УДК 532.5

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ЗЕРНИСТЫХ СРЕД

д.ф.-м.н.[1] **Поленов В.С.**, д.ф.-м.н.[2] **Чигарев А.В.**

[1] *Воронежский институт экономики и права, Воронеж*
[2] *Белорусский национальный технический университет, Минск*

В работах [1-6] рассматривалось деформирование однородных и неоднородных пористых сред насыщенных жидкостью, где показано, что в таких средах существует два типа вон и определены скорости и интенсивности их распространения.

В данной статье изучаются волны ускорения в двухфазной среде, первая фаза которой является жидкость или газ, а вторая –зернистая твердая среда. Зерна твердой фазы могут иметь любую конфигурацию. В таких средах механизм передачи усилия проявляется через контакты между зернами. В этом случае эффекты прочности твердой фазы проявляются в тензоре фиктивных напряжений. Предполагается, что микродеформации и смещения твердой фазы малы. Жидкость первой фазы будем считать сжимаемой.

1. Основные соотношения, определяющие процесс динамического деформирования двухфазных мелкозернистых сред можно описать системой [7-8]:

уравнения состояния межфазных связей (Обобщенный закон Гука для фиктивных напряжений двухфазной зернистой среды)

$$\sigma_f^{kl} = \alpha_2[\lambda_f \varepsilon_2^{mm}\delta^{kl} + 2\mu_f \varepsilon_2^{kl} + \nu_f p_1 \delta^{kl}] \tag{1.1}$$

где σ_f^{kl} – тензор фиктивных напряжений в двухфазной среде; ε_2^{kl} – тензор деформаций твердой фазы; λ_f, μ_f, ν_f – фиктивные модули упругости среды. Они однозначно выражаются через модули упругости Ламэ и модули упругости зернистого скелета (твердой фазы); p_1 – давление жидкости (газа) первой фазы; δ^{kl} – символ Кронекера; α_2 – доля объема твердой фазы в среде.

Компоненты контравариантных тензоров будем обозначать верхними индексами.

Скорость тензора упругих деформаций твердой фазы выражается через скорость твердой фазы V_2^k по формуле

$$\frac{\partial \varepsilon_2^{kl}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2^k}{\partial x^l} + \frac{\partial V_2^l}{\partial x^k}\right) \tag{1.2}$$

уравнения движения фаз среды (импульсов фаз) с учетом вязкости жидкости

$$\begin{gathered}\rho_{11}\frac{\partial V_1^k}{\partial t} - \rho_{12}\frac{\partial V_2^k}{\partial t} = -\alpha_1\frac{\partial p_1}{\partial x^k} - F_\mu^k \\ \rho_{12}\frac{\partial V_1^k}{\partial t} - \rho_{22}\frac{\partial V_2^k}{\partial t} = \alpha_2\frac{\partial p_1}{\partial x^k} - \frac{\partial \sigma_f^{kl}}{\partial x^l} - F_\mu^k\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\rho_{11} = \rho_1(1+\chi_m\alpha_2), \qquad \rho_{12} = \chi_m\alpha_2\rho_1, \\ \rho_{22} = \rho_2 + \chi_m\alpha_2\rho_1 \; \alpha_1 = \rho_1/\rho_1^0, \alpha_2 = \rho_2/\rho_2^0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\end{gathered} \tag{1.4}$$

где V_i^k $(i = 1,2)$ – скорость перемещения фаз среды; $\dfrac{\partial}{\partial t}$ – частная производная по времени; $\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ – частная производная по координате x^k. По повторяющимся верхними индексами проводится суммирование от 1 до 3.

В формулах (1.3) – (1.4) χ_m – коэффициент присоединенной массы, характеризующий особенности структуры среды $(0 \le \chi_m \le 1)$; ρ_i $(i = 1,2)$ – приведенная плотность i-ой составляющей в единице объема среды; α_i - доли объема среды; ρ_i^0 - истинные плотности вещества фаз; k – коэффициент проницаемости изотропной среды, F_μ^k – сила трения (вязкая межфазная сила, которая находится по формуле

$$F_\mu^K = \alpha_1\alpha_2 K_\mu \mu_1 a_1^{-2}(V_1^K - V_2^K), \qquad a_1 = \sqrt{ka_2}, \qquad k = k_0(a_1/a_{10})^{10} \tag{1.5}$$

Здесь μ_1 – вязкость жидкости первой фазы, $K_\mu = 6\pi/(1-\beta_2)$ в случае стоксова обтекания системы твердых дисперсных частиц, β_2 – характеристика материала твердой фазы.

уравнения совместного деформирования фаз среды

$$\sigma_f^{kk} = 3\alpha_2(p_1 - p_2) \tag{1.6}$$

Из (1.6) определим давление в первой фазе

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{3\alpha_2}\sigma_f^{kk} \tag{1.7}$$

где p_2 среднее напряжение в твердой фазе, которое находится по формуле

$$p_2 = -\frac{1}{3} < \sigma_2^{kk} > = -(\lambda_2 + \frac{2}{3}\mu_2)\varepsilon_2^{kk} \tag{1.8}$$

Из (1.1) находим

$$\sigma_f^{kk} = 3\alpha_2[(\lambda_f + \frac{2}{3}\mu_f)\varepsilon_2^{kk} + \nu_f p_1] \tag{1.9}$$

Подставим (1.8) и (1.9) в (1.7), получим соотношения для определения давления в первой фазе, выраженное через деформации твердой фазы

$$p_1 = \Lambda\varepsilon_2^{kk}, \qquad \Lambda = \frac{1}{1-\nu_f}\{(\lambda_f - \lambda_2) + \frac{2}{3}(\mu_f - \mu_2)\} \tag{1.10}$$

На основании соотношений (1.1), (1.3) и (1.10) рассмотрим распространение волн ускорения в двухфазной зернистой среде

Волна ускорения в двухфазной зернистой среде определяется как изолированная поверхность, на которой фиктивные напряжения, скорости фаз и давление первой фазы непрерывны, а их частные производные претерпевают разрыв. Параметры среды непрерывны. Среда перед фронтом волны находится в недеформированном состоянии.

Для определения скоростей волн ускорения двухфазной среды, продифференцируем (1.1) и (1.10) по t

$$\frac{\partial\sigma_f^{kl}}{\partial t} = \alpha_2\left\{\lambda_f \frac{\partial\varepsilon_2^{mm}}{\partial t}\delta^{kl} + 2\mu_f\frac{\partial\varepsilon_2^{kl}}{\partial t} + \nu_f\frac{\partial p_1}{\partial t}\delta^{kl}\right\}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial t} = \Lambda\frac{\partial\varepsilon_2^{kk}}{\partial t}$$

или с учетом (1.2)

$$\frac{\partial\sigma_f^{kl}}{\partial t} = \alpha_2\left\{\lambda_f \frac{\partial V_2^m}{\partial x^m}\delta^{kl} + \mu_f(\frac{\partial V_2^k}{\partial x^l} + \frac{\partial V_2^l}{\partial x^k}) + \nu_f\frac{\partial p_1}{\partial t}\delta^{kl}\right\}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial t} = \Lambda\frac{\partial V_2^k}{\partial x^k} \tag{1.11}$$

Для соотношений (1.3), (1.11) возьмем разность производных на различных сторонах волновой поверхности. В результате получим

$$\begin{gathered}\rho_{11}\left[\frac{\partial V_1^k}{\partial t}\right] - \rho_{12}\left[\frac{\partial V_2^k}{\partial t}\right] = -\alpha_1\left[\frac{\partial p_1}{\partial x^k}\right] \\ \rho_{12}\left[\frac{\partial V_1^k}{\partial t}\right] - \rho_{22}\left[\frac{\partial V_2^k}{\partial t}\right] = \alpha_2\left[\frac{\partial p_1}{\partial x^k}\right] - \left[\frac{\partial\sigma_f^{kl}}{\partial x^l}\right], \qquad \left[\frac{\partial p_1}{\partial t}\right] = \Lambda\left[\frac{\partial V_2^k}{\partial x^k}\right]\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\alpha_2\left\{\lambda_f\left[\frac{\partial V_2^m}{\partial x^m}\right]\delta^{kl}+\mu_f\left(\left[\frac{\partial V_2^k}{\partial x^l}\right]+\left[\frac{\partial V_2^l}{\partial x^k}\right]\right)+\nu_f\left[\frac{\partial p_1}{\partial t}\right]\right\}=\left[\frac{\partial \sigma_f^{kl}}{\partial t}\right] \tag{1.13}$$

Для определения скорости волновой поверхности к системе (1.12) - (1.13) применим геометрические и кинематические условия совместности первого порядка [9]

$$[\frac{\partial V_\alpha^k}{\partial t}]=-\omega_\alpha^k G,\quad [\frac{\partial V_\alpha^k}{\partial x^k}]=\omega_\alpha^k\nu^k\quad (\alpha=1,2),\ [\frac{\partial \sigma_f^{kl}}{\partial t}]=-\eta^{kl}G \tag{1.14}$$

$$[\frac{\partial \sigma_f^{kl}}{\partial x^l}]=\eta^{kl}\nu^l\quad [\frac{\partial p_1}{\partial t}]=-\xi G,\quad [\frac{\partial p_1}{\partial x^k}]=\xi\nu^k$$

где ω_α^k – величины скачков первых производных скоростей фаз; η^{kl} – величина скачка производной напряжения, ξ – величина скачка первой производной давлении первой фазы; G – скорость движения волновой поверхности; ν^k – компоненты единичного вектора нормали к волновой поверхности. Квадратными скобками обозначается разность между значениями функции на задней и передней сторонах поверхности разрыва.

Учитывая условия совместности для разрывов производных первого порядка заданных функций (1.14) и соотношения (1.12) - (1.13), получим систему уравнений для определения скорости распространения волн в двухфазной мелкозернистой среде

$$\begin{gathered}
-\rho_{11}G\omega_1^k+\rho_{12}G\omega_2^k+\alpha_1\xi\nu^k=0\\
-\rho_{12}G\omega_1^k+\rho_{22}G\omega_2^k-\alpha_2\xi\nu^k+\eta^{kl}\nu^l=0\\
G\xi+\Lambda\omega_2^k\nu^k=0\\
\alpha_2[\lambda_f\omega_2^m\nu^m\delta^{kl}+\mu_f(\omega_2^k\nu^l+\omega_2^l\nu^k)-\nu_f G\xi\delta^{kl}]+G\eta^{kl}=0
\end{gathered} \tag{1.15}$$

Исключая из (1.15) величины η^{kl} и ξ, получим однородную систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными относительно ω_1^k и ω_2^k

$$\begin{gathered}
\rho_{11}G^2\omega_1^k-\rho_{12}G^2\omega_2^k+\alpha_1\Lambda\omega_2^m\nu^m\nu^k 0\\
\rho_{12}G^2\omega_1^k-\rho_{22}\omega_2^kG^2+\alpha_2\lambda_f\omega_2^m\nu^m\nu^k+\alpha_2\mu_f(\omega_2^k+\omega_2^l\nu^l\nu^k)-\alpha_2(1-\nu_f)\Lambda\omega_2^m\nu^m\nu^k=0
\end{gathered} \tag{1.16}$$

Для определения скорости продольной волны умножим оба уравнения (1.16) на ν^k и просуммируем по повторяющимся верхним индексам, получим систему уравнений относительно $\omega_1=\omega_1^k\nu^k\neq 0$ и $\omega_2=\omega_2^k\nu^k\neq 0$

$$\begin{gathered}
\rho_{11}G^2\omega_1+(\alpha_1\Lambda-\rho_{12}G^2)\omega_2=0\\
\rho_{12}G^2\omega_1+\{-\rho_{22}G^2+\alpha_2(\lambda_f+2\mu_f)-\alpha_2(1-\nu_f)\Lambda\}\omega_2=0
\end{gathered} \tag{1.17}$$

Условием существования ненулевых решений (1.17) служит равенство нулю ее определителя, что приводит к уравнению

$$(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)G^2-\rho_{11}\alpha_2(\lambda_f+2\mu_f)+\rho_{11}\alpha_2\Lambda(1-\nu_f)+\alpha_1\rho_{12}\Lambda=0 \tag{1.18}$$

Тогда квадрат скорости продольной волны в двухфазной зернистой среде будет иметь вид

$$G^2=\frac{\rho_{11}\alpha_2(\lambda_f+2\mu_f)-[\rho_{11}\alpha_2(1-\nu_f)+\rho_{12}\alpha_1]\Lambda}{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2} \tag{1.19}$$

Или с учетом Λ из (1.10), выражение для скорости продольной волны запишем в виде

$$G_l=\sqrt{\frac{\rho_{11}\alpha_2(\lambda_f+2\mu_f)(1-\nu_f)-[\rho_{11}\alpha_2(1-\nu_f)+\rho_{12}\alpha_1][(\lambda_f-\lambda_2)+\frac{2}{3}(\mu_f-\mu_2)]}{(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)(1-\nu_f)}} \tag{1.20}$$

Из формулы (1.20) следует, что в двухфазной зернистой упругой среде распространяется одна продольная волна. Если связь между фазами отсутствует $(\rho_{12}=0)$, доля жидкой фазы $\alpha_1 = 0$ и фиктивные модули упругости совпадают с модулями упругости твердой фазы, то из (1.20) приходим к выводу, что в такой среде распространяются чисто упругие продольные волны, скорость которых находится по формуле $(G = G_l)$

$$G_l = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_{22}}} \tag{1.21}$$

Если $\omega_\alpha = \omega_\alpha^k \nu^k = 0 \quad (\alpha = 1{,}2)$, то из (1.16) следует, что в рассматриваемой среде распространяются поперечные волны только в твердой фазе и их скорости определяются формулой $(G = G_t)$

$$G_t = \sqrt{\frac{\rho_{11}\alpha_2\mu_f}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}} \tag{1.22}$$

Если, $\alpha_2 = 1, \quad \mu_f = \mu_2$, то из (1.22) следует, что в рассматриваемой среде распростра-няются чисто упругие поперечные волны, скорость которых определяется формулой

$$G_t = \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_{22}}} \tag{1.23}$$

2. Получим уравнения для определения интенсивности затухания волн ускорения в мелкозернистой среде. Для этого продифференцируем (1.11), по x^l, а (1.3) по t, и учитывая (1.2) и (1.9), получим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \sigma_f^{kl}}{\partial t \partial x^l} = \alpha_2 \left\{ \lambda_f \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^k \partial x^l} + \mu_f \left(\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^l \partial x^l} + \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^k \partial x^l} \right) + \nu_f \Lambda \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^k \partial x^l} \right\} \tag{2.1}$$

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{12}\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2} = -\alpha_1 \Lambda \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l \partial x^k} - b\left(\frac{\partial V_1^k}{\partial t} - \frac{\partial V_2^k}{\partial t}\right)$$

$$\rho_{12}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{22}\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2} = \alpha_2 \Lambda \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 \sigma_f^{kl}}{\partial t \partial x^l} - b\left(\frac{\partial V_1^k}{\partial t} - \frac{\partial V_2^k}{\partial t}\right) \tag{2.2}$$

$$b = K_\mu \mu_1 a_1^{-2} \alpha_1 \, \alpha_2$$

где b – вязкость жидкости.

Подставим (2.1) в (2.2), получим систему уравнений относительно скоростей фаз зернистой среды

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{12}\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2} = -\alpha_1 \Lambda \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l \partial x^k} - b\left(\frac{\partial V_1^k}{\partial t} - \frac{\partial V_2^k}{\partial t}\right)$$

$$\rho_{12}\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2} - \rho_{22}\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2} = \Gamma \frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l \partial x^k} - \alpha_2 \left\{ \mu_f \frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^l \partial x^l} \right\} - b\left(\frac{\partial V_1^k}{\partial t} - \frac{\partial V_2^k}{\partial t}\right) \tag{2.3}$$

$$\Gamma = \alpha_2 (\Lambda - \lambda_f - \mu_f - \nu_f \Lambda)$$

Возьмем разность выражений (2.3) на различных сторонах волновой поверхности

$$\rho_{11}\left[\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2}\right] - \rho_{12}\left[\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2}\right] = -\alpha_1 \Lambda \left[\frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l \partial x^k}\right] - b\left(\left[\frac{\partial V_1^k}{\partial t}\right] - \left[\frac{\partial V_2^k}{\partial t}\right]\right)$$

$$\rho_{12}\left[\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2}\right] - \rho_{22}\left[\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2}\right] = \Gamma \left[\frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^l \partial x^k}\right] - \alpha_2 \mu_f \left[\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^l \partial x^l}\right] - b\left(\left[\frac{\partial V_1^k}{\partial t}\right] - \left[\frac{\partial V_2^k}{\partial t}\right]\right) \tag{2.4}$$

Запишем геометрические и кинематические условия совместности второго порядка для продольных волн [9]

$$\left[\frac{\partial^2 V_1^k}{\partial t^2}\right] = L_1^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_1^k}{\delta t}, \quad \left[\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial t^2}\right] = L_2^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_2^k}{\delta t}$$

$$\left[\frac{\partial^2 V_2^l}{\partial x^k \partial x^l}\right] = L_2^l \nu^k \nu^l + g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2^l}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial y^\beta}\nu^k, \quad \left[\frac{\partial^2 V_2^k}{\partial x^l \partial x^l}\right] = L_2^l \nu^l \nu^k - 2\Omega\omega_2^l \nu^l \nu^k \qquad (2.5)$$

$$[\frac{\partial V_\alpha^k}{\partial t}] = -\omega_\alpha^k G, \quad [\frac{\partial V_\alpha^k}{\partial x^k}] = \omega_\alpha^k \nu^k; \quad \alpha = 1{,}2$$

где L_α^k $(\alpha = 1{,}2)$ – величины, характеризующие скачки вторых производных скоростей фаз,

Подставим (2.4) в (2.5)

$$\rho_{11}(L_1^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_1^k}{\delta t}) - \rho_{12}(L_2^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_2^k}{\delta t}) =$$

$$= -\alpha_1 \Lambda (L_2^l \nu^k \nu^l + g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2^l}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial y^\beta}\nu^k) - b(-\omega_1^k G + \omega_2^k G) \qquad (2.6)$$

$$\rho_{12}(L_1^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_1^k}{\delta t}) - \rho_{22}(L_2^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_2^k}{\delta t}) = \Gamma(L_2^l \nu^k \nu^l + g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2^l}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial y^\beta}\nu^k) -$$

$$-\alpha_2 \mu_f (\, L_2^l \nu^l \nu^k - 2\Omega\omega_2^l \nu^l \nu^k) - b(-\omega_1^k G + \omega_2^k G)$$

Умножим обе части равенств системы (2.6) на ν^k и учитывая, что $\nu^k \nu^k = 1$, $\nu^k \dfrac{\partial x^k}{\partial y_\beta} = 0$, получим

$$\rho_{11}(L_1^k \nu^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_1^k}{\delta t}\nu^k) - \rho_{12}(L_2^k \nu^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_2^k}{\delta t}\nu^k) = -\alpha_1 \Lambda (L_2^l \nu^l + g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2^l}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial y^\beta}) -$$

$$- - b(-\omega_1^k \nu^k G + \omega_2^k \nu^k G)$$

$$\rho_{12}(L_1^k \nu^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_1^k}{\delta t}\nu^k) - \rho_{22}(L_2^k \nu^k G^2 - 2G\frac{\delta \omega_2^k}{\delta t}\nu^k) = \Gamma(L_2^l \nu^l + g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2^l}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^l}{\partial y^\beta}) - \qquad (2.7)$$

$$-\alpha_2 \mu_f (\, L_2^l \nu^l - 2\Omega\omega_2^l \nu^l) - b(-\omega_1^k \nu^k G + \omega_2^k \nu^k G)$$

Исключим из системы (2.7) величину L_1^k. Для этого умножим первое уравнение на ρ_{12}, а второе на $(-\rho_{11})$ и сложим, а для исключения величины L_2^k воспользуемся (1.18) и (2.3). Тогда после преобразований, получим

$$\rho_{12}\rho_{12} 2G\frac{\delta \omega_2^k}{\delta t}\nu^k \quad - \rho_{11}\rho_{22} 2G\frac{\delta \omega_2^k}{\delta t}\nu^k = -\alpha_1 \Lambda \rho_{12} g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2^k}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta} -$$

$$\rho_{12} b(-\omega_1^k \nu^k G + \omega_2^k \nu^k G) - \qquad (2.8)$$

$$-\Gamma \rho_{11} g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2^k}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta} - 2\rho_{11}\alpha_2 \mu_f \, \Omega\omega_2^k \nu^k + \rho_{11} b(-\omega_1^k \nu^k G + \omega_2^k \nu^k G)$$

Для упрощения соотношений (2.8) используем следующие преобразования

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2^k}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}\right) = g^{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_2 \nu^k}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta} = g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y^\alpha}\nu^k + \frac{\partial \nu^k}{\partial y^\alpha}\omega_2\right)\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta} =$$

$$= -g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^k}{\partial y^\tau}\omega_2 = -2\Omega\omega_2; \frac{\partial \nu^k}{\partial y^\alpha} = -g^{\beta\gamma} b_{\beta\alpha} x_\gamma^k$$

Тогда принимая во внимание равенство

$$\frac{\delta\omega_2^k}{\delta t}\nu^k = \frac{\delta(\omega_2 \nu^k)}{\delta t}\nu^k = \frac{\delta\omega_2 \cdot \nu^k + \omega_2\delta\nu^k}{\delta t}\nu^k = \frac{\delta\omega_2}{\delta t}\nu^k\nu^k + (\omega_2\frac{\delta\nu^k}{\delta t}\nu^k = 0)$$

и введя) обозначения

$$\omega_\eta = \omega_\eta^k\nu^k, \omega_\varepsilon^k = \omega_\eta\nu^k, \quad (\eta = 1{,}2)$$

получим уравнение вида

$$(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)2G_l\frac{\delta\omega_2}{\delta t} = 2\Omega\beta\omega_2 -- (\rho_{11} - \rho_{12})b\omega_1 G_l + (\rho_{11} - \rho_{12})b\omega_2 G_l \tag{2.9}$$

где

$$\beta = -\alpha_1\Lambda\rho_{12} + (\lambda_f + 2\mu_f)\alpha_2\rho_{11} - (1 - \nu_f)\rho_{11}\alpha_2\Lambda \tag{2.10}$$

Обозначим через $s \geq 0$ расстояние вдоль нормалей к поверхности $\sum(t_0)$. Тогда $\delta-$производную можно представить в виде [9]

$$\frac{\delta\omega_2}{\delta t} = G\frac{d\omega_2}{ds} \tag{2.11}$$

С учетом (2.11) из (2.9) и первого уравнения системы (1.17), получим дифференциальное уравнение для определения скорости изменения характеристических величин дл продольных волн в двухфазной зернистой среде.

$$\frac{d\omega_2}{\delta s} = \Omega\omega_2 + [(\rho_{11} - \rho_{12})bG_l\,(1 - \Gamma_l\,]\frac{\omega_2}{2\beta}, \quad \Gamma_l = \frac{\rho_{12}G_l^{\,2} - \alpha_1\Lambda}{\rho_{11}G_l^{\,2}} \tag{2.12}$$

Соотношения (36) определяют скорость изменения характеристических величин для продольных волн, распространяющихся во второй фазе двухфазной зернистой среды.

Известно [9], что на волновой поверхности, распространяющейся с постоянной скоростью G, средняя кривизна Ω поверхности имеет вид

$$\Omega = \frac{\Omega_0 - K_0 s}{1 - 2\Omega_0 s + K_0^2 s^2} \tag{2.13}$$

где Ω_0 и K_0 –средняя и гауссова кривизны волновой поверхности при $s = 0$.

Подставим (2.13) в формулу (2.12) получим

$$\frac{d\omega_2}{ds} = [\frac{\Omega_0 - K_0 s}{1 - 2\Omega_0 s + K_0^2 s^2} - \frac{\gamma_l}{2G_l})]\omega_2 \tag{2.14}$$

$$\gamma_l = b(\rho_{12} - \rho_{11})\frac{\alpha_1\Lambda + (\rho_{11} - \rho_{12})G_l^{\,2}}{\rho_{11}\beta}$$

Умножим соотношения (2.14) на ω_2 и учитывая, что интенсивность продольных волн определяется следующим образом [9]

$$W = \sqrt{\omega_2\omega_2} \tag{2.15}$$

получим решение дифференциального уравнения для определения интенсивности продольных волн во второй фазе

$$W_2^l = \frac{W_{20}^l}{(1 - 2\Omega_0 s + K^2{}_0 s^2)^{1/2}}\exp[-\frac{\gamma_l}{2G_l}]s \tag{2.16}$$

где W_{20}^p – значение интенсивности продольных волн при $s = 0$.

Изменение интенсивности продольных волн в первой фазе (жидкости) найдем из первого выражения (1.17)

$$W_1^l = \Gamma_l W_2^l, \quad \Gamma_l = \frac{\rho_{12} G_l^{\,2} - \alpha_1 \Lambda}{\rho_{11} G_l^{\,2}} \tag{2.17}$$

Тогда выражение для изменении интенсивности продольных волн в двухфазной зернистой среде, определится формулой

$$W^l = W_1^l + W_2^l = (\Gamma_l + 1) W_2^l = \frac{1+\Gamma_l}{\sqrt{\Psi}} W_{20}^p \exp[-\frac{\gamma_l}{2G_l}]s, \quad \Psi = 1 - 2\Omega_0 s + K_0 s^2 \tag{2.18}$$

Определим изменение интенсивности поперечной волны ускорения в двухфазной зернистой среде. Для этого продифференцируем по α соотношение, выполняющееся на поверхности поперечной волны

$$\omega_1^k \nu^k = 0, \quad \omega_2^k \nu^k = 0,$$

$$\frac{\partial \omega_1^k}{\partial y^\alpha} \nu^k = -\omega_1^k \frac{\partial \nu^k}{\partial y^\alpha} = \omega_1^k g^{\sigma\tau} b_{\sigma\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial y^\tau}, \quad \frac{\partial \omega_2^k}{\partial y^\alpha} \nu^k = -\omega_2^k \frac{\partial \nu^k}{\partial y^\alpha} = \omega_2^k g^{\sigma\tau} b_{\sigma\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial y^\tau} \tag{2.19}$$

Применим геометрические и кинематические условия совместности (30), подставим в (2.3) с учетом (2.19), получим

$$\begin{gathered}
\rho_{11}(L_1^k G^2 - 2G\frac{\delta\omega_1^k}{\delta t}) - \rho_{12}(L_2^k G^2 - 2G\frac{\delta\omega_2^k}{\delta t}) = -\alpha_1 \Lambda (L_2^l \nu^k \nu^l + \\
+ g^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega_2^{\ l}}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^l}{\partial y^\beta} \nu^k) - b(-\omega_1^k G + \omega_2^k G) \\
\rho_{12}(L_1^k G^2 - 2G\frac{\delta\omega_1^k}{\delta t}) - \rho_{22}(L_2^k G^2 - 2G\frac{\delta\omega_2^k}{\delta t}) = \Gamma(L_2^l \nu^k \nu^l + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega_2^{\ l}}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^l}{\partial y^\beta} \nu^k) - \\
- \alpha_2 \mu_f (L_2^k - 2\Omega \omega_2^k) - b(-\omega_1^k G + \omega_2^k G)
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Умножим оба уравнения на ω_2^k и просуммируем по повторяющемуся индексу k, и учитывая, что $\omega_2^k \nu^k = 0$ то получим

$$\begin{gathered}
\rho_{11}(L_1^k \omega_2^k G^2 - 2G\frac{\delta\omega_1^k}{\delta t}\omega_2^k) - \rho_{12}(L_2^k \omega_2^k G^2 - 2G\frac{\delta\omega_2^k}{\delta t}\omega_2^k) = -b(-\omega_1^k \omega_2^k G + \omega_2^k \omega_2^k G) \\
\rho_{12}(L_1^k \omega_2^k G^2 - 2G\frac{\delta\omega_1^k}{\delta t}\omega_2^k) - \rho_{22}(L_2^k \omega_2^k G^2 - 2G\frac{\delta\omega_2^k}{\delta t}\omega_2^k) = \\
= -\alpha_2 \mu_f (L_2^k \omega_2^k - 2\Omega \omega_2^k \omega_2^k) - b(-\omega_1^k \omega_2^k G + \omega_2^k \omega_2^k G)
\end{gathered} \tag{2.21}$$

Для исключения величины L_1^k умножим первое уравнение (2.21) на ρ_{12}, а второе на $(-\rho_{11})$ и сложим, получим

$$\begin{gathered}
(-\rho_{12}^2 + \rho_{11}\rho_{22})(L_2^k \omega_2^k G^2 + 2G\frac{\delta\omega_2^k}{\delta t}\omega_2^k) = -\rho_{12} b(-\omega_1^k \omega_2^k G + \omega_2^{2k} G) + \\
+ \alpha_2 \mu_f \rho_{11}(L_2^k \nu^k - 2\Omega \omega_2^{2k}) + \rho_{11} b(-\omega_1^k \omega_2^k G + \omega_2^{2k} G)
\end{gathered} \tag{2.22}$$

Согласно (23) $-\rho_{11}\rho_{22}G^2 + \rho_{11}\alpha_2\mu_f + \rho_{12}^2 G^2 = 0$ соотношение (46) запишем в виде

$$2\rho_{11}\alpha_2\mu_f \frac{\delta\omega_2^k}{\delta t}\omega_2^k - \alpha_2\mu_f\rho_{11} 2\Omega_t \omega_2^{2k} G + bG^2[(\rho_{12} - \rho_{11})(\omega_1^k - \omega_2^k]\omega_2^k = 0 \tag{2.23}$$

Соотношения (2.13) определяют скорость изменения характеристических величин для поперечных волн, распространяющихся во второй фазе двухфазной зернистой среды.

Из второго уравнения системы (1.17) найдем

$$\omega_1^k = \Gamma_t \omega_2^k, \quad \Gamma_t = \frac{\rho_{22} G_t^{\,2} - \mu_f \alpha_2}{\rho_{12} G_t^{\,2}} \tag{2.24}$$

Подставим (2.14) в (2.23) и учитывая (2.13), получим дифференциальное уравнение для определения интенсивности поперечной волны во второй фазе

$$\frac{d\omega_2^k}{ds} = \Omega_t \omega_2^k - bG_t \frac{1}{2\rho_{11}\alpha_2\mu_f}[(\rho_{12} - \rho_{11})(\Gamma_t - 1)]\omega_2^k \tag{2.25}$$

С учетом (39_1) дифференциальное. уравнение для определения интенсивности поперечных волн второй фазы запишем в виде

$$\frac{dW_2^t}{ds} = (\Omega_t - \frac{\gamma_t}{2G_t})W_2^t \qquad \gamma_t = \frac{b(\rho_{12} - \rho_{11})[(\rho_{22} - \rho_{12})G_t^{\,2} - \mu_f \alpha_2]}{\rho_{11}\rho_{12}\alpha_2 \mu_f} \tag{2.26}$$

Интегрируя данное уравнение и учитывая равенство (38), получим выражение для определения интенсивности поперечных волн, распространяющихся в твердой фазе

$$W_2^t = \frac{W_{20}^t}{\sqrt{\Psi}} \exp(-\frac{\gamma_t}{2G_t} s) \tag{2.27}$$

где W_{20}^t – значение интенсивности поперечной волны при $s = 0$.

Интенсивность поперечной волн первой фазы определим из формулы

$$W_1^t = \Gamma_t W_2^t \qquad \Gamma_t = \frac{\mu_f \alpha_2 - \rho_{22} G_t^{\,2}}{\rho_{12} G_t^{\,2}} \tag{2.28}$$

Тогда интенсивность поперечной волны запишем в виде

$$W^t = W_1^t + W_2^t = \frac{1+\Gamma_t}{\sqrt{\Psi}} W_{20}^t \exp(-\frac{\gamma_t}{2G_t} s) \tag{2.29}$$

Пример. Рассмотрим волны ускорения, представляющие концентрически расширяющуюся сферу, радиуса R. Определим интенсивность волн в процессе их распространения.

Будем считать, что единичный вектор ν выбран так, что его направление совпадает с направлением распространения волны. Следовательно, ν – вектор внешней нормали к сферическим поверхностям, поэтому средняя кривизна при $s = 0$ отрицательна $\Omega(s=0) = -\frac{1}{R_0}$, а гауссова кривизна $K(s=0) = \frac{1}{R_0}$. Тогда переменную s в уравнениях (2.13) и можно заменить переменной R. Подставим значения Ω_0 и K_0 в выражение (2.13) получим

$$\Omega_p = \frac{1}{R_p + R_0}$$

Тогда из уравнений (2.18) и (2.29) находим

$$W^p = W_1^p + W_2^p = \frac{(1+\Gamma_p)W_0^p}{R_p + R_0} \exp\left(-\frac{\gamma_p}{2G_p} s\right), \qquad p = l, t$$

Из формулы следует, что интенсивность затухания W^p как продольных так и поперечных волн монотонно стремится к нулю при $s \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-frequency. Range/M.A.Biot //J. Acoust. Soc. America. 1956. V. 28. № 2. P.168 -178.*
2. *Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах/Л.Я. Косачевский //ПММ. 959. Т. 23. Вып. 6. С. 1115 - 1123.*
3. *Поленов В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде /В.С.Поленов, А.В.Чигарев // ПММ. 2010. Т. 74. Вып.2. С. 276– 284.*
4. *Борисов А.В. Волновая динамика неоднородных и нелинейных структур с приложением к геомеханике и биомеханике /А.В Борисов, А.А. Буренин, В.С.Поленов, А.В.Чигарев //Смоленск. Универсум. 2015. 443с.*
5. *Поленов В.С. Распространение упругих волн в насыщенной вязкой жидкостью пористой среде/ В.С.Поленов //ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 4. С.501-507.*
6. *Масликова Т.И. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах/Т.И. Масликова, В.С.Поленов// Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 104-108.*
7. *Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред /.Р.И. Нигматулин//М.: Наука, 1978. 336с.*
8. *Нигматулин Р.И. Механика многофазных сред /Р.И. Нигматулин М.: Наука. ч. 1. 1967. 464с., ч. 2. 1967. 380с.*
9. *Thomas T. Y. Plastic Flow and the Fracture in Solids. N. y.; L.: Acad. Press, 1961.*
   Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах М.: Мир, 1964. 308с.

E-mail: polenov.vrn@mail.ru
chigarev@rambler.ru

Поступила в редакцию 24.09.2016