле / М.А. Журавков // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 4. – С. 101–109.

E-mail: pleskym@mail.ru
edstar0@yandex.by
leoden@tut.by

Поступила в редакцию 21.07.2016