УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ НАГРЕВЕ И НЕЙТРОННОМ ОБЛУЧЕНИИ

к.т.н. **Хвисевич В.М.,** доц. **Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В.**

УО «Брестский государственный технический университет»

Воздействие температурного поля при одновременном интенсивном облучении высокоэнергетическими частицами приводит к появлению значительных напряжений, которые могут привести к разрушению нагруженного тела. Это требует разработки новых методов расчета конструктивных элементов различной геометрии, подверженных воздействию одновременной терморадиационной и механической нагрузки.

Рассмотрим сплошной короткий однородный цилиндр радиусом R и высотой H, который подвергается воздействию радиационного облучения, температурной нагрузки и внешнего давления (рис. 1).

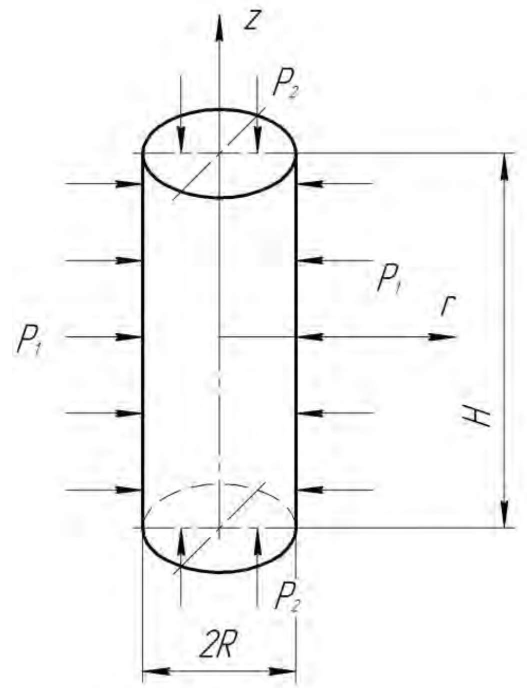


Рис. 1. Расчетная схема короткого цилиндра

В связи со спецификой заданных нагрузок и с учетом физической и геометрической симметрии напряженно-деформированного состояния (НДС) короткого цилиндра можно оценить, реализовав осесимметричную задачу теории упругости с учетом теплового и радиационного воздействия. Задача рассматривается в несвязанной постановке.

Дифференциальные уравнения (ДУ) равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0, \end{cases}, \tag{1}$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ - радиальное, окружное и осевое напряжение, r – переменный радиус.

Граничные условия задачи:

$$\text{при r = 0: } u_r = 0,\ \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \qquad \text{при r = R: } \sigma_r = -P_1,\ \tau_{rz} = 0,$$

$$\text{при z = 0: } u_z = 0,\ \tau_{rz} = 0, \qquad \text{при z = H: } \sigma_z = -P_2,\ \tau_{rz} = 0, \tag{2}$$

где P_1, P_2 – внешнее давление на боковой и торцевой поверхности соответственно.

Эмпирическая функция радиационного распухания, являющаяся функцией времени и температуры, принимается согласно [1]:

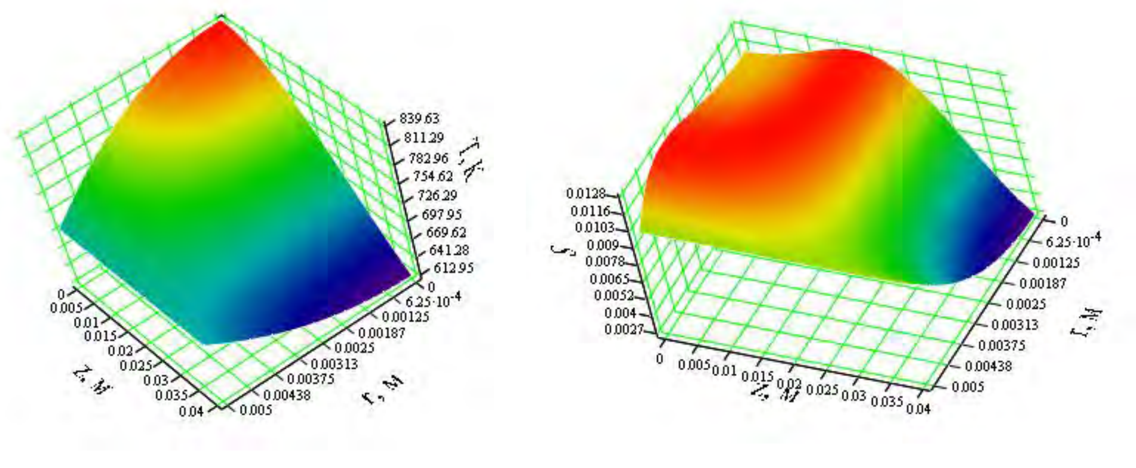
$$S\left(T(r),t\right) = 4,9\cdot 10^{-51}\cdot(\Phi\cdot t)^{1,71}\cdot 10^{\frac{15490}{T}-\frac{5,98\cdot 10^6}{T^2}}, \tag{3}$$

где t – время, Ф – нейтронный поток, T – температурное поле как функция координаты r:

$$T(r,z) = T_S + \frac{q_v}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right), \tag{4}$$

T_S - температура на наружной поверхности, q_v - объемное тепловыделение, являющееся функцией координаты z, λ - коэффициент теплопроводности материала, $q_v = \overline{q}_v \cdot K_z \cdot \cos\left(\frac{\pi H}{H+2H_0}\cdot\frac{z}{H}\right)$, где $\overline{q}_v = 2,234\cdot 10^8 \frac{Bm}{м\cdot град}$ - внутренний объемный источник тепловыделения, $T_S = 700^0 C$.

Материал стержня – аустенитная нержавеющая сталь ОХ16Н15М3Б [1]. Для проведения расчетов принимаем: $K_z = 1,2$, $\Phi = 2,81\cdot 10^{19}$ нейтр./(см^2·ч), $\alpha = 16\cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$, $\nu = 0,3$, $E = 1,5\cdot 10^{11}$ Па, $\lambda = 12$ Вт/ (м·град). Размеры цилиндра: H = 40 мм, R = 5 мм. Поверхности температурного поля и радиационного распухания для момента времени 1000 ч приведены на рис. 2.



T S

а) б)

Рис. 2. Поверхности температуры (а) и радиационного распухания (б) для стали ОХ16Н15М3Б в момент времени 1000 часов

Уравнения обобщенного закона Гука при механическом, температурном и радиационном нагружении:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right) + \alpha\cdot T\left(r,z\right) + \frac{S\left(r,z\right)}{3},\\
&\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right) + \alpha\cdot T\left(r,z\right) + \frac{S\left(r,z\right)}{3},\\
&\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_r\right)\right) + \alpha\cdot T\left(r,z\right) + \frac{S\left(r,z\right)}{3},\\
&\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G},
\end{aligned} \tag{5}$$

где α – коэффициент линейного расширения материала, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига.

Геометрические соотношения Коши, связывающие перемещения и деформации, следующие:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{6}$$

Выразив компоненты напряжений рассматриваемой задачи через перемещения u_r, u_z, и решая совместно (5) и (6), получены выражения для напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_r = E\cdot\Bigg[&\frac{1-\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)}\frac{u_r}{r} -\\
&-\frac{1}{1-2\nu}\left(\alpha\cdot T\left(r,z\right) + \frac{S\left(r,z\right)}{3}\right)\Bigg],\\
\sigma_\theta = E\cdot\Bigg[&\frac{\nu}{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1-\nu}{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)}\frac{u_r}{r} -\\
&-\frac{1}{1-2\nu}\left(\alpha\cdot T\left(r,z\right) + \frac{S\left(r,z\right)}{3}\right)\Bigg],\\
\sigma_z = E\Bigg[&\frac{\left(1-\nu\right)}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\frac{u_r}{r} -\\
&-\frac{1}{1-2\nu}\left(\alpha\cdot T\left(r,z\right) + \frac{S\left(r,z\right)}{3}\right)\Bigg],\\
\tau_{rz} = &\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

С учетом этих выражений ДУ равновесия (1) запишем в виде системы уравнений второго порядка в перемещениях:

$$
\begin{gathered}
\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{\nu}{2(1-2\nu)(1+\nu)}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}-\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\\
-\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{1}{1-2\nu}\alpha\cdot\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial S}{\partial r}=0,\\
\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial r}+\frac{\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\\
+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}-\frac{1}{(1-2\nu)}\alpha\cdot\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{1}{(1-2\nu)}\cdot\frac{1}{3}\frac{\partial S}{\partial z}=0.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Решение такой системы ДУ второго порядка в частных производных возможно только численным путем. Для ее решения воспользуемся методом конечных разностей (МКР), который позволяет перейти от систем ДУ к их аналогам – системе алгебраических уравнений с неизвестными значениями перемещений u_r, u_z в контурных и внутриконтурных точках, применив пошаговое разбиение по времени и составив конечно-разностные уравнения для каждого из временных шагов (рис. 3).

Тогда система конечно-разностных аналогов уравнений (8) для внутренних точек области примет вид:

$$
\begin{cases}
\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{u_{r(i+1,j)}-2u_{r(i,j)}+u_{r(i-1,j)}}{(\Delta r)^2}+\\
+\frac{1}{2\cdot(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}\cdot\frac{u_{z(i+1,j+1)}-u_{z(i-1,j+1)}-u_{z(i+1,j-1)}+u_{z(i-1,j-1)}}{4\cdot\Delta z\cdot\Delta r}+\\
+\frac{1-\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}\cdot\frac{1}{r_i}\cdot\frac{u_{r(i+1,j)}-u_{r(i-1,j)}}{2\Delta r}+\frac{1}{2\cdot(1+\nu)}\cdot\frac{u_{z(i,j+1)}-2u_{z(i,j)}+u_{r(i,j-1)}}{(\Delta z)^2}-\\
-\frac{1}{1+\nu}\frac{u_{r(i,j)}}{r_i^2}=\alpha\cdot\frac{1}{1-2\nu}\frac{T_{(i+1,j)}-T_{(i-1,j)}}{2\cdot\Delta r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2\nu}\frac{S_{(i+1,j)}-S_{(i-1,j)}}{2\cdot\Delta r},\\
\frac{1-\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}\cdot\frac{u_{z(i+1,j)}-2u_{z(i,j)}+u_{z(i-1,j)}}{(\Delta z)^2}+\\
+\frac{\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{u_{r(i+1,j+1)}-u_{r(i-1,j+1)}-u_{r(i+1,j-1)}+u_{r(i-1,j-1)}}{4\cdot\Delta z\cdot\Delta r}+\\
+\frac{\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}\cdot\frac{1}{r_i}\cdot\frac{u_{r(i,j+1)}-u_{r(i,j-1)}}{2\Delta z}+\\
+\frac{1}{2\cdot(1+\nu)}\cdot\frac{u_{z(i+1,j)}-2u_{z(i,j)}+u_{z(i-1,j)}}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{2(1+\nu)}\cdot\frac{1}{r_i}\cdot\frac{u_{z(i+1,j)}-u_{z(i-1,j)}}{2\Delta r}=\\
=\alpha\cdot\frac{1}{(1-2\nu)}\frac{T_{(i,j+1)}-T_{(i,j-1)}}{2\cdot\Delta z}+\frac{1}{3}\frac{1}{(1-2\nu)}\cdot\frac{S_{(i,j+1)}-S_{(i,j-1)}}{2\cdot\Delta z}.
\end{cases}
\tag{9}
$$

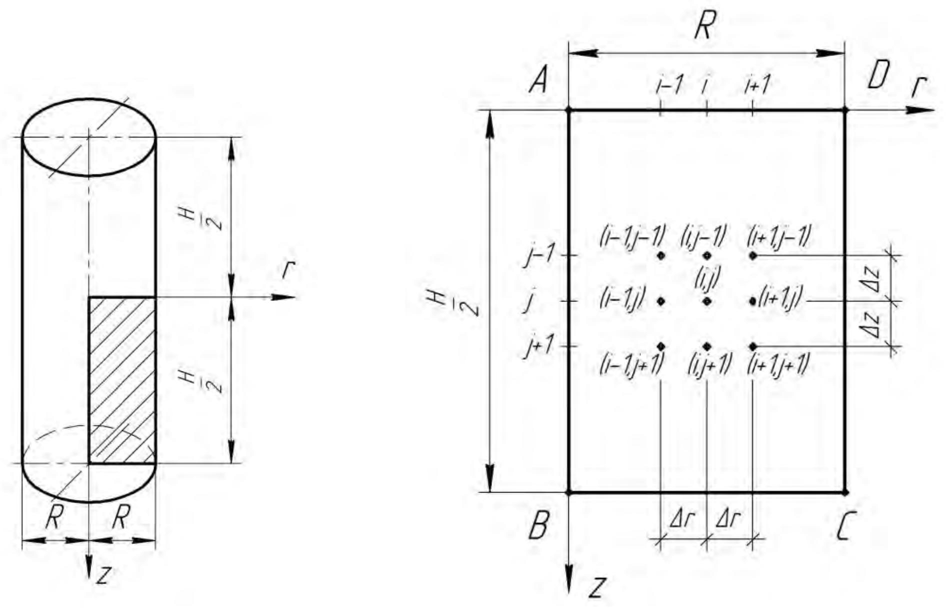


Рис. 3. Координатная сетка для построения конечно-разностных уравнений

Запишем граничные условия для контурных точек области в конечных разностях:

при r = 0 (сторона AB): $u_{r(1,j)} = 0, \qquad \dfrac{u_{z(2,j)} - u_{z(1,j)}}{2 \cdot \Delta r} = 0,$

при z = 0 (сторона AD):

$$u_{z(i,1)} = 0, \qquad \frac{u_{r(i,2)} - u_{r(i,1)}}{\Delta z} + \frac{u_{z(i+1,1)} - u_{z(i-1,1)}}{2\Delta r} = 0,$$

при r = R (сторона CD):

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{r(n,j+1)} - u_{r(n,j-1)}}{\Delta z} + \frac{u_{z(n,j)} - u_{z(n-1,j)}}{\Delta r} = 0,\\
&\frac{1-\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \cdot \frac{u_{r(n,j)} - u_{r(n-1,j)}}{\Delta r} +\\
&+\frac{\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \cdot \frac{u_{z(n,j+1)} - u_{z(n,j-1)}}{2\Delta z} +\\
&+\frac{\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \cdot \frac{u_{r(n,j)}}{r_n} = -\frac{P_1}{E} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \left(\alpha \cdot T_{(n,j)} + \frac{S_{(n,j)}}{3}\right),
\end{aligned} \tag{10}$$

при z = H/2 (сторона BC):

$$\frac{u_{r(i,m)} - u_{r(i,m-1)}}{\Delta z} + \frac{u_{z(i+1,m)} - u_{z(i-1,m)}}{2\Delta r} = 0,$$

$$E \cdot \frac{1-\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \cdot \frac{u_{z(i,m)} - u_{z(i,m-1)}}{\Delta z} + E \cdot \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{u_{r(i+1,m)} - u_{r(i-1,m)}}{2\Delta r} +$$

$$+E \cdot \frac{\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)} \cdot \frac{u_{r(i,m)}}{r_i} = -P_2 + E \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \left(\alpha \cdot T_{(i,m)} + \frac{S_{(i,m)}}{3}\right).$$

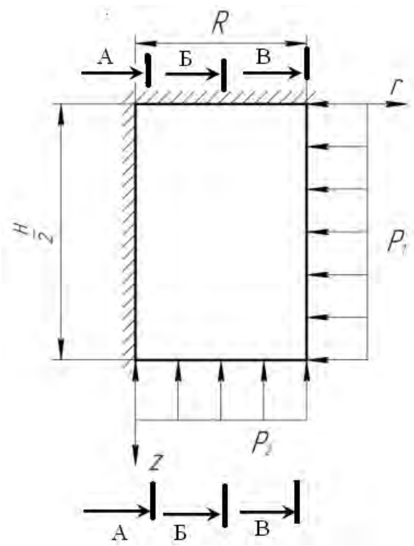


Рис. 4. Расчетная схема для определения граничных условий

Получены выражения осевых и радиальных перемещений для контурных точек области в конечных разностях с использованием граничных условий. Расчет контурных значений неизвестных перемещений проводится через контурные и внутриконтурные точки, что позволило снизить объем вычислительных операций и шаг сетки.

Решение системы уравнений, включающей неизвестные значения перемещений u_r, u_z в контурных и внутриконтурных точках, проводится в среде MathCAD 15. Для этого разработана соответствующая программа, позволяющая получать численное решение системы ДУ (9) с граничными условиями (10). Программа предоставляет возможность пользователю варьировать не только характеристиками материала и внешними воздействиями, но и шагом сетки и граничными условиями, что значительно расширяет возможности ее применения.

Получены значения компонент напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ и деформаций $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}$ в зависимости от координат *r* и *z*. Исследована их зависимость от времени облучения и свойств материала. Кроме того, проведено исследование влияния температуры и облучения на напряжения, деформации и перемещения.

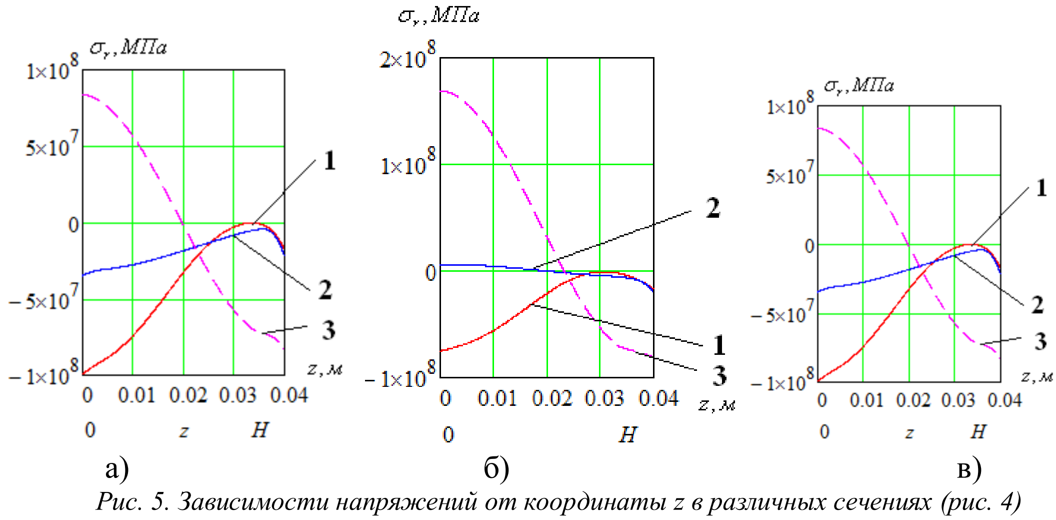


Рис. 5. Зависимости напряжений от координаты z в различных сечениях (рис. 4) при t = 1000 ч: 1 – сечение А-А 2 – сечение Б-Б 3 – сечение В-В

Проведено решение некоторых тестовых задач. Достоверность результатов ввиду отсутствия аналитических решений такого рода задач проверялась при отдельном механическом и температурном нагружении. Сравнение результатов с аналитическим решением задач теории упругости и термоупругости [2 - 5] подтвердило достоверность конечно-разностных схем. При шаге сетки k>20 погрешность численного расчета не превышает 0,3 %.

Для проверки на согласованность точное решение в соответствии с [2 - 5] подставлялось в конечно-разностные уравнения с последующим разложением всех узловых значений в ряд Тейлора. Полученное выражение состоит из исходного дифференциального уравнения и некоторого остаточного члена. Так как остаточный член стремится к нулю при уменьшении шага сетки, то согласованность конечно-разностной схемы обеспечена. Устойчивость конечно-разностных схем проверялась методом фон Неймана. В соответствии с теоремой Лакса, сходимость конечно-разностных схем обеспечена ввиду одновременного выполнения условий согласованности и устойчивости.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке и создании новых конструкций, а также позволят оптимизировать геометрические параметры существующих конструктивных элементов при силовых и терморадиационных воздействиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликов, И.С., и др. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / И.С. Куликов, Б.Е. Тверковкин. – Мн., 1984. – 143 с.*
2. *Тимошенко, С.П., и др. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М., 1979. – 576 с.*
3. *Коваленко, А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. - Киев: Наукова думка, 1970. – 239 с.*
4. *Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. - М.: Высшая школа, 1967 г. - 599 с.*
5. *Юдаев, Б.Н. Теплопередача / Б.Н. Юдаев. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. школа, 1981. - 319 с.*

E-mail: vmhvisevich@bstu.by
vai_mrtm@bstu.by
vitaly19@mail.ru.

Поступила в редакцию 06.10.2016