

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ТОНКИХ ПЛОСКИХ СЛОЕВ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

к.ф.-м.н. Конон П.Н., асп. Ермоленко А.И.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Процессы, использующие движение жидкости на поверхности вращающегося цилиндра, находят широкое применение в химической, строительной, пищевой и других отраслях промышленности. Это производство жидкого бетона в строительстве, сливочного масла в пищевой промышленности, покрытие смазочным вязким слоем цилиндрических подшипников в механизмах различных машин и станков, нанесение слоя клея на бумагу, покрытие краской предметов цилиндрической формы, нанесение пленки в фотографической индустрии, литье стекла. Следует отметить, что существенную роль в формировании жидких слоев на вращающихся основаниях играют силы инерции, центробежные силы, силы гравитации и поверхностного натяжения.

Производство минеральных и металлических волокон центробежно-валковым и центробежно-дисковым способом состоит в разрушении слоя, формирующегося на поверхности быстро вращающегося цилиндра или диска при натекании на них расплава. Имеется новое предложение использовать неизотермическое двухслойное течение жидкостей на внешней поверхности закрученного цилиндра для производства тонких металлических композитных волокон с улучшенными прочностными свойствами.

Известны работы, в которых исследуется течение одного слоя вязкой жидкости на внешней либо на внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки [1–2]. Экспериментальные исследования данных видов течения проведены в [3–4]. Исследования установившегося течения одного слоя жидкости на поверхности цилиндра рассмотрено в работах [5–6].

Постановка задачи. Рассмотрим движение двух плоских слоев вязких несжимаемых жидкостей на внешней поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью, горизонтально расположенного цилиндра в поле сил поверхностного натяжения и гравитации. Задачу удобно рассматривать в неподвижной цилиндрической системе координат O, Y, θ (рисунок 1).

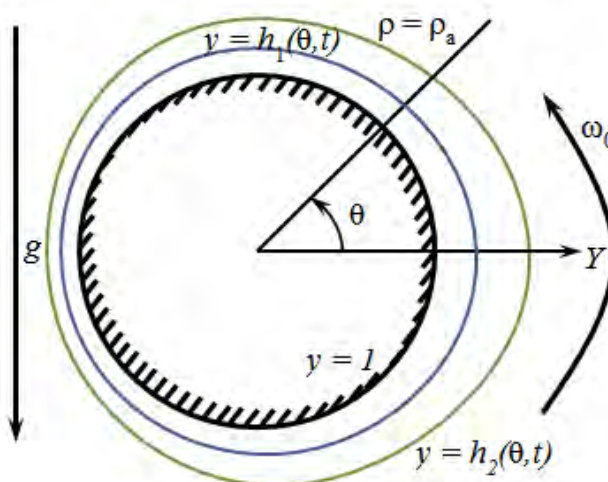


Рис. 1. Схема движения плоских слоев жидкости на внешней поверхности вращающегося цилиндра

Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса, неразрывности и неизвестной свободной поверхности [2,7]. Обезразмеренные по радиусу цилиндра R_0 , угловой скорости его вращения ω_0 и плотности жидкости ρ_1 они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{w_i}{y} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} - \frac{w_i^2}{y} = \\ & = -k_i \frac{\partial p_i}{\partial y} + \text{Re}_i^{-1} \left(\Delta v_i - \frac{v_i}{y^2} - \frac{2}{y^2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right) - Fr^{-1} \sin \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial w_i}{\partial y} + \frac{w_i}{y} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} + \frac{v_i w_i}{y} = \\ & = -k_i \frac{1}{y} \frac{\partial p_i}{\partial \theta} + \text{Re}_i^{-1} \left(\Delta w_i - \frac{w_i}{y^2} + \frac{2}{y^2} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \right) - Fr^{-1} \cos \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(yv_i)}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial \theta} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{w_i}{y} \frac{\partial h_i}{\partial \theta} = v_i, \quad y = h_i(\theta, t), \quad (4)$$

где $i = \overline{1,2}$; $k_1 = 1$, $k_2 = \rho_1/\rho_2$.

Уравнения (1)–(4) дополняются граничными условиями: прилипание на поверхности цилиндра при $y = 1$; отсутствие вязкого взаимодействия с окружающей средой при $y = h_2(\theta, t)$; непрерывность нормальных напряжений при $y = h_2(\theta, t)$; равенство скоростей при $y = h_1(\theta, t)$; равенство касательных напряжений при $y = h_1(\theta, t)$; условие, выражающее скачок нормальных напряжений, вызванный действием капиллярных сил при $y = h_1(\theta, t)$.

Граничные условия приведены в работе [8] для двух слоев на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. В данной постановке они отличаются лишь знаком правой части в условиях на нормальные напряжения.

В момент времени $t = 0$ задаются начальные условия – начальные формы поверхностей и начальное распределение скоростей:

$$h_i(\theta, 0) = h_{i0}(\theta), \quad v_i(y, \theta, 0) = v_{i0}(y, \theta), \quad w_i(y, \theta, 0) = w_{i0}(y, \theta). \quad (5)$$

Кроме того v_i , v_{i0} , w_i , w_{i0} , h_i , h_{i0} , $p_i - 2\pi$ -периодичные по углу θ функции, а v_{i0} , w_{i0} удовлетворяют уравнениям неразрывности (3).

В уравнениях (1)–(5) v_i , w_i , – соответственно радиальные и трансверсальные составляющие скоростей, p_a – давление невозмущенной окружающей среды.

Уравнения содержат безразмерные параметры – числа Рейнольдса $\text{Re}_i = R_0^2 \omega_0 / \nu_i$, Фруда $\text{Fr} = R_0 \omega_0^2 / g$ и в граничных условиях на нормальные напряжения числа Вебера $\text{We}_i = \rho_1 R_0^3 \omega_0^2 / \sigma_i$. Здесь ν_i – коэффициенты кинематических вязкостей, g – ускорение силы тяжести, σ_i – коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей, $i = \overline{1,2}$.

Уравнения (1)–(4), дополненные граничными условиями из [8], с начальными условиями (5) представляют собой полную постановку задачи о движении двух несмешивающихся плоских слоев вязких жидкостей с неизвестными свободными поверхностями на внешней поверхности горизонтально расположенного цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Решение задачи в случае установившегося движения. Рассмотрим случай плоского, достаточно медленного, установившегося движения двух несмешивающихся тонких слоев вязкой жидкости на внешней поверхности горизонтально расположенного, вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле тяжести. Обезраз-

меренные по радиусу цилиндра R_0 , угловой скорости его вращения ω_0 и плотности первой жидкости ρ_1 в неподвижной системе координат O, y, θ уравнения движения и граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = \gamma_i \cos \theta, \quad (6)$$

$$y=1, \quad w_1=1, \quad (7)$$

$$y=h_1(\theta, t), \quad w_1=w_2, \quad (8)$$

$$y=h_2(\theta, t), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_2}{y} \right) = 0, \quad (9)$$

$$y=h_1(\theta, t), \quad k \frac{Re_2}{Re_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_1}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_2}{y} \right), \quad (10) \text{ где } i=1,2, \gamma_i=Re_i Fr^{-1}, k=\rho_1/\rho_2, Re_i=R_0^2 \omega_0 / \nu_i -$$

числа Рейнольдса, $Fr=R_0 \omega_0^2/g$ – число Фруда, w_i – окружные компоненты скоростей движения слоев, ν_i – коэффициенты кинематической вязкости жидкостей, ρ_i – плотности жидкостей, g – ускорение силы тяжести.

Условие (7) – условие прилипания жидкости к поверхности вращающегося цилиндра, соотношение (8) – условие равенства скоростей на границе слоев, условие (9) характеризует отсутствие касательных напряжений на свободной поверхности внешнего слоя $h_2(\theta, t)$, равенство (10) – условие равенства касательных напряжений на поверхности $h_1(\theta, t)$.

Решая систему уравнений (6) – (10), находим окружные компоненты скоростей движения слоев жидкостей $w_i(y, \theta)$:

$$w_1(y, \theta) = y + \frac{(y-1)(k Re_2 \gamma_1 y - Re_1 \gamma_2 h_2^2 + h_1^2(-k Re_2 \gamma_1 + Re_1 \gamma_2)) \cos \theta}{2k Re_2}, \quad (11)$$

$$w_2(y, \theta) = \frac{(Re_1 - k Re_2) \gamma_2 y \cos \theta}{2k Re_2} \frac{h_2^2}{h_1} + \frac{(k Re_2 - Re_1 y) \gamma_2 \cos \theta}{2k Re_2} h_2^2 +$$

$$+ \frac{y(k Re_2 (2\gamma_1 - \gamma_2) - Re_1 \gamma_2) \cos \theta}{2k Re_2} h_1 + \frac{y(Re_1 \gamma_2 - k Re_2 \gamma_1) \cos \theta}{2k Re_2} h_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \gamma_2 y^2 \cos \theta + \left(1 - \frac{1}{2} \gamma_1 \cos \theta \right) y. \quad (12)$$

Найдем потоки $Q_i(\theta)$ жидкостей через поперечное сечение слоев:

$$Q_1(\theta) = \int_1^{h_1} w_1(y, \theta) dy, \quad Q_2(\theta) = \int_{h_1}^{h_2} w_2(y, \theta) dy. \quad (13)$$

В итоге получаем следующие выражения:

$$Q_1(\theta) = -\frac{Re_1 \gamma_2 \cos \theta}{4k Re_2} h_2^2 + \frac{Re_1 \gamma_2 \cos \theta}{2k Re_2} h_1 h_2^2 - \frac{(k Re_2 \gamma_1 - Re_1 \gamma_2) \cos \theta}{4k Re_2} h_1^4 -$$

$$- \frac{(3 Re_1 \gamma_2 - 4k Re_2 \gamma_1) \cos \theta}{6k Re_2} h_1^3 - \frac{Re_1 \gamma_2 \cos \theta}{4k Re_2} h_1^2 h_2^2 -$$

$$- \frac{1}{4} \left(-2 + \left(2\gamma_1 - \frac{Re_1 \gamma_2}{k Re_2} \right) \cos \theta \right) h_1^2 - \frac{1}{12} (6 - \gamma_1 \cos \theta), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
Q_2(\theta) = & -\frac{\text{Re}_1 \gamma_2 \cos \theta}{4k \text{Re}_2} h_2^4 + \frac{2}{3} \gamma_2 h_2^3 \cos \theta - \frac{(k \text{Re}_2 - \text{Re}_1) \gamma_2 \cos \theta}{4k \text{Re}_2} \frac{h_2^4}{h_1} - \\
& - \frac{(k \text{Re}_2 (6\gamma_1 - \gamma_2) - 3\text{Re}_1 \gamma_2) \cos \theta}{12k \text{Re}_2} h_1^3 - \frac{(\text{Re}_1 \gamma_2 - k \text{Re}_2 \gamma_1) \cos \theta}{4k \text{Re}_2} h_1^4 - \\
& - \frac{(\text{Re}_1 \gamma_2 + k \text{Re}_2 (-\gamma_1 + \gamma_2)) \cos \theta}{2k \text{Re}_2} h_1 h_2^2 - \frac{1}{4} (\gamma_1 \cos \theta - 2) h_2^2 - \\
& - \frac{(k \text{Re}_2 \gamma_1 - 2\text{Re}_1 \gamma_2) \cos \theta}{4k \text{Re}_2} h_1^2 h_2^2 - \frac{1}{4} (2 - \gamma_1 \cos \theta) h_1^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для отыскания решения задачи вводятся условия постоянства потоков двух слоев:

$$Q_i(\theta) = Q_{i \text{const}}, \tag{16}$$

где $Q_{i \text{const}}$ – постоянные потоки, которые можно найти по следующим формулам:

$$Q_{1 \text{const}} = \int_1^{h_{1 \text{const}}} y dy, \quad Q_{2 \text{const}} = \int_{h_{1 \text{const}}}^{h_{2 \text{const}}} y dy, \tag{17}$$

где $h_{i \text{const}}$ – константы, задающие средние значения $h_i(\theta)$, которые будут получены. Численные расчеты приведены для значений $h_{1 \text{const}} = 1,02$, $h_{2 \text{const}} = 1,04$.

Введем значения толщин слоев $\delta_1(\theta) = h_1(\theta) - 1$, $\delta_2(\theta) = h_2(\theta) - h_1(\theta)$ и амплитуды движения для 1-го и 2-го слоя $A_1 = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} h_1(\theta) - \min_{\theta \in [0, 2\pi]} h_1(\theta)$, $A_2 = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} h_2(\theta) - \min_{\theta \in [0, 2\pi]} h_2(\theta)$.

Для того чтобы задача имела стационарное решение должны выполняться условия:

$$\text{Re}_i \delta_i^2 \ll 1, \quad \gamma_i \delta_i^2 \ll 1, \quad \delta_i \ll 1, \tag{18}$$

Для определения форм поверхностей найдем значения h_i для различных значений угла θ , решив относительно h_i систему уравнений (16).

В таблице 1 приведены решения задачи для некоторых значений углов для четырех различных безразмерных критериев течений.

Таблица 1 наглядно демонстрирует, что толщины слоев h_i минимальны в левой части цилиндра, а максимальны в его правой части при вращении против часовой стрелки. Также таблица 1 отображает тот факт, что чем больше числа γ_i , тем больше максимальные и, соответственно, меньше минимальные значения h_i .

В таблице 2 приведем безразмерные параметры четырех различных пар жидкостей, а также соответствующие им максимальные и минимальные значения h_i , и значения амплитуд A_i движения слоев.

По значениям амплитуд из таблицы 2 можно сделать вывод, что с уменьшением чисел γ_i , т.е. с ослаблением относительного влияния гравитации амплитуды возмущений становятся меньше и толщины слоев приближаются к постоянным значениям.

Чтобы наглядно продемонстрировать, как зависит изменение формы поверхности слоя от безразмерных параметров жидкостей, на рисунке 2 в одной графической области приведены графики изменения толщины слоя δ_1 для четырех различных безразмерных параметров, а на рисунке 3 – графики изменения δ_2 .

Таблица 1 – Решения задачи для четырех различных параметров жидкостей

θ	$\gamma_1=265,258, Re_1=26,1799,$ $\gamma_2=306,067, Re_2=30,2076.$		$\gamma_1=221,049, Re_1=21,8166,$ $\gamma_2=248,68, Re_2=24,5437.$		$\gamma_1=180,858, Re_1=17,85,$ $\gamma_2=209,414, Re_2=20,6684.$		$\gamma_1=132,629, Re_1=13,09,$ $\gamma_2=142,103, Re_2=14,025.$	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
0	1,022941	1,052078	1,022054	1,047641	1,021466	1,045248	1,020952	1,043239
$\pi/6$	1,022197	1,048336	1,021647	1,045918	1,02121	1,044247	1,020802	1,042701
$\pi/4$	1,021601	1,045765	1,021247	1,044349	1,020939	1,043232	1,020635	1,042116
$\pi/3$	1,021014	1,043493	1,020813	1,042752	1,020627	1,042111	1,020432	1,041423
$\pi/2$	1,02	1,041578	1,02	1,04	1,02	1,04	1,02	1,04
$2\pi/3$	1,019269	1,037728	1,019378	1,038062	1,019493	1,038403	1,019627	1,038828
$3\pi/4$	1,019014	1,036977	1,019156	1,037401	1,019307	1,03784	1,019487	1,038398
$5\pi/6$	1,018833	1,036453	1,018997	1,036935	1,019173	1,037438	1,019383	1,038085
π	1,018689	1,036042	1,018869	1,036567	1,019064	1,037117	1,019299	1,037833
$7\pi/6$	1,018833	1,036453	1,018997	1,036935	1,019173	1,037438	1,019383	1,038085
$5\pi/4$	1,019014	1,036977	1,019156	1,037401	1,019307	1,03784	1,019487	1,038398
$4\pi/3$	1,019269	1,037728	1,019378	1,038062	1,019493	1,038403	1,019627	1,038828
$3\pi/2$	1,02	1,04	1,02	1,04	1,02	1,04	1,02	1,04
$5\pi/3$	1,021014	1,043493	1,020813	1,042752	1,020627	1,042111	1,020432	1,041423
$7\pi/4$	1,021601	1,045765	1,021247	1,044349	1,020939	1,043232	1,020635	1,042116
$11\pi/6$	1,022197	1,048336	1,021647	1,045918	1,02121	1,044247	1,020802	1,042701
2π	1,022941	1,052078	1,022054	1,047641	1,021466	1,045248	1,020952	1,043239

Таблица 2 – Амплитуды и экстремумы h_i для различных параметров

γ_1	265,2582	221,0485	180,8579	132,6291
γ_2	306,0672	248,6796	209,4144	142,1026
Re_1	26,17994	21,81662	17,84996	13,08997
Re_2	30,20762	24,54369	20,66837	14,02497
Fr	10,13212	10,13212	10,13212	10,13212
k	1,1	1,1	1,15	1,2
h_{1max}	1,022941	1,022054	1,021466	1,020952
h_{1min}	1,018689	1,018869	1,019064	1,019299
h_{2max}	1,052078	1,047641	1,045248	1,043239
h_{2min}	1,036042	1,036567	1,037117	1,037833
Амплитуда A_1	0,004252	0,003185	0,002402	0,001652
Амплитуда A_2	0,016035	0,011074	0,008131	0,005406

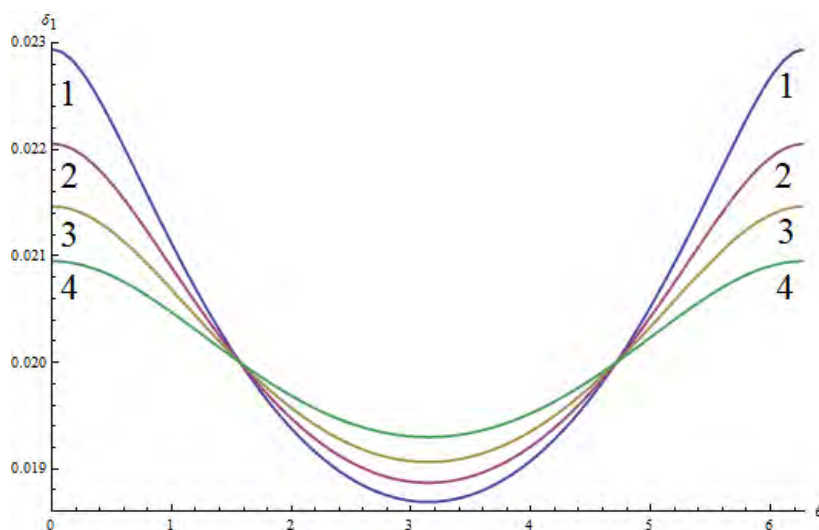


Рис. 2. Графики δ_1 для четырех различных параметров
 «1» – $\gamma_1 = 265,258, Re_1 = 26,1799, \gamma_2 = 306,067, Re_2 = 30,2076, k = 1,1.$
 «2» – $\gamma_1 = 221,049, Re_1 = 21,8166, \gamma_2 = 248,68, Re_2 = 24,5437, k = 1,1.$
 «3» – $\gamma_1 = 180,858, Re_1 = 17,85, \gamma_2 = 209,414, Re_2 = 20,6684, k = 1,15.$
 «4» – $\gamma_1 = 132,629, Re_1 = 13,09, \gamma_2 = 142,103, Re_2 = 14,025, k = 1,2$

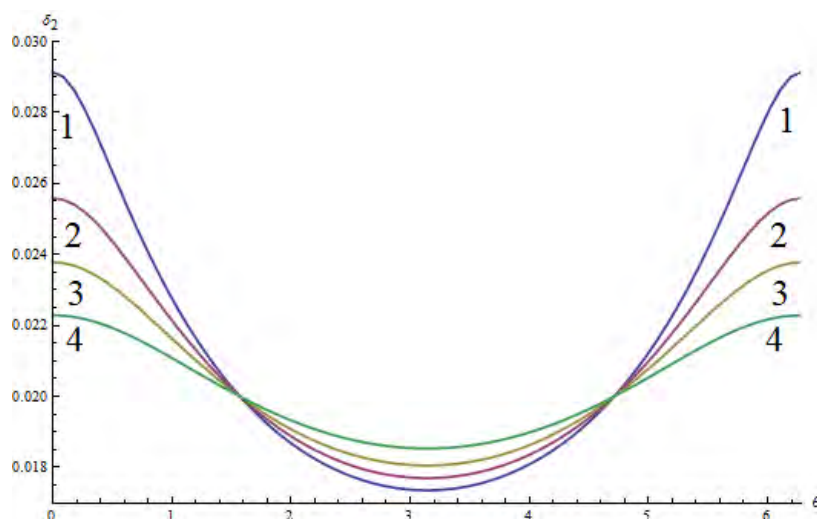


Рис. 3. Графики δ_2 для четырех различных параметров
 «1» – $\gamma_1 = 265,258$, $Re_1 = 26,1799$, $\gamma_2 = 306,067$, $Re_2 = 30,2076$, $k = 1,1$.
 «2» – $\gamma_1 = 221,049$, $Re_1 = 21,8166$, $\gamma_2 = 248,68$, $Re_2 = 24,5437$, $k = 1,1$.
 «3» – $\gamma_1 = 180,858$, $Re_1 = 17,85$, $\gamma_2 = 209,414$, $Re_2 = 20,6684$, $k = 1,15$.
 «4» – $\gamma_1 = 132,629$, $Re_1 = 13,09$, $\gamma_2 = 142,103$, $Re_2 = 14,025$, $k = 1,2$

На приведенных иллюстрациях можно заметить, что с уменьшением чисел γ_i уменьшается и возмущение поверхностей слоев. Наибольшие амплитуды возмущений по всему периметру цилиндра на промежутке $[0, 2\pi]$ наблюдаются для внутреннего слоя с индексом 1 с наибольшими числами Re_i и γ_i что соответствует значительному влиянию центробежных сил и силы тяжести. Также стоит отметить, что графики δ_1 и δ_2 симметричны относительно прямой $\theta = \pi$. Свои максимальные значения толщины слоев δ_i принимают при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$, а минимальные при $\theta = \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конон П.Н., Жук А.В. Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки. // *Механика машин, механизмов и материалов*. Минск. - 2013. - №4 (25) – С. 32-37.
2. Пухначев В.В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // *ПМТФ*. – 1977. – № 3. – С. 78-88.
3. Thoroddsen S.T., Mahadevan L. Experimental study of coating flows in a partially-filled horizontally rotating cylinder // *Experiments in Fluids* – 1997. – №.23 – С.1-13.
4. F.Melo. Localized states in a film-dragging experiment / *Phys. Rev. Vol. 48, Iss. 4 – October 1993. P. 2704 –2712*.
5. Moffat H.K. Behavior of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder // *Jornal de Mehanique*. –1977. –V. 16, № 8. –P. 651-673.
6. Hansen E.B., Kelmanson M.A. Steady, viscous, free-surface flow on a rotating cylinder / *Journal of Fluid Mechanics*. V. 272, 1994. P. 91-107.
7. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
8. П.Н. Конон, А. И. Ермоленко. Исследование двухслойного течения пленок--- вязких жидкостей на внутренней поверхности вращающегося цилиндра // «*ВЕСТНИК БелГУТа: НАУКА и ТРАНСПОРТ*». – 2016. – №1(32). – С. 334-337.

E-mail: alexermolenko1993@gmail.com
kononp@tut.by

Поступила в редакцию 30.09.2016