

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА МУЛЬТИКОПТЕРНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

к.ф.-м.н. **Ширвель П.И.**, д.ф.-м.н. **Чигарев А.В.**, асп. **Конон И.И.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

При проектировании систем управления и стабилизации любых летательных аппаратов важным этапом является выявление их динамических свойств как объекта управления [1-3]. Целью данного проекта является исследование механики управления мобильной мехатронной системой на примере летательного аппарата типа мультикоптер. Отметим, что управление мультикоптером является достаточно сложной проблемой и в тоже время очень интересной задачей. Мехатронно-модульную систему изучаем на динамику и управление, включая элементы механики полета мультикоптера. Имеется обширная отечественная и зарубежная литература, посвященная построению математических моделей динамики движения летательных аппаратов [1-12]. Настоящие исследования, в какой-то степени облегчая работу с этой литературой, дают рациональные приемы по выводу уравнений движения мобильных систем, предлагают направления их решения и дальнейшей линеаризации, а также изучения статического и динамического равновесия мехатронно-модульных комплексов.

Мультикоптер (гексакоптер) моделируется, как комбинация шести роторов, работающих по принципу поперечной конфигурации. Конкретнее, рассматривается гексакоптер (рис. 1) с известными техническими и физическими параметрами, движением которого можно управлять, изменяя силу тяги роторов двигателей в зависимости от скорости вращения пропеллеров (винтов). Довольно тонкий и легкий крестообразный каркас связывает двигатели, которые имеют закрытый корпус. В качестве последних рассматривается использование бесколлекторных двигателей. Все оси вращения винтов жестко закреплены и параллельны. Кроме того, они имеют фиксированный шаг вращения лопастей, потоки воздуха которых направлены вниз, чтобы получить направление подъемной силы вверх. Общее управление мультикоптером осуществляется путем изменения скорости вращения винтов. В качестве регулирующего устройства используется контроллер, задача которого состоит в стабилизации робота в воздухе путем подачи управляющих сигналов всеми двигателями. Очевидно, что для выполнения качественного регулирования необходима информация о динамическом поведении объекта.

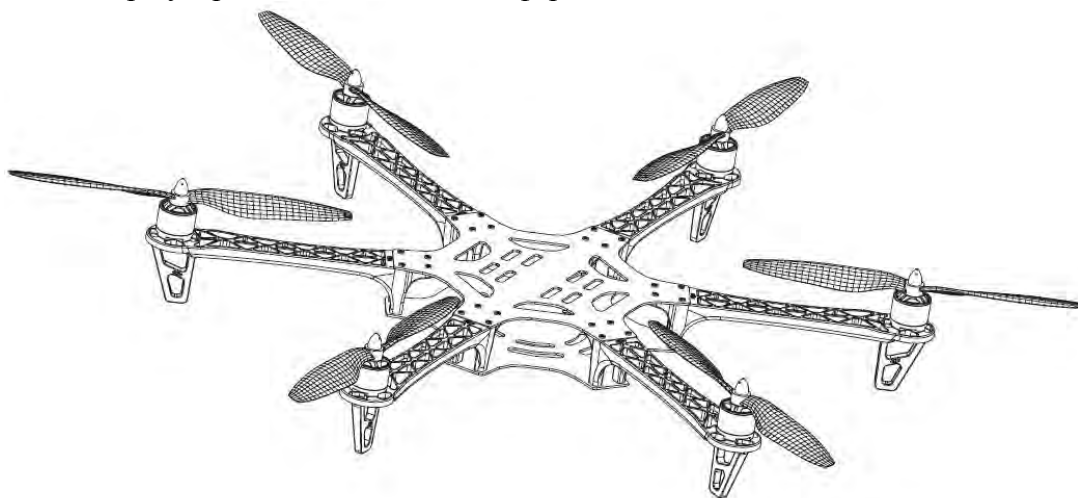


Рис. 1. Эскиз твердотельной модели

В любой инерциальной системе управления, как правило, осуществляются три измерения, для получения каждого из которых имеются свои приборы: гироскопические и оптические прибо-

ры для измерения угловой скорости или угловых отклонений; акселерометры для измерения линейного ускорения; прецизионные источники стабилизированной частоты для измерения времени [2-4]. В результате интегрирования этих данных по времени вырабатываются управляющие команды, поступающие в систему управления направлением и величиной тяги двигателей. Очевидно, что для того, чтобы инерциальная система давала правильные результаты, необходимо точно знать положение аппарата перед началом и в процессе управления, величины и направления скорости его полета относительно выбранных ориентиров.

Считаем, что мультикоптер движется относительно инерциальной системы отсчета, связанной с Землей и заданной декартовыми осями O_1x_1 , O_1y_1 и O_1z_1 , причем ось O_1z_1 направлена противоположно вектору силы тяжести (см. рисунок). В центре масс мультикоптера введем две подвижные системы координат: кенигову и связанную с телом. Кенигова система координат (с началом в центре тяжести мультикоптера) имеет строго фиксированное направление и ее оси параллельны осям $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 2). Отметим, что при изучении миниатюрных беспилотных летательных аппаратов важно понять, как тела ориентируются друг относительно друга и как аппарат ориентируется относительно Земли. Также необходимо знать, как датчики и камера ориентируется относительно летающего робота и как антенна ориентируется относительно наземного источника сигнала. Таким образом, акселерометры и датчики угловой скорости, получают информацию относительно связанной системы координат, а GPS/ГЛОНАС определяет положение, скорость относительно Земли и курсовой угол относительно инерциальной системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

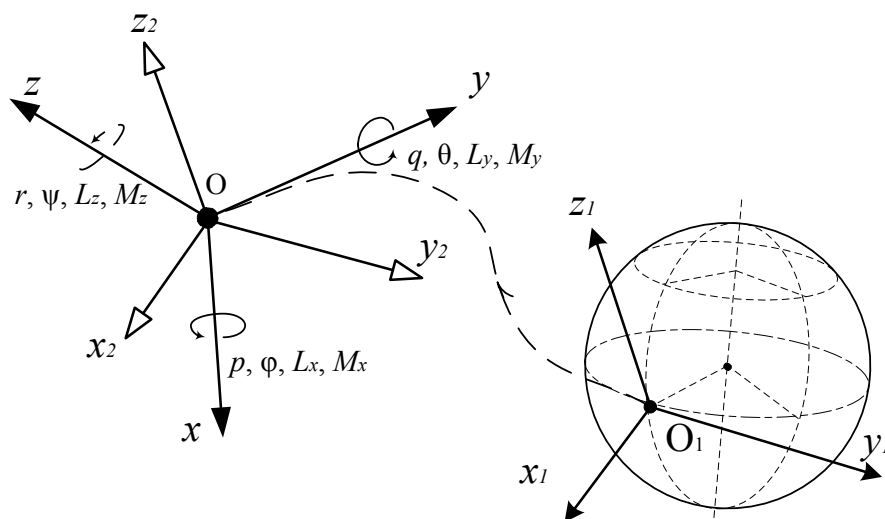


Рис. 2. Схема расположения осей неподвижной (земной) $O_1x_1y_1z_1$, локальной кениговой $O_2x_2y_2z_2$ и связанной с телом $Oxyz$ систем координат

Так как управляющая сила прикладывается в подвижной системе координат, то уравнения движения мультикоптера (гексакоптера) будем записывать по отношению к связанной, как бы впаиванной в тело, системы отсчета. Оси такой системы (рис. 3) выходят из центра тяжести исследуемого объекта, который в дальнейшем будем считать неподвижным относительно корпуса аппарата. Ось Ox направлена вдоль строительной оси корпуса по направлению движения вперед. Ось Oy располагают в плоскости симметрии аппарата перпендикулярно оси Ox вправо (поперечная ось). Ось Oz дополняет систему до правосторонней. Связанная система $Oxyz$ неподвижна относительно корпуса мультикоптера. Отметим, что в нашем случае движение мультикоптера проще описать в системе отсчета связанной с телом (связанной системе), несмотря на то, что уравнения движения Ньютона выведены относительно неподвижной (инерциальной системы) отсчета. Аэродинамические силы и моменты, действующие на корпус мультикоптера, также удобнее описываются в связанной системе отсчета.

Таким образом, при выводе дифференциальных уравнений движения рассматриваемой мобильной мехатронной системы делаются следующие допущения:

- мультикоптер рассматривается как абсолютно твердое тело, имеющее 6 степеней свободы;
- аппарат может совершать 3 линейных и 3 угловых (вращательных) перемещения;
- не учитываются влияние ветра, а также сферичность и вращение Земли;
- мультикоптер имеет вертикальную (или вертикальную и продольную) плоскость симметрии;
- моменты инерции летательного аппарата постоянны.

Также принимаем, что динамика мультикоптера полностью определяется его полной массой, положением центра масс и тензором инерции. Здесь имеется в виду, что заданы все внешние силы и внешние связи, которые, в свою очередь, могут зависеть от формы тела или его частей. Детали распределения масс мобильной мехатронной системы никак не сказываются на его движении, т.е. если как-то перераспределить массы внутри летательного аппарата, что не изменит положение центра масс и тензор инерции тела, то не изменится и движение аппарата при заданных внешних силах (хотя, отметим, что при этом, вообще говоря, должны измениться внутренние напряжения в самом твердом теле).

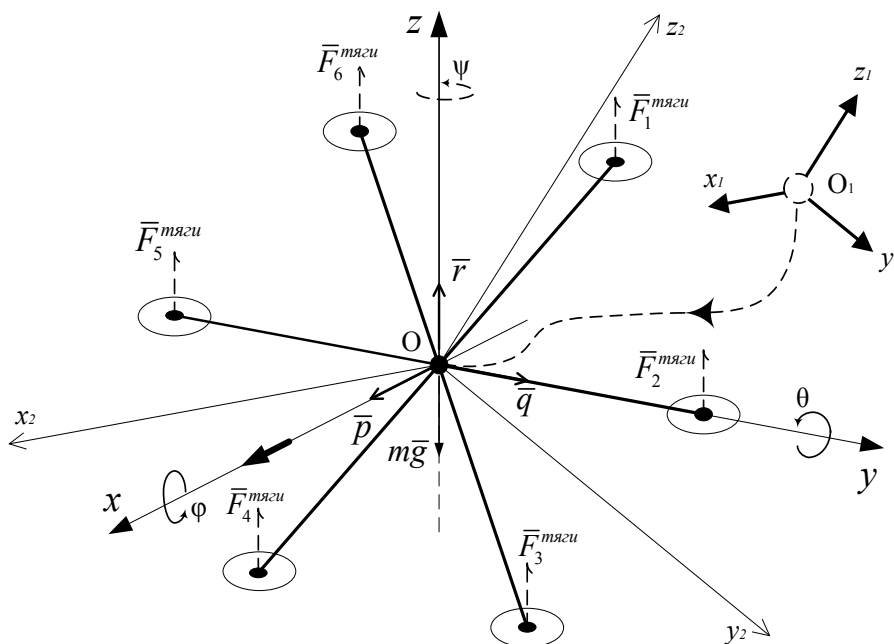


Рис. 3. Схема движения мультикоптера, система координат и отсчета положения в пространстве

Для оценки движения гексакоптера рассмотрим базовую модель (рис. 3,4), которая состоит из легкой крестообразной несущей конструкции с шестью винтами, установленными на ее концах. Нечетные винты (роторы 1,3,5) вращаются против часовой стрелки, в то время как четные (2,4,6) вращаются по часовой стрелке. Для получения уравнений движения мобильной мехатронной системы разложим движение мультикоптера на поступательное (вместе с центром масс) относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и вращательное вокруг центра инерции O . Вообще говоря, для твердого тела конкретных размеров его поступательное и вращательное движения взаимосвязаны. В рассматриваемом случае – движение мультикоптера в пространстве – считаем, что эта взаимосвязь очень слабая. И в дальнейшем будем предполагать, что вращательное движение происходит независимо от движения центра масс. Угловое положение мобильной мехатронной системы относительно ее центра инерции по трем осям задается углами крена, тангажа и рыскания, определяющими вращение мультикоптера вокруг осей $Ox_2y_2z_2$ ($O_1x_1y_1z_1$) соответственно. Связь между динамическими и кинематическими параметрами в инерциальной и подвижной системе координат будем задавать через матрицу поворота от подвижной к инерционной системе. Считаем, что одна система координат преобразуется в другую с помощью двух базовых операций: поворота и сдвига. В [2,9,10,12] приводятся описание матриц вращения и их использование в преобразовании систем координат. В [2,3,10]

подробно описываются специфические системы координат, используемые для миниатюрных летательных систем.

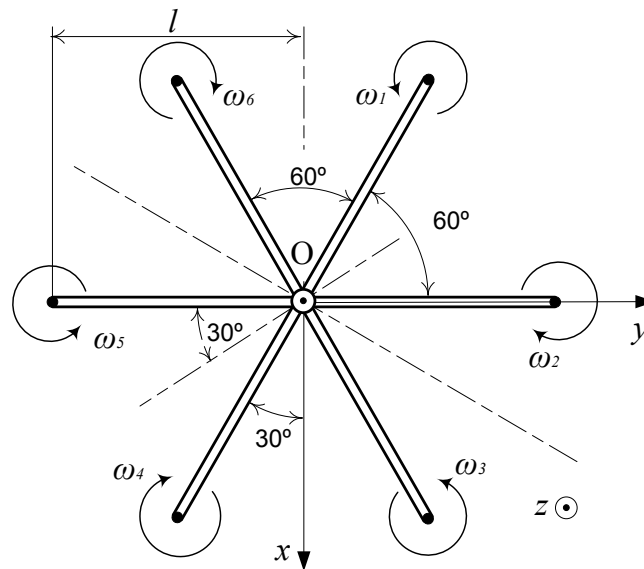


Рис. 4. Конструктивная схема мультикоптера

Как отмечалось, движение мультикоптера контролируется возможностью независимого изменения скорости роторов. Считая мультикоптер твердым телом, рассмотрим движение свободного твердого тела (рис. 3,4) относительно прямоугольной неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Согласно теореме Эйлера-Шаля [13], любое движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольной точки тела (полюса), и движением тела вокруг этой точки как неподвижной. Из основных теорем динамики следует, что за полюс удобно взять центр масс. Действительно, согласно теореме о движении центра масс, последний движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы системы, а теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии для движения относительно центра масс (относительно поступательно движущейся прямоугольной системы координат с началом в центре масс O – кениговой системы координат $Ox_2y_2z_2$) формулируется так же, как и для движения вокруг неподвижной точки.

Поступательное движение. Рассмотрим движение твердого тела относительно инерциальной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, т.е. системы, которая неподвижна или перемещается поступательно, прямолинейно и равномерно. Если \vec{F} – главный вектор внешних сил, действующих на мультикоптер, \vec{V} – скорость центра масс аппарата, а m – его масса, то, используя основное уравнение динамики:

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}}. \quad (1)$$

Спроектируем уравнения на произвольные прямоугольные оси координат, имеющие начало O_1 , т.е., если x_O, y_O, z_O – координаты центра масс тела в неподвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$, а F_{x1}, F_{y1}, F_{z1} – проекции вектора \vec{F} на оси $O_1x_1y_1z_1$, то уравнение (1) запишется в виде трех скалярных уравнений

$$F_{x1} = m\ddot{x}_O, \quad F_{y1} = m\ddot{y}_O, \quad F_{z1} = m\ddot{z}_O \quad (2)$$

Так как управляющая сила (тяга движителей) прикладывается в подвижной системе координат, жестко фиксированной с телом, будем записывать уравнения движения в связанной системе $Oxyz$. В случае исследования маневрирования мобильной мехатронной системы проще всего применить второй закон Ньютона, выражая силы и скорости в связанной системе координат. Заметим также, что даже если движение привязано к какой-либо неподвижной системе коор-

динат, оно всегда может быть выражено с помощью компонент вектора, связанных с другими системами отсчета, такими как связанная система координат [7].

В процессе вывода уравнений движения важно правильно рассчитать производные векторов в системах отсчета, которые двигаются относительно друг друга. Для данных систем координат, $O_1x_1y_1z_1$ и $Oxyz$, как показано на рис. 5, рассмотрим некоторую произвольную вектор-функцию \bar{a} , проекции которой в относительной системе координат a_x, a_y, a_z , являются заданными функциями времени, и сравним между собой векторные производные от этой функции, вычисленные наблюдателями в абсолютной и относительной системах координат. Предположим, что вектор \bar{a} движется в системе координат $Oxyz$ и что $Oxyz$ вращается относительно $O_1x_1y_1z_1$. Найдем производную по времени от вектора \bar{a} , если смотреть из системы координат $Oxyz$. Для этого обозначив ω угловую скорость системы координат $Oxyz$ относительно $O_1x_1y_1z_1$, выразим вектор \bar{a} через его векторные компоненты:

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} \quad (3)$$

Составим производную по времени от вектора \bar{a} в абсолютной системе координат. Производная по времени \bar{a} относительно инерциальной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ может быть найдена дифференцированием уравнения (3):

$$\frac{d}{dt}\bar{a} = \frac{d}{dt}a_x \cdot \bar{i} + \frac{d}{dt}a_y \cdot \bar{j} + \frac{d}{dt}a_z \cdot \bar{k} + a_x \cdot \frac{d}{dt}\bar{i} + a_y \cdot \frac{d}{dt}\bar{j} + a_z \cdot \frac{d}{dt}\bar{k} \quad (4)$$

Первые три члена в правой части уравнения (4) представляют изменение \bar{a} , которое видит наблюдатель из вращающейся системы $Oxyz$: производная от вектора \bar{a} , вычислена в предположении неизменности направления единичных векторов осей относительной системы координат, как это представится наблюдателю, соединенному с этой системой. Таким образом, дифференцирование выполняется в движущейся системе координат. Обозначим это:

$$\frac{\tilde{d}\bar{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\bar{i} + \frac{da_y}{dt}\bar{j} + \frac{da_z}{dt}\bar{k} \quad (5)$$

В отличие от абсолютной производной $\frac{da}{dt}$ обозначаем относительную (локальную) производную через $\frac{\tilde{d}a}{dt}$, так, что

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{a}}{dt} + a_x \cdot \frac{d}{dt}\bar{i} + a_y \cdot \frac{d}{dt}\bar{j} + a_z \cdot \frac{d}{dt}\bar{k}. \quad (6)$$

Следующие три члена в правой части (6) представляют изменение \bar{a} , вызванное вращением системы $Oxyz$ относительно $O_1x_1y_1z_1$. Полагая, что $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – зафиксированы в связанной системе отсчета $Oxyz$, их производные можно вычислить, как это показано, например в [13]:

$$\frac{d}{dt}\bar{i} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \quad \frac{d}{dt}\bar{j} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad \frac{d}{dt}\bar{k} = \bar{\omega} \times \bar{k} \quad (7)$$

Перепишем последние три члена уравнения (7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_x \cdot \frac{d}{dt}\bar{i} + a_y \cdot \frac{d}{dt}\bar{j} + a_z \cdot \frac{d}{dt}\bar{k} &= a_x(\bar{\omega} \times \bar{i}) + a_y(\bar{\omega} \times \bar{j}) + a_z(\bar{\omega} \times \bar{k}) = \\ &= \bar{\omega} \times (a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{a} \end{aligned} \quad (8)$$

Суммируя результаты из уравнений (5), (6) и (8), получим требуемое соотношение. Таким образом, равенство (4) приобретает вид

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{a}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{a}, \quad (9)$$

выражающее производную вектора \vec{a} в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ через его изменения, которые можно наблюдать из системы координат $Oxyz$ и через относительное вращение этих двух систем отсчета. Воспользуемся полученным выше соотношением (9) при выводе уравнений движения для мобильных мехатронных комплексов далее.

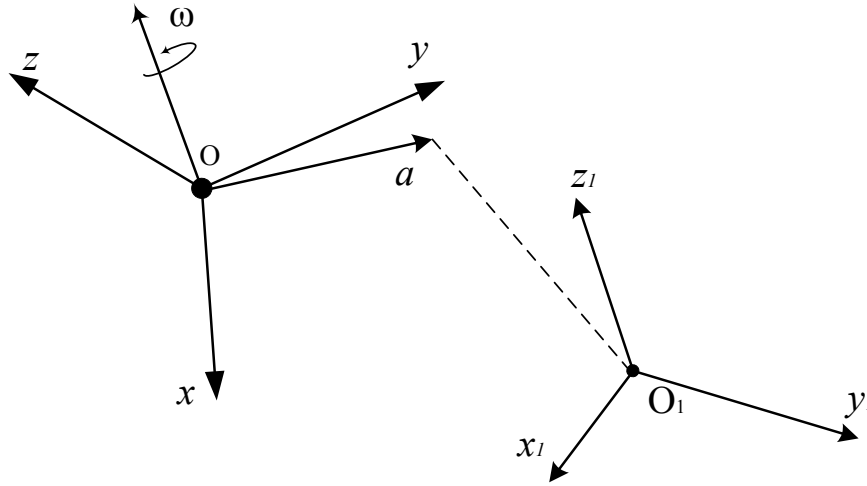


Рис. 5. Вектор во вращающейся системе координат

Спроектируем уравнения (1) на произвольные прямоугольные оси координат, имеющие начало O в центре масс системы. Векторы силы и скорости в проекции на оси $Oxyz$:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}; \quad (10)$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}; \quad (11)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты в связанной с телом системе отсчета $Oxyz$.

Как было доказано выше, в случае вращательного движения аппарата (и одновременно с ним связанной системы координат) с угловой скоростью $\vec{\omega}$, в соответствии с выражением (9) ускорение относительно неподвижной системы отсчета будет определяться формулой:

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (12)$$

где $\dot{\vec{v}}_r$ – относительное ускорение в подвижной системе координат, которое видит наблюдатель из вращающейся системы. Теперь получаем альтернативное представление основного закона динамики (1) с дифференцированием, выполненным в связанной системе координат:

$$m(\dot{\vec{v}}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{F} \quad (13)$$

В случае маневрирующего гексакоптера проще всего применить второй закон Ньютона, выражая силы и скорости в связанной системе координат:

$$\dot{\vec{v}}_r = \dot{u} \cdot \vec{i} + \dot{v} \cdot \vec{j} + \dot{w} \cdot \vec{k}. \quad (14)$$

Вектор угловой скорости вращения подвижной системы координат

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j} + r \cdot \vec{k}. \quad (15)$$

Тогда результат векторного произведения в левой части (13) будет равен

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = (v_z \omega_y - v_y \omega_z) \vec{i} + (v_x \omega_z - v_z \omega_x) \vec{j} + (v_y \omega_x - v_x \omega_y) \vec{k} \quad (16)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = (wq - vr) \vec{i} + (ur - wp) \vec{j} + (vp - uq) \vec{k} \quad (17)$$

Теперь общее ускорение мультикоптера, можно задать следующим вектором

$$\dot{\vec{v}} = (\dot{u} + wq - vr) \vec{i} + (\dot{v} + ur - wp) \vec{j} + (\dot{w} + vp - uq) \vec{k} \quad (18)$$

Вектор F представляет сумму приложенных внешних сил и определяется через его компоненты в связанной системе координат. Соответственно, равенство (1) с учетом (18) в проекциях на оси связанной с телом системы $Oxyz$ примет вид:

$$F_x = m(\dot{u} + wq - vr); \quad F_y = m(\dot{v} + ur - wp); \quad F_z = m(\dot{w} + vp - uq). \quad (19)$$

Уравнения (19) представляют собой уравнения поступательного движения мультикоптера как абсолютно твердого тела заданные в силах. В дальнейшем, для упрощения вычислительных операций, (19) можно представить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vr - wq \\ wp - ur \\ uq - vp \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}.$$

Здесь \bar{F} – равнодействующая всех сил, обусловленных аэродинамикой, гравитацией и тягой двигателей:

$$\bar{F} = \bar{F}_{mg} + \bar{F}_{мяги} + \bar{F}_{comp} + \bar{F}_d \quad (20)$$

Вращательное движение мобильной мехатронной системы. Динамические уравнения, характеризующие вращение мультикоптера вокруг центра масс, получим на основании теоремы об изменении кинетического момента для свободного твердого тела [14]:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum_i \bar{M}_i \quad (21)$$

Здесь \bar{L} – вектор кинетического момента относительно центра масс

$$\bar{L} = J \cdot \bar{\omega}, \quad (22)$$

$\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости мультикоптера относительно центра масс; J – тензор инерции (здесь и далее главными являются оси связанной с телом системы координат)

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \quad (23)$$

В (23) J_i – моменты инерции относительно главных осей, J_{ij} – центробежные моменты инерции, $i, j = x, y, z$; \bar{M}_i – внешние моменты сил, относительно центра масс, действующих на мобильную мехатронную систему.

Используя прямоугольную систему координат $Oxyz$, оси которой неизменно свяжем с движущимся телом, расположив их произвольно с центром в точке O (O – центр масс). Т.е. оси системы координат $Oxyz$ не обязательно будут центральными.

Обозначив суммарный момент внешних сил относительно центра O , \bar{M} , принимаем:

$$\bar{M} = \sum \bar{M}_i \quad (24)$$

Главный момент внешних сил относительно центра масс в проекциях на ортогональные оси выбранной произвольно правосторонней системы координат $Oxyz$ запишем в виде:

$$\bar{M} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k} \quad (25)$$

По определению [14], кинетический момент твердого тела относительно центра масс вычисляется по формуле:

$$\bar{L} = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \dot{\bar{r}}_i, \quad (26)$$

где \bar{r}_i – радиус вектор i -ой частицы твердого тела массой m_i . В (26) точка над символом подразумевает материальную производную по времени.

Тогда, считая, положение каждой частицы тела фиксированным, используем формулу Эйлера для связи линейных и угловых скоростей:

$$\dot{\bar{r}}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i, \quad (27)$$

$\bar{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости. Считая, среду сплошной (вещество распределено непрерывно по объему тела), массу каждой частицы m_i можно представить через плотность вещества и элементарный объем:

$$m_i = \rho dV. \quad (28)$$

Подставляя выражения (27), (28) в общую формулу определения кинетического момента твердого тела (6), используя методы интегрального исчисления, получим:

$$\bar{L} = \sum_I \bar{r}_i \times m_i \dot{\bar{r}}_i = \int_V \rho \cdot \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dV. \quad (29)$$

В рассматриваемой связанной системе $Oxyz$ для элементарного объема твердого тела распишем векторное произведение $\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ в правой части (24) с учетом проекций радиус-вектора и угловой скорости на оси связанной с телом системы координат:

$$\bar{r} = r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k}, \quad (30)$$

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} = p \bar{i} + q \bar{j} + r \bar{k}. \quad (31)$$

Раскрывая векторное произведение, получим:

$$\begin{aligned} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = & [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] \bar{i} + \\ & + [-xy\omega_x + (x^2 + z^2)\omega_y - yz\omega_z] \bar{j} + [-xz\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z] \bar{k} \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя (12) в (9), имеем выражение для кинетического момента

$$\begin{aligned} \bar{L} = \int_V \rho \cdot & \left([(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] \bar{i} + [-xy\omega_x + (x^2 + z^2)\omega_y - \right. \\ & \left. - yz\omega_z] \bar{j} + [-xz\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z] \bar{k} \right) dV \end{aligned} \quad (33)$$

Перегруппировав слагаемые, получим вектор углового момента:

$$\begin{aligned} \bar{L} = & \left(\int_V \rho \cdot (y^2 + z^2)\omega_x dV - \int_V \rho \cdot xy\omega_y dV - \int_V \rho \cdot xz\omega_z dV \right) \bar{i} + \\ & + \left(-\int_V \rho xy\omega_x dV + \int_V \rho \cdot (x^2 + z^2)\omega_y dV - \int_V \rho \cdot yz\omega_z dV \right) \bar{j} + \\ & \left(-\int_V \rho xz\omega_x dV - \int_V \rho \cdot zy\omega_y dV + \int_V \rho \cdot (x^2 + y^2)\omega_z dV \right) \bar{k} \end{aligned} \quad (34)$$

Как известно, по определению, главные и центробежные моменты инерции относительно координатных осей можно представить зависимостями:

$$I_x = \int_V \rho \cdot (y^2 + z^2) dV, \quad I_y = \int_V \rho \cdot (x^2 + z^2) dV, \quad I_z = \int_V \rho \cdot (y^2 + x^2) dV; \quad (35)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_V \rho \cdot xy dV, \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_V \rho \cdot zy dV, \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_V \rho \cdot xz dV. \quad (36)$$

Заменяя в (34) слагаемые выражениями (35), (36) получим определяющую зависимость для вычисления вектора момента количества движения твердого тела, выраженного через моменты инерции в связанной системе координат

$$\bar{L} = (I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z) \bar{i} + (I_y \omega_y - I_{yx} \omega_x - I_{yz} \omega_z) \bar{j} + (I_z \omega_z - I_{zy} \omega_y - I_{zx} \omega_x) \bar{k} \quad (37)$$

Запишем (37) в проекциях на координатные оси в сокращенном виде:

$$L_x = \sum_{k=x,y,z} I_{xk} \omega_k; L_y = \sum_{k=x,y,z} I_{yk} \omega_k; L_z = \sum_{k=x,y,z} I_{zk} \omega_k. \quad (38)$$

Движение динамически несимметричного твердого тела. Предполагая, в общем случае, что рассматриваемая мобильная мехатронная система типа мультикоптер, с учетом реализации требуемого функционала, может представлять собой аппарат, симметричный относительно плоскости, например, x - z (т.е. имеет только одну плоскость симметрии). Учитывая, что всякая ось, перпендикулярная плоскости симметрии тела и имеющая начало в этой плоскости является главной осью инерции тела, то для случая одной плоскости симметрии (x - z) в соответствии с расчетной схемой (рис. 3, 4) имеем:

$$J_{xy} = J_{yx} = J_{yz} = J_{zy} = 0. \quad (39)$$

Используем прямоугольную систему координат $Oxyz$, оси которой неизменно свяжем с движущимся телом и расположим по одной из его главных центральной осей.

Тогда для рассматриваемой мобильной мехатронной системы выражение (37) упроститься:

$$\begin{aligned} \bar{L} = J \cdot \bar{\omega} = & \begin{pmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{zx} & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = (J_x \omega_x - J_{xz} \omega_z) \bar{i} + \\ & + (J_y \omega_y) \bar{j} + (-J_{zx} \omega_x + J_z \omega_z) \bar{k}. \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь, используя динамическое уравнение Эйлера в виде

$$\frac{d(J \cdot \bar{\omega})}{dt} = \sum_i \bar{M}_i, \quad (41)$$

перейдем в систему отсчета, жестко связанную с вращающимся мультикоптером. Так как в этой системе тензор момента инерции постоянен, то его можно вынести за производную. Для дальнейшего упрощения можно также выбрать в качестве фиксированных осей тела его главные оси инерции. Таким образом, мы можем разделить изменение углового момента на компонент, который описывает изменение величины L и компонент, который компенсирует это изменение в направлении L , по аналогии с рис. 5 и формулами (3)-(9).

В соответствии с вышесказанным, абсолютная производная связана с локальной производной при вычислении в подвижной системе координат $Oxyz$ следующей формулой:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{L}}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{L}) = \bar{M} \quad (42)$$

Здесь L – изменение углового момента мультикоптера по отношению к его фиксированным осям; $\frac{\tilde{d}\bar{L}}{dt}$ – локальная производная, вычисляемая в подвижной системе координат $Oxyz$; $\bar{\omega}$ –

скорость изменения углов Эйлера осей, связанных с телом, по отношению к пространственным осям; \bar{M} – внешний вращающий момент относительно центра масс.

Изменение кинетического момента для рассматриваемого случая определяется формулой:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{L}}{dt} &= \frac{d\bar{L}}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{L}) = \begin{bmatrix} J_x \dot{\omega}_x - J_{xz} \dot{\omega}_z \\ J_y \dot{\omega}_y \\ -J_{zx} \dot{\omega}_x + J_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} J_x \dot{\omega}_x - J_{xz} \dot{\omega}_z \\ J_y \dot{\omega}_y \\ -J_{zx} \dot{\omega}_x + J_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-J_{xz} \omega_x + J_{zz} \omega_z) \omega_y - (J_{yy} \omega_y) \omega_z \\ (J_{xx} \omega_x - J_{xz} \omega_y) \omega_z - (-J_{xz} \omega_x + J_{zz} \omega_z) \omega_x \\ [(J_{yy} \omega_y) \omega_x - (J_{xx} \omega_x - J_{xz} \omega_z) \omega_y] \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Учитывая (43), запишем уравнение (21) в виде (44). Таким образом, получаем, что, в общем случае для мультикоптера с одной плоскостью симметрии имеют мест равенства:

$$\begin{aligned}
J_x \frac{d\omega_x}{dt} - J_{xz} \left(\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y \right) + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x; \\
J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z + J_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) &= M_y; \\
J_z \frac{d\omega_z}{dt} - J_{xz} \left(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y \omega_z \right) + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z.
\end{aligned} \tag{44}$$

Выражая из последней системы динамических уравнений угловые ускорения и скорости поворота, проведя упрощения и преобразования, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих вращение мультикоптера:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_x &= \frac{I_z M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_{xz} M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x - I_y + I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \omega_x \omega_y + \frac{(I_y - I_z) I_z - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2} \omega_y \omega_z; \\
\dot{\omega}_y &= \frac{M_y}{J_y} - \frac{(J_x - J_z) \omega_x \omega_z}{J_y} - \frac{J_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2)}{J_y}; \\
\dot{\omega}_z &= \frac{I_{xz} M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_x M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x^2 - I_y I_x + I_{xz}^2)}{I_x I_z - I_{xz}^2} \omega_x \omega_y + \frac{(I_y - I_x - I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \omega_y \omega_z.
\end{aligned} \tag{45}$$

Здесь M_x, M_y, M_z – проекции суммарного момента сил на связные оси (момент крена, тангажа и рыскания); $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости мультикоптера на оси связанной системы координат; J_x, J_y, J_z, J_{xz} – осевые и центробежный моменты инерции мультикоптера.

В уравнениях выше проекции результирующих моментов на связные оси определены в соответствии с принятым на схеме направлением вращения винтов и для выбранного расположения начала системы координат:

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x^{тяги} + M_x^{инерц_двигат} \\ M_y^{тяги} + M_y^{инерц_двигат} \\ M_z^{тяги} + M_z^{инерц_двигат} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2(2F_2 - 2F_5 + F_1 - F_6 + F_3 - F_4) \\ \sqrt{3}l/2(F_6 - F_4 + F_1 - F_3) \\ k(F_5 - F_6 + F_1 - F_2 + F_3 - F_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y(\omega_2 - \omega_1 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6) \\ \omega_x(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 + \omega_5 - \omega_6) \\ 0 \end{bmatrix} (J_{rotor} + J_{propeller}), \quad (46)$$

где $M_{тяги}$ – та часть внешнего момента, действующего на мехатронную систему, вызываемая силой тяги пропеллеров двигателей $\bar{F}_{тяги}$, приложенной на расстоянии l от центра тяжести до оси пропеллеров, т.е. моменты, создаваемые винтами; $\bar{M}_{инерц_двигат}$ – гироскопические моменты двигателей и винтов; k – коэффициент перевода силы тяги во вращательный момент; J_{rotor} , $J_{propeller}$ – моменты инерции роторов и винтов.

В дальнейшем (45) можно значительно упростить, если расположить строительные оси мультикоптера (связную систему координат) по его главным осям инерции [15]. Для такого частного случая, все центробежные моменты инерции будут равны нулю, включая и $I_{xz}=0$ (при условии, что мы заранее вычислили направление главных осей инерции аппарата).

Таким образом, общая система дифференциальных уравнений движения мобильной мехатронной системы примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = vr - wq + F_x / m; \\ \dot{v} = wp - ur + F_y / m; \\ \dot{w} = uq - vp + F_z / m; \\ \dot{p} = \frac{I_z M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_{xz} M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x - I_y + I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} pq + \frac{(I_y - I_z) I_z - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2} qr; \\ \dot{q} = \frac{M_y}{J_y} - \frac{(J_x - J_z) pr}{J_y} - \frac{J_{xz} (p^2 - r^2)}{J_y}; \\ \dot{r} = \frac{I_{xz} M_x}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{I_x M_y}{I_x I_z - I_{xz}^2} + \frac{(I_x^2 - I_y I_x + I_{xz}^2)}{I_x I_z - I_{xz}^2} pq + \frac{(I_y - I_x - I_z) I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} qr. \end{cases}$$

Представленные уравнения описывают динамику несимметричного мультикоптера с учетом принятых допущений. Из системы уравнений движения аппарата следует частный случай – динамически симметричного мультикоптера (Oz – центральная ось динамической симметрии тела). Как видно, уравнения являются нелинейными и их точное решение с помощью аналитических методов и стандартных средств в общем случае невозможно. Для численной оценки движения мультикоптера (гексакоптера), будет рассмотрена базовая модель, которая состоит из крестообразной несущей конструкции с шестью винтами, установленными на ее концах. Нечетные винты (роторы 1,3,5) вращаются против часовой стрелки, в то время как четные (роторы 2,4,6) вращаются по часовой стрелке. При проведении практических расчетов будем считать инерцию двигателей летательного аппарата малой, считая, что гироскопические силы роторов и винтов незначительные. Заметим, что уравнения, описывающие движение мобильной мехатронной системы значительно упрощаются, если расположить связную систему

координат $Oxuz$ (строительные оси аппарата) по его главным осям инерции (при условии, что мы заранее вычислили направление главных осей инерции летательного аппарата). Отметим, что расчеты показывают, что, принятая вертикальная симметрия мультикоптера, при условии постоянства массы, дает численные значения I_{xz} значительно меньшие, чем I_x , I_y и I_z (т.е. I_{xz} при проведении оценочных расчетов в дальнейшем можно будет в определенной степени пренебречь). Дальнейшее исследование уравнений движения мультикоптера, а также их решение осуществляется с использованием методов компьютерного моделирования (численное решение).

*Работа выполняется в рамках совместного проекта БРФФИ-Минобразование Республики Беларусь Т16МВ-013 (№ госрегистрации: 20162767 от 12.07.2016).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*. Boston, MA: McGraw-Hill, 2nd ed., 1998.
2. Etkin and L. D. Reid, *Dynamics of Flight: Stability and Control*. New York: John Wiley & Sons, 1996.
3. B. L. Stevens and F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2nd ed., 2003.
4. J. H. Blakelock, *Automatic Control of Aircraft and Missiles*. New York: John Wiley & Sons, 2nd ed., 1991.
5. Горбатенко С. А. и др. *Расчет и анализ движения летательных аппаратов*. – М.: Машиностроение, 1971.
6. Горбатенко С. А. и др. *Механика полета. Общие сведения. Уравнения движения*. – М.: Машиностроение, 1969.
7. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. *Динамика полета беспилотных летательных аппаратов*. – М.: Машиностроение, 1973.
8. Микеладзе В. Г., Туттов В. М. *Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет*. – М.: Машиностроение, 1978.
9. T. R. Yechout, S. L. Morris, D. E. Bossert, and W. F. Hallgren, *Introduction to Aircraft Flight Mechanics*. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
10. W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*. New Jersey: Wiley, 2nd ed., 2010.
11. J. Roskam, *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls, Parts I & II*. Lawrence, KS: DARcorporation, 1998.
12. M. V. Cook, *Flight Dynamics Principles*. New York: John Wiley & Sons, 1997.
13. Лурье А. И. *Аналитическая механика* — М.: Физматлит — 1961 г. — 824 с.
14. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. *Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т. I. Статика и кинематика*. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. - 352 с
15. Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела*. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 384 с.

E-mail: pavel.shirvel@bntu.by
chigarev@rambler.ru
konooivan@gmail.com

Поступила в редакцию 15.10.2016