УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ, ПОЛЗУЧЕСТИ И ОБЛУЧЕНИИ НЕЙТРОННЫМ ПОТОКОМ

д.ф.-м.н. [1] **Куликов И.С.**, к.ф.-м.н. [2] **Ширвель П.И.**

[1]*Смоленский государственный университет, РФ*
[2]*Белорусский национальный технический университет, Минск*

В настоящее время интенсивность разработок в области ядерной энергетики несколько снизилась, если судить по объему публикаций в этой области. Тем не менее, по-прежнему данное научное направление остается достаточно актуальным. В частности, газоохлаждаемые ядерные реакторы на быстрых нейтронах рассматриваются как альтернатива быстрым реакторам, охлаждаемым жидким натрием. Однако газоохлаждаемые быстрые реакторы имеют свою специфику с точки зрения работоспособности тепловыделяющих элементов (твэлов), являющихся основой любого ядерного реактора. В отличие от натриевых быстрых реакторов, давление теплоносителя которого на оболочку твэла составляет не более 0.1 МПа, в то время как оболочка твэла газоохлаждаемого быстрого реактора испытывает внешнее давление теплоносителя 16-20 МПа и большие градиенты температуры по радиусу и периметру. Этот фактор обязывает для оценки работоспособности твэлов газоохлаждаемых ядерных реакторов рассматривать вопрос устойчивости их оболочек, поскольку в результате потери устойчивости и посадки оболочки на топливный стержень образуется гофр. Последний является концентратором напряжений и может привести к быстрому разрушению оболочки. Подчеркнем, что с позиций безопасного функционирования ядерного реактора такой вариант должен быть полностью исключен.

Следует отметить, что задача устойчивости нагретых конструкций в условиях ползучести значительно осложняется тем, что до настоящего времени нет однозначного и хорошо подтвержденного экспериментами критерия устойчивости, не говоря уже о критерии устойчивости в реакторных условиях. Частично данная проблема рассматривалась в научных трудах [1-5]. Пожалуй, последний и самый обстоятельный обзор по устойчивости в условиях ползучести сделан Л.М. Куршиным в работе [6].

В любом случае, при расчете на устойчивость оболочек в условиях ядерных реакторов, учитывая уровень температур оболочек твэлов (900-1100 К) и облучение потоком элементарных частиц (нейтронное облучение), необходимо принимать во внимание тепловую и радиационную ползучесть и неравномерное радиационное распухание материала оболочки, которые вызывают напряжения в дополнение к термическим напряжениям [4].

В целом задача устойчивости оболочечных конструктивных элементов активных зон ядерных реакторов, в особенности реакторов на быстрых нейтронах, является как геометрически нелинейной (большие перемещения и деформации), так и нелинейной физически (нелинейная связь напряжений и деформаций при ползучести). Уравнения, описывающие состояние оболочек с учетом вышеназванных факторов и возможной потери устойчивости в случае учета геометрической и физической нелинейности будут иметь вид [4,6,7]. При этом необходимо также учитывать начальные неправильности оболочек. Например, для круговой цилиндрической оболочки это будут как искривления вдоль образующей, так и в окружном направлении. В общем случае будем считать начальные прогибы $w_0(x,y)$ малыми (*x,y* – координаты точек оболочки вдоль ее линий кривизны) по сравнению с основными размерами оболочки (вдоль *x,y*), но сопоставимыми с ее толщиной (2*h*) по направлению осевой координаты *z*.

Тогда уравнения типа Кармана для оболочек, находящихся в условиях ползучести, неравномерного нагрева и нейтронного облучения будут иметь вид [4]:

$$
\begin{gathered}
D\nabla^2\nabla^2 w = q(x,y) + 2h\left[L(F,w)+\nabla_k^2 F\right] - \left(\frac{\partial^2 M_x^n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^n}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y^n}{\partial y^2}\right);\\
\nabla^2\nabla^2 F = -\frac{1}{2}E\left[L(w,w)+\nabla_k^2 w\right] - \frac{1}{2h}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N_y^n - \mu N_x^n\right) + \\
+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(N_x^n - \mu N_y^n\right) - 2(1+\mu)\frac{\partial^2 N_{xy}^n}{\partial x\partial y}\Big),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где F – функция внутренних усилий в оболочке:

$N_x = 2h\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $N_y = 2h\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $N_{xy} = -2h\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$; здесь *x,y* – соответственно продольная и окружная координата; $2h$ – толщина оболочки; w – искомая функция прогиба; $D = \dfrac{2}{3}\dfrac{Eh^3}{1-\mu^2}$ – цилиндрическая жесткость; $q(x,y)$ – поперечная нагрузка, действующая нормально к срединной поверхности; дифференциальные операторы имеют вид:

$$
\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};\ \nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};\ L(w,w) = 2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right];
$$

$\nabla_k^2 = k_x\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + k_y\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $k_x = const,\ k_y = const$ – начальные кривизны оболочки вдоль оси Ox и Oy соответственно, E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона.

В предположении $E = const,\ \ \mu = const$:

$$
\begin{gathered}
N_x^n = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h}^{h}\left(\varepsilon_x^n + \mu\varepsilon_y^n\right)dz,\ N_y^n = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h}^{h}\left(\varepsilon_y^n + \mu\varepsilon_x^n\right)dz,\\
N_{xy}^n = \frac{E}{1+\mu}\int_{-h}^{h}\varepsilon_{xy}^n dz,\ M_x^n = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h}^{h}\left(\varepsilon_x^n + \mu\varepsilon_y^n\right)zdz,\\
M_y^n = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h}^{h}\left(\varepsilon_y^n + \mu\varepsilon_x^n\right)zdz,\ M_{xy}^n = \frac{E}{1+\mu}\int_{-h}^{h}\varepsilon_{xy}^n zdz,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $-h \le z \le h,\ \varepsilon_x^n, \varepsilon_y^n, \varepsilon_{xy}^n$ – суммарные неупругие деформации: деформации термического расширения, радиационного распухания и ползучести:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x^n = \alpha T + \frac{1}{3}S + \varepsilon_x^c,\\
&\varepsilon_y^n = \alpha T + \frac{1}{3}S + \varepsilon_y^c,\\
&\varepsilon_{xy}^n = \varepsilon_{xy}^c,
\end{aligned} \tag{3}
$$

здесь α – коэффициент линейного термического расширения, S – радиационное распухание, ε_x^c, ε_y^c, ε_{xy}^c – деформации ползучести. В общем случае в выражении (3) может быть учтена мгновенная пластическая деформация [4], полагая, что материал оболочки достаточно пластичен (учитывая относительную тонкостенность оболочки, в таком случае можно считать началом потери устойчивости время при котором интенсивность напряжений в наиболее нагруженном сечении достигает предела текучести).

Для случая, когда упругие постоянные зависят от температуры и облучения, можно переписать выражения (2) в общем виде:

$$
\begin{aligned}
&N_{11n} = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{-h}^{h} E(T,\phi t)\left(\varepsilon_{11}^n + \mu\varepsilon_{22}^n\right)dx_3, && M_{11n} = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{-h}^{h} E(T,\phi t)\left(\varepsilon_{11}^n + \mu\varepsilon_{22}^n\right)x_3 dx_3,\\
&N_{22n} = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{-h}^{h} E(T,\phi t)\left(\varepsilon_{22}^n + \mu\varepsilon_{11}^n\right)dx_3, && M_{22n} = \frac{1}{1-\mu^2}\int_{-h}^{h} E(T,\phi t)\left(\varepsilon_{22}^n + \mu\varepsilon_{11}^n\right)x_3 dx_3,\\
&N_{12n} = \frac{1}{1+\mu}\int_{-h}^{h} E(T,\phi t)\varepsilon_{12}^n dx_3, && M_{12n} = \frac{1}{1+\mu}\int_{-h}^{h} E(T,\phi t)\varepsilon_{12}^n x_3 dx_3.
\end{aligned}
$$

Здесь ε_{ij}^n – суммарная неупругая деформация $\varepsilon_{ij}^n = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}^{th} + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^c$, $i,j = 1,2$, δ_{ij} – символ Кронекера, T – температура, ϕ – плотность потока элементарных частиц, t – параметр времени. Рассматривается система координат (x_1, x_2, x_3).

При наличии начальных неправильностей формы $w_0(x,y)$, а они и являются возмущающим фактором с точки зрения потери устойчивости, система уравнений (1) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&D\nabla^2\nabla^2\left(w - w_0\right) = q(x,y) + 2h\left[L(F,w) + \nabla_k^2 F\right] -\\
&-\left(\frac{\partial^2 M_x^n}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^n}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^n}{\partial y^2}\right);\\
&\nabla^2\nabla^2 F = -\frac{1}{2}E\left[L\left(w,w\right) - L\left(w_0,w_0\right) + \nabla_k^2\left(w - w_0\right)\right] - \frac{1}{2h}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N_y^n - \mu N_x^n\right) +\right.\\
&\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(N_x^n - \mu N_y^n\right) - 2(1+\mu)\frac{\partial^2 N_{xy}^n}{\partial x \partial y}\right].
\end{aligned} \tag{4}
$$

При этом оператор L задается по общей формуле

$$
L(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2}.
$$

Для круговой цилиндрической оболочки: $k_x = 0,\ k_y = \dfrac{1}{R}$, где R – радиус цилиндрической оболочки, имеем

$$\begin{gathered}
D\nabla^2\nabla^2\left(w-w_0\right)=q(x,y)+2h\left[L(F,w)+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]-\\
-\left(\frac{\partial^2 M_x^n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^n}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y^n}{\partial y^2}\right);\\
\nabla^2\nabla^2 F=-\frac{1}{2}E\left[L\left(w,w\right)-L\left(w_0,w_0\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\left(w-w_0\right)}{\partial x^2}\right]-\\
-\frac{1}{2h}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N_y^n-\mu N_x^n\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(N_x^n-\mu N_y^n\right)-2(1+\mu)\frac{\partial^2 N_{xy}^n}{\partial x\partial y}].
\end{gathered} \tag{5}$$

$$L(w,F)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

Для сферической оболочки $\left(k_x = k_y = \dfrac{1}{R}\right)$:

$$\begin{gathered}
D\nabla^2\nabla^2\left(w-w_0\right)=q(x,y)+2h\left[L(F,w)+\frac{1}{R}\nabla^2 F\right]-\left(\frac{\partial^2 M_x^n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^n}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y^n}{\partial y^2}\right);\\
\nabla^2\nabla^2 F=-\frac{1}{2}E\left[L\left(w,w\right)-L\left(w_0,w_0\right)+\frac{1}{R}\nabla^2\left(w-w_0\right)\right]-\frac{1}{2h}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N_y^n-\mu N_x^n\right)+\\
+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(N_x^n-\mu N_y^n\right)-2(1+\mu)\frac{\partial^2 N_{xy}^n}{\partial x\partial y}].
\end{gathered} \tag{6}$$

Граничные условия в данном варианте будут иметь вид [8]

Для $x = const$

1. Задан угол поворота нормали вокруг линии y или приложим изгибающий момент:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^0 \text{ или } M_x = M_x^{\ 0} \tag{7}$$

При $M_x^{\ 0} = 0$ второе из условий (7) переходит в равенство (8):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0. \tag{8}$$

Если край $x = const$ остается прямолинейным, условие (8) упрощается:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \tag{9}$$

2. Заданы нормальные перемещения точек контура:

$$w = w_0 \tag{10}$$

3. Задано перемещение точек контура срединной поверхности в направлении x или внешнее нормальное усилие:

$$u = u^0 \text{ или } N_x = N_x^{\ 0} \tag{11}$$

4. Заданными являются перемещения точек контура срединной поверхности вдоль линии y или внешнее касательное усилие:

$$v = v^0 \text{ или } N_{xy} = N_{xy}{}^0 \tag{12}$$

Аналогично записываются граничные условия для края $y = const$.

Заметим, что при численном решении задачи силовые граничные условия могут быть конвертированы через известные соотношения в кинематические.

В дальнейшем, переходя к полярным координатам r, θ,

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{13}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2};\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2};\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \tag{14}$$

получаем задачу определения неосесимметричного напряженно-деформированного состояния цилиндрического твердого тела [10]. При учете неосесимметричного деформирования операторы $L(F, w)$ и $\nabla^2 w$ принимаются в виде:

$$\begin{gathered} L(w,F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right), \\ \Delta w = \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \end{gathered} \tag{15}$$

Считая, что функции w и F не зависят от θ, в первом приближении, можно представить билинейный оператор типа $L(F, w)$ и оператор Лапласа в осесимметричной формулировке. Формулы для определения в осесимметричных задачах нормальных и касательных напряжений через функцию F легко получить через неосесимметричные выражения (14).

Для интегрирования перечисленных уравнений используем метод конечных разностей. Предлагаемая схема решения, полностью аналогична, той, которая предлагалась в [8] для решения нестационарных уравнений в случае осесимметричной цилиндрической оболочки. Отличие состоит в том, что теперь определяющие зависимости являются квазистатическими и двумерными, а разностные уравнения приобретают более сложную структуру. Подробное изложение численного метода можно найти в специальном руководстве, например, в [9]. Алгоритм численного решения задачи, основан на использовании метода конечных разностей для решения системы уравнений равновесия в перемещениях и шаговом методе по времени для определения неупругих деформаций. Апробация предлагаемого численного подхода для определения квазистатического неосесимметричного напряженно-деформированного состояния длинных цилиндрических тел представлена в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Локощенко А. М., Шестериков С. А. Методика расчета на сплющивание цилиндричесих оболочек в условиях ползучести // Сб. Деформир. и разруш тверд тел. — Изд-во МГУ Москва, 1973. — С. 10–14.*
2. *Лихачев Ю. И., Попов В. В. К устойчивости оболочек цилиндрических твэлов с начальной эллипсностью, Атомная энергия, 1972. т. 32, вып. I. -с. 3-9.*
3. *Куликов И.С., Тверковкин Б.Е. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / Под ред. В.Б. Нестеренко. Мн.: Наука и техника. 1984. - 104с.*
4. *Прочность элементов конструкций при облучении / И. С. Куликов, В. Б. Нестеренко, Б. Е. Тверковкин; АН БССР, Ин-т ядер. энергетики. - Минск : Навука і тэхніка, 1990. - 143,[1] с. : ил.; 20 см.; ISBN 5-343-00557-8*
5. *Куликов, И.С. Устойчивость короткой цилиндрической оболочки в условиях ползучести, неравномерного нагрева и облучения/ И.С. Куликов// Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 2(15). – С.59-61.*
6. *Куршин Л.М: О постановках задачи; устойчивости: в. условиях ползучести (обзор) // Механика. Проблемы теории пластичности и ползучести. — М.: Мир, 1979. — В.18 —1. С. 246-302.*
7. *Огибалов, П.М. Термоустойчивость пластин и оболочек / П.М. Огибалов, В.Ф. Грибанов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. 520 с.: ил.*
8. *Вольмир, А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа : Задачи аэроупругости / А. С. Вольмир. - М. : Наука, 1976. - 416 с.*
9. *Яненко Н.Н. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.*
10. *Ширвель, П.И. Модель расчета неосесимметричного напряженно-деформированного состояния облучаемых тел цилиндрической геометрии в условиях пластичности и ползучести / П.И. Ширвель, И.С. Куликов // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-тэхн. навук. – 2012. – № 4. – С. 51–62.*
11. *Ширвель П.И. Прочность неравномерно нагретых цилиндрических тел в условиях ползучести и радиационного облучения / П.И. Ширвель, А.В. Чигарев, И.С. Куликов.– Минск: БНТУ, 2014. – 252 с.*

E-mail: iskulikov@yandex.ru
pavel.shirvel@bntu.by

Поступила в редакцию 12.09.2016