

## МАТРИЧНЫЙ МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ АНТРОПОМОРФНЫХ СИСТЕМ ТИПА ЭКЗОСКЕЛЕТА СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

д.ф.-м.н. <sup>1</sup>Чигарев А.В., к.т.н. <sup>2</sup>Борисов А.В.

<sup>1</sup> Белорусский национальный технический университет, Минск

<sup>2</sup> филиал ГОУ ВО НИУ «Московский энергетический институт (Технический университет)» в Смоленске, Россия

**Введение.** В работах [1-2] рассматривается двумерная модель экзоскелета, движение которого являлось плоским. Подобные модели имеют важное теоретическое значение, но непосредственно в практику не могут быть внедрены. Необходимо рассмотрение трехмерных моделей, которые можно практически реализовать. Простой переносимости результатов двумерной модели не получается, поэтому изучение трехмерных моделей представляет самостоятельное направление в исследовании стержневых систем. При моделировании опорно-двигательного аппарата человека изменение длины звена связано со многими факторами: 1) силами и реакциями, возникающими при ходьбе, вызывающими деформации кости, хрящевых тканей сустава; 2) смещениями в суставе за счет синовиальной жидкости, неидеальности самой формы сустава; 3) изменением длины звена за счет того, что, что кость не является идеально прямым стержнем; 4) при перекачивании головки кости по мениску при движении в коленном суставе происходит изменение длины звена за счет изменения положения оси вращения (рис. 1).

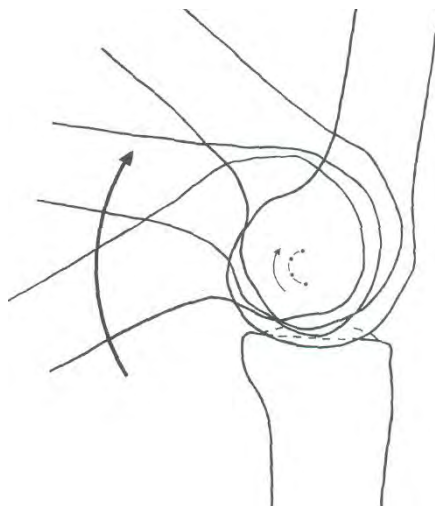


Рис. 1. Траектория мгновенных центров вращения (отмечена точками) в здоровом коленном суставе человека [3]

В работе [4] указывается, что не учет перекачивания кости в коленном суставе и за счет этого изменения длины звена приводит к травмам человека при использовании экзоскелета с абсолютно твердыми звеньями. В этой же работе предложена эквивалентная кинематическая модель, основанная на кулачках неправильной формы, моделирующих контакт кость-к-кости в коленном суставе человека, чей контур получается путем определения мгновенного центра вращения. В качестве основного инструмента измерения, использована система видеонаблюдения в результате получается информация о перемещениях мгновенного центра вращения в области коленного сустава.

Следовательно, изменение длины звена связано не только с действием сил и моментов сил при движении, но и с изменением длины за счет геометрии конечности, длина которой изменяется из-за изменения взаимного положения звеньев опорно-двигательного аппарата человека. Описать изменение длины звена под влиянием факторов различной природы наиболее эффективно можно, приняв в качестве модели звено переменной длины как функции времени. Все характеристики, такие как угол поворота, длина, положение центра масс звена являются функциями времени:  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $l = l(t)$ ,  $\Delta l = \Delta l(t)$ ,  $C_l = C_l(t)$ .

На практике в случае движения экзоскелета возможна реализация активных управляющих моментов в виде электрических двигателей с датчиками угла поворота, угловой скорости и блока управления с обратной связью. Активные моменты создают необходимые тормозящие усилия при постановке ноги на опору и ускоряющие усилия при отталкивании ноги от опоры. При торможении возможна рекуперация энергии и тем самым снижение энергозатрат при движении экзоскелета, так как проблема высокого энергопотребления при движении экзоскелета и антропоморфного робота, является актуальной. Практическая реализация управляющего момента является задачей оптимального управления и в данном исследовании не рассматривается.

### Описание модели звена переменной длины

Рассмотрим стержень переменной длины, представленный на рисунке 2, где  $\varphi$  – угол поворота стержня,  $C_{l_0}$  – начальное положение центра масс стержня,  $C_l$  – текущее положение центра масс стержня, начальная длина ненагруженного стержня  $l_0$ , текущая длина стержня при движении  $l$ , тогда изменение длины стержня можно представить в виде:

$$\Delta l = l_0 - l. \quad (1)$$

При  $\Delta l > 0$  происходит сжатие стержня, при  $\Delta l < 0$  – растяжение.

В шарнире  $A$  стержня приложен момент  $M(t)$ , который является управлением в модели и определяет вращательное движение стержня.

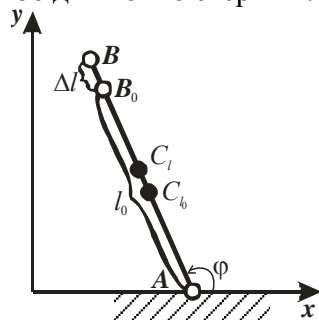


Рис. 2. Изменение длины стержня при его движении

Допущения для такой модели стержня.

1) Предполагаем, что имеют место только небольшие изменения длины звена, то тогда относительное удлинение  $\frac{\Delta l}{l_0} \ll 1$ , где  $\Delta l = l_0 - l$ . Однако, скорость изменения

длины звена  $\dot{l}$  – величина значительная и ею пренебречь нельзя.

2) Если рассматривать звено как однородный тонкий стержень, имеем:

$$I = \frac{ml^2}{12} = \frac{m}{12}(l_0 - \Delta l)^2 = \frac{ml_0^2}{12} \left(1 - \frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 = \frac{ml_0^2}{12} \left(1 - 2\frac{\Delta l}{l_0} + \frac{\Delta l^2}{l_0^2}\right) = I_0 \left(1 - 2\frac{\Delta l}{l_0} + \frac{\Delta l^2}{l_0^2}\right) \approx I_0. \quad (2)$$

Таким образом, если деформации невелики, то в первом приближении модель можно аппроксимировать моделью с постоянным моментом инерции.

В данной работе движение многозвеного механизма рассматривается как задача

динамики механической системы. При этом используются уравнения динамики Лагранжа как для жестких стержней, но считая длину стержней функциями времени  $l = l(t)$ .

Зависимость  $l = l(t)$ , т.е. изменение параметров во время ходьбы нужно рассматривать как задачу параметрической идентификации [5].

Обычно задачу параметрической идентификации решают методом расширения пространства состояний, в рассматриваемом случае для  $n$ -звенного механизма считаем, что длины  $l_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) являются дополнительными степенями свободы, т.е. обобщенными координатами. Таким образом, имеем еще  $n$  обобщенных координат и записываем дифференциальные уравнения движения в виде уравнений Лагранжа второго. Изменение  $l(t)$  происходит под действием сил, работающих на растяжение – сжатие вдоль стержня заданным образом и в поле силы тяжести Земли, которое влияет только на перемещение центра масс. Считаем, что  $l(t) = l_0 + \Delta l(t)$  причем  $\frac{\Delta l}{l_0} \ll 1$ . При периоди-

ческой ходьбе длина  $\Delta l(t) = A \sin \omega t$ , или наоборот, если нагрузка меняется по закону  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ , то можно найти из полученных уравнений  $\Delta l(t)$ .

Таким образом, влияние движения стержня под действием силы тяжести пренебрежимо мало. Это значит, что уравнения для  $l(t)$  можно рассматривать независимо и найти или задать закон изменения  $l(t)$ , а затем подставить в основные уравнения и решать уравнения с периодически изменяющимися коэффициентами, отбрасывая малые члены.

Изменение длины звена может быть физически реализовано в реальной модели экзоскелета различными способами, например, моделью стержня постоянной длины и упругого элемента на конце или в виде телескопического звена.

Подобная модель стержня переменной длины рассмотрена в работе [6], в [7] рассматривается стержневая модель с упругими шарнирами.

### Трехмерные модели стержневых систем со звеньями переменной длины

Рассмотрим трехмерную модель механической системы с одним подвижным звеном переменной длины (рис. 3).

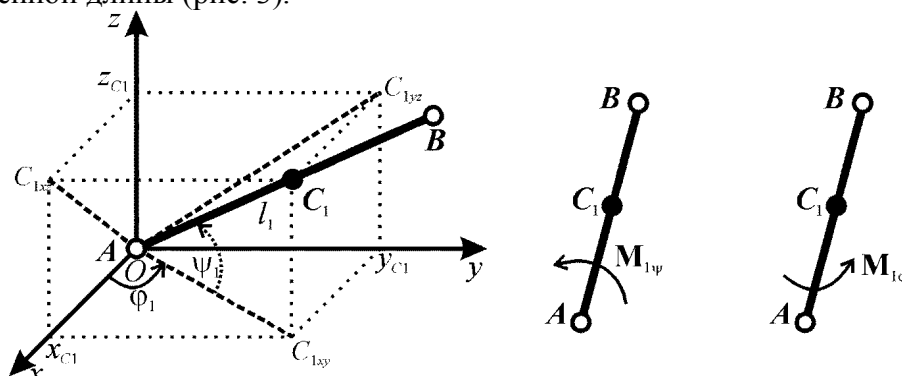


Рис. 3. Модель трехмерной механической системы типа экзоскелета с одним подвижным звеном переменной длины

Положение центра масс звена определяется двумя углами:  $\varphi_1$  – углом между осью  $Ox$  и проекцией звена  $AB$  на плоскость  $XOY$ , отсчитываемым от оси  $Ox$  против часовой стрелки;  $\psi_1$  – углом между звеном  $AB$  и его проекцией на плоскость  $XOY$ , отсчитываемым от проекции звена  $AB$  на плоскость  $XOY$  против часовой стрелки и изменением его длины  $l_1$ . Рассматриваемые углы считаем функциями времени:  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ ,  $\psi_1 = \psi_1(t)$ ,  $l_1 = l_1(t)$ . Следовательно, модель имеет три параметра, однозначно определяющих ее положение. Вращение происходит в жестко закрепленном шарнире  $O$ . Момент инерции звена относительно оси, проходящей через его центр масс, точку  $C_1$  перпендикулярно

плоскости движения равен  $I_1$ .

Координаты центра масс звена записываются так:

$$x_{C1} = l_1 n_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1, \quad y_{C1} = l_1 n_1 \cos \psi_1 \sin \varphi_1, \quad z_{C1} = l_1 n_1 \sin \psi_1. \quad (3)$$

Проекции скорости центра масс звеньев равны:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C1} &= \dot{l}_1 n_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1 l_1 n_1 \cos \psi_1 \sin \varphi_1 - \dot{\psi}_1 l_1 n_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_1, \\ \dot{y}_{C1} &= \dot{l}_1 n_1 \cos \psi_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 l_1 n_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1 - \dot{\psi}_1 l_1 n_1 \sin \psi_1 \sin \varphi_1, \\ \dot{z}_{C1} &= \dot{l}_1 n_1 \sin \psi_1 + \dot{\psi}_1 l_1 n_1 \cos \psi_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Квадрат скорости центра масс равен:

$$v_{C1}^2 = \dot{x}_{C1}^2 + \dot{y}_{C1}^2 + \dot{z}_{C1}^2 = \dot{l}_1^2 n_1^2 + l_1^2 n_1^2 \dot{\psi}_1^2 + l_1^2 n_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \psi_1. \quad (5)$$

Угловые скорости:

$$\omega_{\psi_1} = \dot{\psi}_1, \quad \omega_{\varphi_1} = \dot{\varphi}_1 \cos \psi_1. \quad (6)$$

Кинетическая энергия имеет вид:

$$T = [m_1 n_1^2 \dot{l}_1^2 + m_1 n_1^2 l_1^2 (\cos^2 \psi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) + I_1 (\cos^2 \psi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2)]/2 \quad (7)$$

Составляя уравнения аналогично двумерному случаю с использованием уравнений Лагранжа второго рода, получаем дифференциальные уравнения движения для экзоскелета с одним подвижным звеном переменной длины в трехмерном пространстве (8)-(10):

$$(I_1 + l_1^2 m_1 n_1^2) \cos^2 \psi_1 \ddot{\varphi}_1 + 2l_1 m_1 n_1^2 \cos^2 \psi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 - 2(I_1 + l_1^2 m_1 n_1^2) \cos \psi_1 \sin \psi_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1 = M_{1\varphi}, \quad (8)$$

$$(I_1 + l_1^2 m_1 n_1^2) \ddot{\psi}_1 + (I_1 + l_1^2 m_1 n_1^2) \cos \psi_1 \sin \psi_1 \dot{\varphi}_1^2 + 2l_1 m_1 n_1^2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + gl_1 m_1 n_1 \cos \psi_1 = M_{1\psi}, \quad (9)$$

$$m_1 n_1^2 \ddot{l}_1 - l_1 m_1 n_1^2 \cos^2 \psi_1 \dot{\varphi}_1^2 - l_1 m_1 n_1^2 \dot{\psi}_1^2 + gm_1 n_1 \sin \psi_1 = -k_1 \Delta l_1. \quad (10)$$

Общее решение системы уравнений движения зависит от 6 произвольных постоянных. Чтобы однозначно определить движение, требуется задать начальные условия (11).

$$\varphi_1|_{t=0} = \varphi_{10}; \quad \dot{\varphi}_1|_{t=0} = \dot{\varphi}_{10}; \quad \psi_1|_{t=0} = \psi_{10}; \quad \dot{\psi}_1|_{t=0} = \dot{\psi}_{10}; \quad l_1|_{t=0} = l_{10}; \quad \dot{l}_1|_{t=0} = \dot{l}_{10}; \quad (11)$$

Дифференциальные уравнения движения экзоскелета в трехмерном пространстве (8)-(10) отличаются от дифференциальных уравнений двумерного движения следующим: их количество увеличилось на одно уравнение, соответствующее обобщенной координате  $\psi_1$ , т.е. уравнений для угловых координат стало два; уравнение, описывающее изменение длины звена, изменилось незначительно. Дифференциальное уравнение (10) в сравнении с уравнением на плоскости содержит следующие отличия: в первом слагаемом возник множитель  $\cos^2 \psi_1$ , что связано с проекцией звена на плоскость, добавилось еще одно слагаемое  $-l_1 m_1 n_1^2 \dot{\psi}_1^2$ , учитывающее угловую скорость звена по второй обобщенной координате, причем его вид, с точностью до обозначения угла такой, как в двумерном уравнении. Это следует из того, что в двумерном случае, угол, связанный с вертикалью (плоскостью, в которой происходило движение центра масс) был обозначен через  $\varphi_1$ , а в трехмерной модели через  $\psi_1$ , отсюда следуют данные различия и наличие такого слагаемого. Угол  $\varphi_1$ , хоть и отсчитывается, как и прежде, от оси  $OX$ , но теперь учитывает повороты звена в пространстве по горизонтали (в плоскости  $XOY$ ). Соответственно, в слагаемом, содержащем ускорение свободного падения, угол  $\varphi_1$  изменяется на  $\psi_1$ . В остальном структура уравнения не изменяется.

Уравнение, описывающее изменение угловой координаты при плоском движении, распадается на два уравнения (8), (9). Слагаемое, содержащее ускорение свободного падения, теперь содержится в уравнении (9), описывающем изменение угла  $\psi_1$  и в соответствующем выражении угол  $\varphi$  заменяется на  $\psi_1$ . То же касается и углового ускорения  $\ddot{\psi}_1$ . В уравнении (9) также возникает дополнительное слагаемое  $-(I_1 +$

$l_1^2 m_1 n_1^2 \cos \psi_1 \sin \psi_1 \dot{\varphi}_1^2$ , связанное с угловой скоростью вращения звена в плоскости  $XOY$ . И заменяется момент инерции относительно соответствующей оси.

Уравнение (8) получается из уравнения движения на плоскости следующим образом: отсутствует слагаемое, содержащее ускорение свободного падения; в слагаемых, содержащих  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) добавляется множитель  $\cos \psi_i$ , что, связано проекцией звена на плоскость  $XOY$ ; возникает слагаемое  $-2(I_1 + l_1^2 m_1 n_1^2) \cos \psi_1 \sin \psi_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1$ , связанное с одновременным движением звена в двух плоскостях. В остальном уравнение сохраняет структуру двухмерного. И изменяются соответствующим образом управляющие моменты.

Рассмотрим модель экзоскелета с тремя подвижными звеньями переменной длины в пространстве (рис. 4).

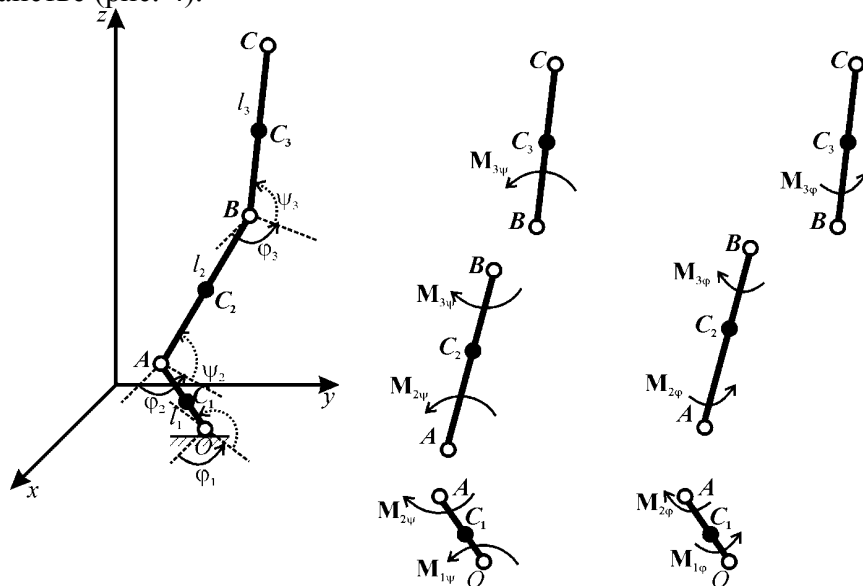


Рис. 4. Модель трехмерной механической системы типа экзоскелета с тремя подвижными звеньями переменной длины

Положения центров масс звеньев определяются тремя углами:  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), отсчитываемыми от оси  $Ox$  против часовой стрелки до проекции звена  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) на плоскость  $XOY$ ;  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), отсчитываемым от проекции звена  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) на плоскость  $XOY$  против часовой стрелки и изменением его длины  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Их считаем функциями времени:  $\varphi_i = \varphi_i(t)$ ,  $\psi_i = \psi_i(t)$ ,  $l_i = l_i(t)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Следовательно, модель имеет девять параметров, однозначно определяющих ее положение.

Координаты центра масс третьего звена записываются в виде:

$$\begin{aligned} x_{C3} &= l_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \psi_2 \cos \varphi_2 + l_3 n_3 \cos \psi_3 \cos \varphi_3, \\ y_{C3} &= l_1 \cos \psi_1 \sin \varphi_1 + l_2 \cos \psi_2 \sin \varphi_2 + l_3 n_3 \cos \psi_3 \sin \varphi_3, \\ z_{C3} &= l_1 \sin \psi_1 + l_2 \sin \psi_2 + l_3 n_3 \sin \psi_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Составляя дифференциальные уравнения движения механической системы аналогично двумерному случаю с использованием уравнений Лагранжа второго рода, получаем дифференциальные уравнения движения для экзоскелета с тремя подвижными звеньями переменной длины в трехмерном пространстве, которые здесь не приводятся ввиду громоздкости.

В результате записаны дифференциальные уравнения движения для экзоскелета с тремя деформируемыми звеньями переменной длины в трехмерном пространстве.

### Матричная форма записи дифференциальных уравнений движения

Анализируя уравнения движения стержневых механических систем в трехмерном пространстве, видно, что они представляют собой систему нелинейных дифференци-

альных уравнений вектора угловых переменных, которые можно записать в векторно-матричной форме. Нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты.

Уравнение, описывающее изменение угла  $\varphi$ :

$$A_\varphi(\varphi, \psi, l) \ddot{\varphi} + B_\varphi(\varphi, \psi, l) \ddot{\psi} + C_\varphi(\varphi, \psi, l) \ddot{l} + D_\varphi(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi}^2 + E_\varphi(\varphi, \psi, l) \dot{\psi}^2 + 2F_\varphi(\varphi, \psi, l) (\dot{\varphi}) + 2G_\varphi(\varphi, \psi, l) (\dot{\psi} \dot{\varphi}) + 2H_\varphi(\varphi, \psi, l) (\dot{l} \dot{\varphi}) = M_\varphi(\varphi, \psi, l). \quad (13)$$

Уравнение, описывающие изменение угла  $\psi$ :

$$A_\psi(\varphi, \psi, l) \ddot{\psi} + B_\psi(\varphi, \psi, l) \ddot{\varphi} + C_\psi(\varphi, \psi, l) \ddot{l} + D_\psi(\varphi, \psi, l) \dot{\psi}^2 + E_\psi(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi}^2 + 2F_\psi(\varphi, \psi, l) (\dot{\psi}) + 2G_\psi(\varphi, \psi, l) (\dot{\varphi} \dot{\psi}) + 2H_\psi(\varphi, \psi, l) (\dot{l} \dot{\psi}) + gK_\psi(\psi)l = M_\psi(\varphi, \psi, l). \quad (14)$$

Уравнение, описывающие изменение длины звена:

$$A_l(\varphi, \psi, l) \ddot{l} + B_l(\varphi, \psi, l) \ddot{\varphi} + C_l(\varphi, \psi, l) \ddot{\psi} + D_l(\varphi, \psi, l) \dot{l}^2 + E_l(\varphi, \psi, l) \dot{\varphi}^2 + 2F_l(\varphi, \psi, l) (\dot{l}) + 2G_l(\varphi, \psi, l) (\dot{\varphi} \dot{l}) + 2H_l(\varphi, \psi, l) (\dot{\psi} \dot{l}) + gK_l(\psi) = S_l(k, l), \quad (15)$$

где  $\varphi, \psi$  – угловые обобщенные координаты центра масс  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ ,  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ ;  $l$  – обобщенные координаты, связанные с изменениями длин звеньев  $l = (l_1, \dots, l_n)^T$ ;  $A(\varphi, \psi, l)$ ,  $B(\varphi, \psi, l)$ ,  $D(\varphi, \psi, l)$ ,  $E(\varphi, \psi, l)$ ,  $G(\varphi, \psi, l)$  – матрицы, учитывающие инерционные свойства;  $C(\varphi, \psi, l)$ ,  $F(\varphi, \psi, l)$ ,  $H(\varphi, \psi, l)$  – матрицы, учитывающие переменность длины звеньев;  $K(\psi)$  – матрицы, определяемые моментами силы тяжести;  $M(\varphi, \psi, l)$  – матрица-столбец обобщенных сил, т.е. управляющих моментов;  $S(k, l)$  – матрица-столбец учитывающая упругие свойства материала звеньев,  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{\psi}$  – матрицы обобщенных ускорений;  $\dot{\varphi}^2$ ,  $\dot{\psi}^2$  – матрицы квадратов обобщенных скоростей,  $(\dot{\varphi}) = (\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n)^T$ ,  $(\dot{\psi}) = (\dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_n)^T$ ,  $(\dot{\varphi} \dot{\psi}) = (\dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n \dot{\psi}_n)^T$  – матрицы, составленные из произведений  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\varphi} \dot{\psi}$ .

Реальное максимальное количество звеньев, из которого может быть составлен экзоскелет, ограничено только вычислительными мощностями, т.к. из-за геометрии системы сложность уравнений возрастает нелинейно, это видно по матрицам, соответствующим уравнениям для однозвенной, двухзвенной и трехзвенной механических систем с деформируемыми звеньями в трехмерном пространстве.

### Обобщения матриц уравнений для трехмерных моделей стержневых систем типа эндо- и экзоскелета со звеньями переменной длины

Обобщим по индукции полученные матрицы для произвольной  $n$ -звенной трехмерной системы подобного вида.

Рассмотрим уравнение (13). Заметим, что матрица  $A_\varphi(\varphi, \psi, l)$ , является симметрической, поэтому достаточно привести только диагональные элементы и наддиагональные, т.е., если  $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца, то  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , при этом  $j \geq i$ , остальные поддиагональные элементы получаются равными соответствующим симметричным относительно главной диагонали наддиагональным элементам.

Для матрицы  $A_\varphi(\varphi, \psi, l)$ :

$$a^{\varphi}_{ij} = [\delta_{ij} I_i + l_i l_j \left( m_j n_j \tilde{\delta} n_i + \sum_{k=i+1}^n m_k \right)] \cos(\varphi_i - \varphi_j) \cos \psi_i \cos \psi_j, \quad (16)$$

где:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ ,  $\tilde{\delta}n_i = \begin{cases} n_j, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$ .

Аналогично строятся все остальные матрицы.

После этого умножаем каждую записанную матрицу на соответствующий ей вектор. В результате получаем дифференциальные уравнения движения экзоскелета с заданным количеством подвижных звеньев переменной длины.

Предложенный новый метод построения уравнений сводится к записи матриц по имеющимся формулам, а затем умножению матриц на соответствующие векторы из уравнений (13)-(15). Это существенно упрощает процедуру получения дифференциальных уравнений движения экзоскелета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Borisov A.V. Twelve-Link Exoskeleton with Biological Endoskeleton Properties / A.V. Borisov, L. V. Konchina, A. V. Chigarev // *Journal of Machinery Manufacturing and Automation*. – Sept. 2015, Vol. 4 Iss. 3, PP. 23-37. Режим доступа: <http://www.academicpub.org/jmma/paperInfo.aspx?PaperID=16611>
2. Чигарев А. В. Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник – Минск, БНТУ. – 2015. – Вып. 30. – С. 70-81.*
3. *Basic biomechanics of the musculoskeletal system* / [edited by] Margareta Nordin, Victor H. Frankel. – 3<sup>rd</sup> ed. – Lippincott Williams & Wilkins, 2001. – P. 182.
4. Eduardo Piña-Martínez, Ernesto Rodríguez-Leal "Inverse Modeling of Human Knee Joint Based on Geometry and Vision Systems for Exoskeleton Applications" *Mathematical Problems in Engineering Volume 2015 (2015), Article ID 145734, 14 pages* <http://dx.doi.org/10.1155/2015/145734>, Режим доступа: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2015/145734/>
5. *Справочник по теории автоматического регулирования под ред. Красовского А.А., М., Наука, 1987.*
6. *Движение твердого тела, управляемое шестью стержнями переменной длины/ Г.А. Леонов, С. А. Зегжда, Н. В. Кузнецов, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик, М. П. Юшков // Доклады Академии Наук, 2014, том 455, № 3, с. 282–286.*
7. Андреев А. С., Перегудова О. А. Об управлении двухзвенным манипулятором с упругими шарнирами / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // *Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 267–277.*

E-mail: [chigarev@rambler.ru](mailto:chigarev@rambler.ru)  
[borisowandrej@yandex.ru](mailto:borisowandrej@yandex.ru)

Поступила в редакцию 21.10.2016