УДК 539.3/.6:621.01

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

д.т.н. **Омаров Т.И.,** к.ф.-м.н. **Тулегенова К.Б.**

Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева, Казахстан, г. Алматы

Рассмотрим задачу составления динамической модели (расчетной схемы) для исследования крутильных колебаний консольно закрепленного стержня АВ с переменным поперечным сечением, находящего под действием крутящего момента M_k (рисунок 1). Для решения этой задачи всю массу стержня следует привести в точку В. Поскольку крутильные колебания, совершаемые стержнем, относятся к вращательному движению, Для исследования крутильных колебаний необходимо определить приведенный момент инерции J_B , который эквивалентный массе балки и приведенную крутильную жесткость с.

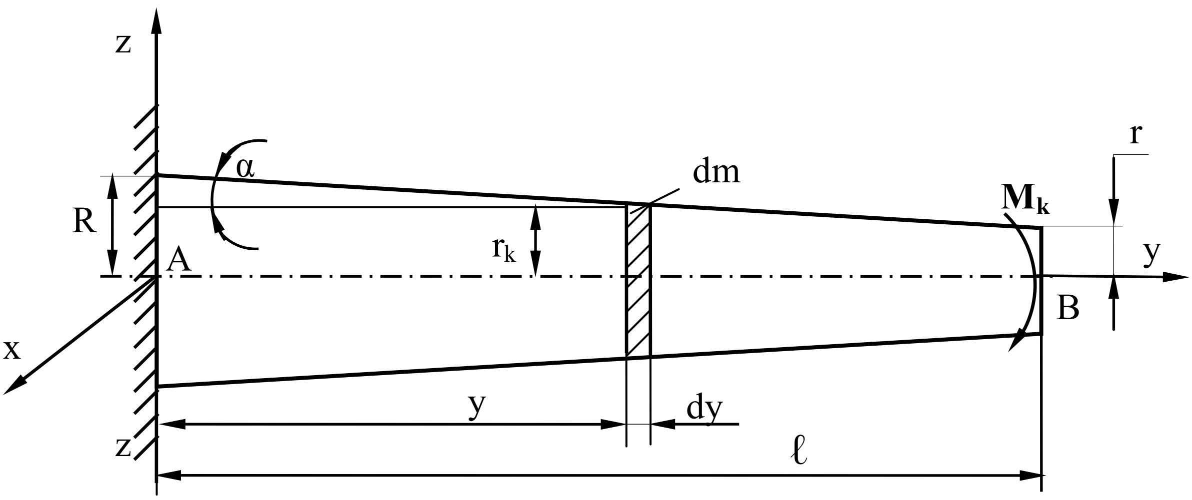

Рис. 1. Схема консольной балки с переменным поперечным сечением, работающей на кручение

Решение рассматриваемой задачи, т.е. приведение масс, осуществляется из условия равенства кинетической энергии исходной (приводимой) системы с неравномерно распределенной по длине массой (рисунок 1) и кинетической энергии дискретной (приведенной) системы (динамической модели), показанной на рисунке 2. Здесь с – крутильная жесткость стержня.

Расчетная схема представляет собой одномассовую механическую систему, в которую входит дискретная масса, момент инерции которой J_B , соединенную с закреплением невесомым упругим стержнем с крутильной жесткостью с .
Кинетическая энергия T_B дискретной системы (рисунок 2) определяется по формуле

$$T_B = \frac{J_B\ \omega^2}{2}, \tag{1}$$

где J_B – искомый приведенный момент инерции дискретной системы;
ω – угловая скорость крутильных колебаний.

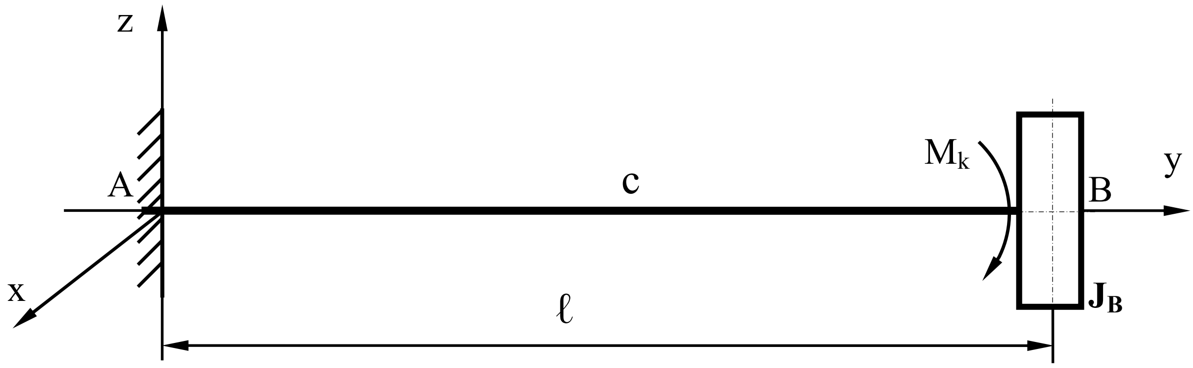

Рис. 2. Расчетная схема (динамическая модель) для исследования крутильных колебаний стержня с переменным поперечным сечением

Радиус r_k круглой формы стержня зависит от координаты y. Эту зависимость можно записать в виде $r_k = R - y\,tg\alpha$.

При малом угле α: $tg\alpha \approx \alpha$. Обозначив $b = \dfrac{R}{\alpha}$, запишем

$$r_k = \alpha(b - y). \tag{2}$$

Для определения кинетической энергии T исходной системы составим сначала выражение для кинетической энергии dT элементарного сечения массой $d\,m$ (рис.1)

$$dT = \frac{dJ \cdot \omega^2}{2}.$$

Здесь $d\,J$ – момент инерции элементарного сечения массой $d\,m$ относительно оси y. Из-за бесконечно малой толщины сечения массой $d\,m$ и с целью упрощения дальнейших расчетов принимаем, что элементарное сечение имеет форму цилиндра, а не конуса; вся же масса стержня неравномерно распределена по длине ℓ стержня. В таком случае формула для осевого момента инерции элементарного сечения примет вид [1]

$$dJ = \frac{dm \cdot r_k^2}{2}.$$

Масса элементарного сечения $dm = \gamma\,\pi\,r_k^2\,dy$ [2]. С учетом этого выражения и зависимости (2) формула для момента инерции элементарного сечения будет выглядеть

$$dJ = \frac{\gamma\pi\alpha^4 (b - y)^4}{2} dy.$$

С учетом полученной формулы выражение для кинетической энергии dT элементарного сечения примет вид

$$dT = \frac{\gamma\pi\alpha^4 (b - y)^4 \omega^2}{4} dy \tag{3}$$

Для определения угловой скорости крутильных колебаний следует сначала определить угол закручивания, т.е. деформацию φ.

Деформация при кручении для элементарного сечения массой $d\,m$ будет [3]

$$d\varphi = \frac{M_k}{G \cdot dI_p} dy,$$

где M_k – крутящий момент; G – модуль сдвига;
$d\,I_p$ – полярный момент инерции элементарного сечения, определяемый с учетом (2)

$$dI_p = \frac{\pi d_k^4}{32} = \frac{\pi \left(2 \cdot r_k\right)^4}{32} = \frac{\pi r_k^4}{2} = \frac{\pi \alpha^4 (b-y)^4}{2}.$$

Угол кручения φ с учётом $dI_p = \frac{\pi \alpha^4 (b-y)^4}{2}$ определяется из интеграла при нулевых начальных условиях

$$\varphi = \frac{2M_k}{G\,\pi\,\alpha^4} \int \frac{dy}{(b-y)^4} = \frac{2M_k}{3G\,\pi\,\alpha^4 (b-y)^3} + C.$$

Постоянная C при y = 0, φ = 0 равна $C = -\frac{2M_k}{3G\,\pi\,\alpha^4 b^3}$.

После преобразований закон изменения угла кручения примет вид

$$\varphi = \frac{2M_k}{3G\,\pi\,\alpha^4} \left[\frac{1}{(b-y)^3} - \frac{1}{b^3} \right].$$

Для того чтобы определить угловую скорость крутильных колебаний следует взять производную по времени от полученной выше формулы. Поскольку единственным параметром, зависящим от времени, будет крутящий момент M_k, закон изменения угловой скорости крутильных колебаний может быть представлен в следующем виде:

$$\omega = \frac{2\dot{M}_k}{3G\,\pi\,\alpha^4} \left[\frac{1}{(b-y)^3} - \frac{1}{b^3} \right]. \tag{4}$$

Квадрат угловой скорости

$$\omega^2 = \frac{4\dot{M}_k^2}{9G^2\,\pi^2\,\alpha^8} \left[\frac{1}{(b-y)^6} - \frac{2}{(b-y)^3 b^3} + \frac{1}{b^6} \right].$$

Подставим полученное выражение в формулу (3), получим

$$dT = \frac{\gamma\,\dot{M}_k^2}{9G^2\,\pi\,\alpha^4} \left[\frac{1}{(b-y)^2} - \frac{2(b-y)}{b^3} + \frac{(b-y)^4}{b^6} \right] dy. \tag{5}$$

Для определения кинетической энергии T исходной системы следует вычислить определенный интеграл от выражения (5)

$$T = \frac{\gamma\,\dot{M}_k^2}{9G^2\,\pi\,\alpha^4} \int_0^{\ell} \left[\frac{1}{(b-y)^2} - \frac{2(b-y)}{b^3} + \frac{(b-y)^4}{b^6} \right] dy$$

или

$$T = \frac{\gamma\,\dot{M}_k^2}{9G^2\,\pi\,\alpha^4} \left[\frac{1}{b-\ell} + \frac{(b-\ell)^2}{b^3} - \frac{(b-\ell)^5}{5b^6} \right]. \tag{6}$$

Запишем выражение для кинетической энергии T_B дискретной системы подставив в формулу (1) значение угловой скорости крутильных колебаний (4), когда $y = \ell$

$$T_B = \frac{2J_B\,\dot{M}_k^2}{9G^2\pi^2\alpha^8}\left[\frac{1}{(b-\ell)^6} - \frac{2}{b^3(b-\ell)^3} + \frac{1}{b^6}\right]. \tag{7}$$

Приравниваем выражения для кинетических исходной механической системы (6) и дискретной системы (7), получим:

$$\frac{\gamma\,\dot{M}_k^2}{9G^2\,\pi\,\alpha^4}\left[\frac{1}{b-\ell} + \frac{(b-\ell)^2}{b^3} - \frac{(b-\ell)^5}{5b^6}\right] = \frac{2J_B\,\dot{M}_k^2}{9G^2\pi^2\alpha^8}\left[\frac{1}{(b-\ell)^6} - \frac{2}{b^3(b-\ell)^3} + \frac{1}{b^6}\right].$$

Из этого равенства запишем формулу, которая определяет приведенный момент инерции дискретной системы J_B

$$J_B = \frac{\gamma\pi\alpha^4\left[\dfrac{1}{(b-\ell)} + \dfrac{(b-\ell)^2}{b^3} - \dfrac{(b-\ell)^5}{5b^6}\right]}{\left[\dfrac{1}{(b-\ell)^6} - \dfrac{2}{b^3(b-\ell)^3} + \dfrac{1}{b^6}\right]}.$$

Крутильную жесткость c определяем из формулы для угла кручения φ при $y = \ell$

$$\varphi = \frac{2M_k}{3G\,\pi\,\alpha^4}\left[\frac{1}{(b-\ell)^3} - \frac{1}{b^3}\right].$$

Она будет равна обратной величине коэффициента при крутящем моменте M_k, т.е.

$$c = \frac{3G\pi\alpha^4}{2\left[\dfrac{1}{(b-\ell)^3} - \dfrac{1}{b^3}\right]}.$$

Таким образом, реальную механическую систему с неравномерно распределенными параметрами (масса стержня), показанной на рисунке 1, можно заменить динамической моделью в виде дискретной системы (рисунок 2). Это в значительной мере облегчает исследование крутильных колебаний подобных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 736 с.*
2. *Омаров Т.И. Динамика механизмов переменной структуры рельсовых машин. – Алматы: КазНТУ, 2014. – 225 с.*
3. *Степин Г.С. Сопротивление материалов: Краткий учебник. – М.: Наука, 1987. – 234с.*

E-mail: omarov_tim@list.ru

Поступила в редакцию 19.10.2016