

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОГО НА ДВА УЧАСТКА УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ РАЗЛИЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

к.ф.-м.н. Поддубный А. А., д.ф.-м.н. Яровая А. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

В практике строительства, транспортного машиностроения широко используются неоднородные слоистые, в том числе трехслойные элементы конструкций. Эти конструкции изготавливают из различных материалов, среди которых в настоящее время широко распространено применение полимерных, композиционных, функционально-градиентных материалов, аусетиков и т.д. Вопросам расчета напряженно деформированного состояния слоистых стержней, пластин и оболочек уделяется большое внимание, так как во многих случаях эти конструкции являются элементами сложных и ответственных сооружений [1, 2].

На практике приходится сталкиваться со случаями, когда конструкция не полностью опирается на основание. Причиной появления зазора между конструкцией и основанием могут быть как техногенные условия в зоне строительства, так и природные условия. Это приводит к изменению расчетной схемы и напряженно-деформированного состояния рассматриваемого элемента, что в ряде случаев может привести к его преждевременному разрушению.

Расчетная схема стержня. Рассматривается прямоугольный трехслойный стержень длиной l и размерами поперечного сечения $h \times b_0$ (рисунок 1).

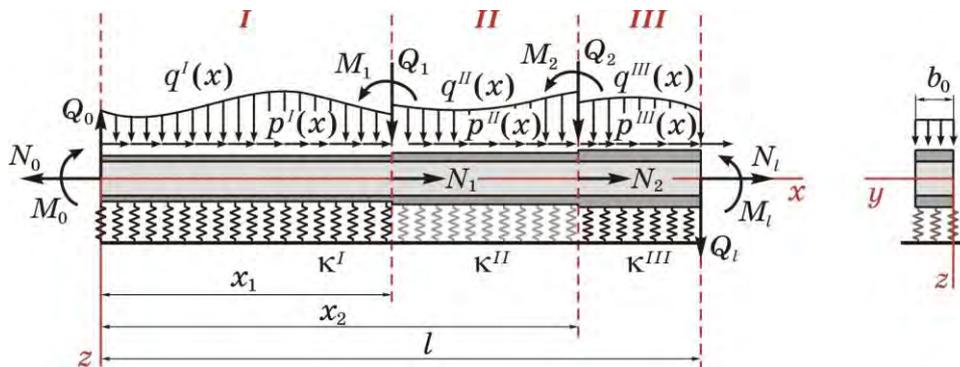


Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня прямоугольного сечения

Система координат x, y, z связана со срединной плоскостью заполнителя. Ось x направлена вдоль стержня, ось z – вниз. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси z , считается первым слоем, следующий несущий слой – вторым, а заполнитель – третьим (см. рисунок 1). Номер слоя обозначен индексом k ($k = 1, 2, 3$).

На верхний внешний слой стержня действуют распределенные поверхностные нагрузки, не изменяющиеся вдоль оси y . На торцах стержня (при $x = 0$ и $x = l$) действуют сосредоточенные силы и моменты N_0, Q_0, M_0 и N_l, Q_l, M_l . К сечениям 1 ($x = x_1$) и 2 ($x = x_2$) приложены усилия N_1, Q_1, M_1 и N_2, Q_2, M_2 .

По длине стержня выделим три участка I ($0 \leq x \leq x_1$), II ($x_1 \leq x \leq x_2$), III ($x_2 \leq x \leq l$). Обозначим: $p^n(x), q^n(x)$, Pa – продольная и поперечная распределенные нагрузки на n -м участке ($n = I, II, III$); h_1^n, h_2^n, c^n – толщины 1-го и 2-го несущих слоев и половина тол-

щины заполнителя на n -м участке. Таким образом, нагрузки на каждом из участков могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. Стержень опирается на участки упругого основания различной жесткости, через κ^n обозначен коэффициент жесткости упругого основания на n -м участке. Если на одном или двух участках основание отсутствует, то необходимо принять нулевым соответствующий коэффициент жесткости.

Основные гипотезы и искомые функции. Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной; в несущих слоях нормаль остается перпендикулярной к деформированной оси стержня; в заполнителе за счет сдвига она поворачивается на дополнительный угол. Между слоями предусмотрена склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Материалы слоев проявляют упругие свойства, для них справедлив закон Гука.

Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомого величин принимаются функции $w^n(x)$, $u^n(x)$ – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, а также $\psi^n(x)$ – угол поворота нормали в заполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на n -м участке. В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений:

$$\begin{aligned} w^I(x_1) = w^{II}(x_1); \quad w^{II}(x_2) = w^{III}(x_2); \quad u^I(x_1) = u^{II}(x_1); \quad u^{II}(x_2) = u^{III}(x_2); \quad \psi^I(x_1) = \psi^{II}(x_1); \\ \psi^{II}(x_2) = \psi^{III}(x_2); \quad w'_{,x}(x_1) = w''_{,xx}(x_1); \quad w''_{,xx}(x_2) = w'''_{,xxx}(x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Если на торцах стержня предусмотрены жесткие диафрагмы, которые препятствуют повороту нормали в заполнителе, то

$$\psi^I(0) = 0; \quad \psi^{III}(l) = 0. \quad (2)$$

что может служить граничными условиями. Если же диафрагмы на торцах не предусмотрены, то углы сдвига в заполнителе для торцевых сечений необходимо учитывать.

Для описания действия упругого основания на n -ом участке используется модель Винклера, согласно которой реакция основания $q_R^n(x)$ пропорциональна прогибу $w^n(x)$ и направлена в противоположную сторону $q_R^n(x) = \kappa^n w^n(x)$.

Перемещения, деформации и напряжения. В направлении оси x перемещения $u_x^{(k)n}(x, z)$ для каждого из слоев выражаются с использованием введенных гипотез через три искомые функции зависимостями:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)n} &= u^n + c\psi^n - zw^n_{,x} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n); \\ u_x^{(2)n} &= u^n - c\psi^n - zw^n_{,x} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \\ u_x^{(3)n} &= u^n + z\psi^n - zw^n_{,x} \quad (-c^n \leq z \leq c^n), \end{aligned} \quad (3)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Так как слои несжимаемы по толщине, то в направлении оси z перемещения точек стержня равны прогибу срединной плоскости заполнителя: $u_z^{(k)n} = w^n$. В направлении оси y перемещения отсутствуют: $u_y^{(k)n} = 0$.

С помощью соотношений Коши и выражений для перемещений (3) в каждом слое определяются компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)n} &= u^n_{,x} + c\psi^n_{,x} - zw^n_{,xx} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n); \\ \varepsilon_x^{(2)n} &= u^n_{,x} - c\psi^n_{,x} - zw^n_{,xx} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(3)n}(x, z) &= u_{,x}^n + z\psi^n - zW_{,xx}^n \quad (-c^n \leq z \leq c^n); \\ \varepsilon_{xz}^{(1)n} &= \varepsilon_{zx}^{(1)n} = 0; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)n} = \varepsilon_{zx}^{(2)n} = 0; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)n} = \varepsilon_{zx}^{(3)n} = \frac{1}{2}\psi^n; \quad \varepsilon_z^{(k)n} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из компонент тензора напряжений ненулевыми являются $\sigma_x^{(k)n}$ и $\sigma_{xz}^{(3)n} = \sigma_{zx}^{(3)n}$ ($k=1, 2, 3$ – номер слоя; $n = I, II, III$ – номер участка).

Внутренние силы и моменты. Внутренние усилия для n -го участка вводятся в виде интегралов по толщине каждого слоя:

$$\begin{aligned} N^{(1)n}(x) &= b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} dz; \quad M^{(1)n}(x) = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} z dz; \\ N^{(2)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} dz; \quad M^{(2)n}(x) = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} z dz; \\ N^{(3)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} dz; \quad M^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} z dz; \quad Q^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)n} dz, \end{aligned} \quad (5)$$

где $N^{(k)n}$, $M^{(k)n}$ – продольная сила и изгибающий момент в сечении с координатой x для k -го слоя; $Q^{(3)n}$ – поперечная сила для 3-го слоя (заполнителя); b_0 – ширина стержня; $\sigma_x^{(k)n}$, $\sigma_{xz}^{(3)n}$ – компоненты тензора напряжений для k -го слоя.

Удобно ввести полные внутренние усилия для n -го участка, просуммировав силы и моменты (5) по слоям:

$$N^n = \sum_{k=1}^3 N^{(k)n}; \quad M^n = \sum_{k=1}^3 M^{(k)n}; \quad Q^n = Q^{(3)n}; \quad H^n = c^n(N^{(1)n} - N^{(2)n}) + M^{(3)n}, \quad (6)$$

где N^n , M^n , Q^n – полные продольная сила, изгибающий момент и поперечная сила; H^n – дополнительный момент, возникающий из-за сдвига в заполнителе.

Уравнения равновесия в усилиях. К деформированному стержню применяется принцип возможных перемещений Лагранжа, который выражает условие равновесия системы внутренних и внешних сил. Для этого необходимо составить выражения возможных работ внешних и внутренних сил и приравнять их. Из полученного равенства следуют дифференциальные уравнения равновесия в усилиях

$$N^n_{,x} + b_0 p^n = 0; \quad H^n_{,x} - Q^n = 0; \quad M^n_{,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = 0, \quad (7)$$

силовые граничные условия

$$N^I(0) = N_0; \quad M^I(0) = M_0; \quad M^I_{,x}(0) = Q_0; \quad N^{III}(l) = N_l; \quad M^{III}(l) = M_l; \quad M^{III}_{,x}(l) = Q_l; \quad (8)$$

$$H^I(0) = 0; \quad H^{III}(l) = 0 \quad (9)$$

и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков $x = x_1$ и $x = x_2$:

$$N^I(x_1) - N^{II}(x_1) = N_1; \quad M^I(x_1) - M^{II}(x_1) = M_1; \quad M^I_{,x}(x_1) - M^{II}_{,x}(x_1) = Q_1;$$

$$H^I(x_1) - H^{II}(x_1) = 0; \quad N^{II}(x_2) - N^{III}(x_2) = N_2; \quad M^{II}(x_2) - M^{III}(x_2) = M_2;$$

$$M^{II}_{,x}(x_2) - M^{III}_{,x}(x_2) = Q_2; \quad H^{II}(x_2) - H^{III}(x_2) = 0. \quad (10)$$

Если на левом ($x = 0$) и правом ($x = l$) торцах стержня имеются жесткие диафрагмы, то граничные условия (9) не справедливы. Вместо них необходимо использовать условия равенства нулю углов сдвига на торцах (2). При отсутствии сосредоточенных внешних усилий в сечениях 1 и 2 в правой части условий (10) будут нули.

Закон Гука. При изгибе упругого стержня относительно оси y деформации $\varepsilon_y = 0$. Кроме этого, так как материал несжимаем, то $\varepsilon_z = 0$. С учетом этого закон Гука имеет вид:

$$\sigma_x = A_x \varepsilon_x; \quad A_x = \frac{E_x (1 - \nu_{yz} \nu_{zy})}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{xz} \nu_{zx} - \nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} - \nu_{xz} \nu_{zy} \nu_{yx}}, \quad (11)$$

где E_x – модуль Юнга; $\nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$ – коэффициенты Пуассона.

Выражение внутренних усилий через перемещения. Применяя соотношения (4), (5) и (11), выразим компоненты тензора напряжений в слоях через перемещения, и далее внутренние силы и моменты через функции $w^n(x)$, $u^n(x)$, $\psi^n(x)$:

$$\begin{aligned} N^n &= b_0 (a_1^n u^n{}_{,x} + a_6^n \psi^n{}_{,x} - a_7^n w^n{}_{,xx}), \quad H^n = b_0 (a_6^n u^n{}_{,x} + a_2^n \psi^n{}_{,x} - a_3^n w^n{}_{,xx}); \\ Q^n &= b_0 a_5^n \psi^n; \quad M^n = b_0 (a_7^n u^n{}_{,x} + a_3^n \psi^n{}_{,x} - a_4^n w^n{}_{,xx}), \end{aligned} \quad (12)$$

где a_1^n, \dots, a_7^n – параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства слоев на n -м участке:

$$\begin{aligned} a_1^n &= A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + 2A_x^{(3)} c^n; \quad a_2^n = c^{n2} [A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^n]; \\ a_3^n &= c^n [A_x^{(1)} h_1^n (c^n + \frac{1}{2} h_1^n) + A_x^{(2)} h_2^n (c^n + \frac{1}{2} h_2^n) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n2}]; \\ a_4^n &= A_x^{(1)} h_1^n (c^{n2} + c^n h_1^n + \frac{1}{3} h_1^{n2}) + A_x^{(2)} h_2^n (c^{n2} + c^n h_2^n + \frac{1}{3} h_2^{n2}) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n3}; \\ a_5^n &= 2G_{xz}^{(3)} c^n; \quad a_6^n = c^n [A_x^{(1)} h_1^n - A_x^{(2)} h_2^n]; \quad a_7^n = A_x^{(1)} h_1^n (c^n + \frac{1}{2} h_1^n) - A_x^{(2)} h_2^n (c^n + \frac{1}{2} h_2^n). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим выражения (12) в уравнения (7). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия упругом трехслойном стержне в перемещениях. Для n -го участка, связанного с упругим основанием, эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1^n u^n{}_{,xx} + a_6^n \psi^n{}_{,xx} - a_7^n w^n{}_{,xxx} &= -p^n, \\ a_6^n u^n{}_{,xx} + a_2^n \psi^n{}_{,xx} - a_3^n w^n{}_{,xxx} - a_5^n \psi^n &= 0, \\ a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxxx} - \kappa^n w^n &= -q^n, \end{aligned} \quad (14)$$

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то третье уравнение системы (14) будет следующим: $a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxxx} = -q^n$.

Определение перемещений на участках. Соотношения для сдвига в заполнителе $\psi^n(x)$, прогиба $w^n(x)$ и продольного перемещения срединной плоскости заполнителя $u^n(x)$ получим, решив соответствующие системы уравнений равновесия. Заметим, что аналитический вид решений зависит от типа упругого основания.

Для n -го участка, на упругом основании средней жесткости

$$\begin{aligned} w^n(x) &= C_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_5^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^n; \\ \psi^n(x) &= C_1^n b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^n b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^n b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\ &\quad + C_5^n b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^n b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^n + f_1^n(x); \\ u^n(x) &= C_1^n b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^n b_9^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^n b_9^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\ &\quad + C_5^n b_{10}^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^n b_{10}^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^n \alpha_{12}^n + C_8^n x + C_9^n + f_2^n(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то

$$\begin{aligned} \psi^n(x) &= C_1^n b_{11}^n + C_2^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + g_1^n(x); \\ w^n(x) &= C_1^n (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^n b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_3^n b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_4^n x^2 / 2 + C_5^n x + C_6^n + g_2^n(x); \\ u^n(x) &= C_1^n (b_{15}^n + b_{16}^n x^2) + C_2^n b_{17}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^n b_{17}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_4^n \alpha_{13}^n x + C_5^n \alpha_{13}^n + C_7^n x + C_8^n + g_3^n(x). \end{aligned} \quad (16)$$

В выражениях (15), (16) C_1^n, \dots, C_9^n – константы интегрирования, $w_p^n(x)$ – частное решение, зависящее от вида нагрузки, коэффициенты $b_i^n, \alpha_i^n, \beta_i^n$ выражаются через параметры a_i^n (13), а функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned} f_1^n(x) &= \alpha_8^n w_p^n{}_{,xxx} + \alpha_9^n \int w_p^n dx + \alpha_{10}^n \int q^n dx + \alpha_{11}^n p^n; \\ f_2^n(x) &= \alpha_8^n \alpha_{12}^n w_p^n{}_{,xxx} + \alpha_9^n \alpha_{12}^n \int w_p^n dx + \alpha_{13}^n w_p^n{}_{,x} + \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int q^n dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n p^n + \alpha_{14}^n \iint p^n dx dx; \\ g_1^n(x) &= b_{12}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \left(\int q^n dx \right) dx - b_{12}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \left(\int q^n dx \right) dx + \\ &+ b_{13}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) p dx - b_{13}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) p dx; \\ g_2^n(x) &= \alpha_{17}^n \int g_1^n dx + \alpha_{18}^n \iiint q^n dx dx dx + \alpha_{19}^n \iiint p^n dx dx dx; \\ g_3^n(x) &= b_{18}^n g_1^n(x) + b_{19}^n g_2^n(x) + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint q^n dx dx dx + b_{20}^n \iint p^n dx dx. \end{aligned}$$

Для определения констант интегрирования необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом.

Граничные условия. На левом и правом торцах стержня должны выполняться условия для внутренних усилий (8), (9). Выразив усилия через перемещения, согласно (14), получим:

– на левом торце ($x = 0$):

$$\begin{aligned} (a_1^I u^I{}_{,x} + a_6^I \psi^I{}_{,x} - a_7^I w^I{}_{,xx})_{x=0} &= N_0 / b_0; \quad (a_7^I u^I{}_{,x} + a_3^I \psi^I{}_{,x} - a_4^I w^I{}_{,xx})_{x=0} = M_0 / b_0; \\ (a_7^I u^I{}_{,xx} + a_3^I \psi^I{}_{,xx} - a_4^I w^I{}_{,xxx})_{x=0} &= Q_0 / b_0; \quad (a_6^I u^I{}_{,x} + a_2^I \psi^I{}_{,x} - a_3^I w^I{}_{,xx})_{x=0} = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

– на правом торце ($x = l$):

$$\begin{aligned} (a_1^III u^III{}_{,x} + a_6^III \psi^III{}_{,x} - a_7^III w^III{}_{,xx})_{x=l} &= N_l / b_0; \quad (a_7^III u^III{}_{,x} + a_3^III \psi^III{}_{,x} - a_4^III w^III{}_{,xx})_{x=l} = M_l / b_0; \\ (a_7^III u^III{}_{,xx} + a_3^III \psi^III{}_{,xx} - a_4^III w^III{}_{,xxx})_{x=l} &= Q_l / b_0; \quad (a_6^III u^III{}_{,x} + a_2^III \psi^III{}_{,x} - a_3^III w^III{}_{,xx})_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

При наличии жестких диафрагм на торцах последние условия в соотношениях (17), (18) не справедливы. Вместо них необходимо использовать условия равенства нулю углов сдвига (2). Если стержень, кроме опирания на упругое основание, жестко или шарнирно закреплена на торцах, вместо граничных условий в усилиях (17), (18) удобнее условия в перемещениях.

Условия сопряжения на границах участков. На границах первого и второго ($x = x_1$) и второго и третьего ($x = x_2$) участков должны выполняться условия равенства перемещений и внутренних усилий с учетом приложенных сосредоточенных внешних сил и моментов.

Принимая во внимание выражения (10), получим следующие условия сопряжения в перемещениях на границе участков *I* и *II* ($x = x_1$):

$$\begin{aligned} w^I(x_1) &= w^{II}(x_1); \quad u^I(x_1) = u^{II}(x_1); \quad \psi^I(x_1) = \psi^{II}(x_1); \quad w^I{}_{,x}(x_1) = w^{II}{}_{,x}(x_1); \\ (a_1^I u^I{}_{,x} + a_6^I \psi^I{}_{,x} - a_7^I w^I{}_{,xx} - a_1^{II} u^{II}{}_{,x} - a_6^{II} \psi^{II}{}_{,x} + a_7^{II} w^{II}{}_{,xx})_{x=x_1} &= N_1 / b_0; \\ (a_7^I u^I{}_{,x} + a_3^I \psi^I{}_{,x} - a_4^I w^I{}_{,xx} - a_7^{II} u^{II}{}_{,x} - a_3^{II} \psi^{II}{}_{,x} + a_4^{II} w^{II}{}_{,xx})_{x=x_1} &= M_1 / b_0; \\ (a_7^I u^I{}_{,xx} + a_3^I \psi^I{}_{,xx} - a_4^I w^I{}_{,xxx} - a_7^{II} u^{II}{}_{,xx} - a_3^{II} \psi^{II}{}_{,xx} + a_4^{II} w^{II}{}_{,xxx})_{x=x_1} &= Q_1 / b_0; \\ (a_6^I u^I{}_{,x} + a_2^I \psi^I{}_{,x} - a_3^I w^I{}_{,xx} - a_6^{II} u^{II}{}_{,x} - a_2^{II} \psi^{II}{}_{,x} + a_3^{II} w^{II}{}_{,xx})_{x=x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

На границе участков *II* и *III* ($x = x_2$) следует использовать условия, аналогичные (19), заменив индекс *I* на *II*, *II* на *III*, а координату x_1 на x_2 .

Граничные условия на торцах и условия сопряжения на границах участков позволяют составить систему 24-х линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования.

Был составлен комплекс программ в среде MathCad, с помощью которого получены числовые результаты для пакета «дюралюминий-фторопласт-дюралюминий». Рассмотрен трехслойный стержень, защемленный по двум торцам, длиной $l = 2$ м, шириной $b_0 = 0,2$ м. Несущие слои с толщинами $h_1 = h_2 = 0,02$ м выполнены из алюминиевого сплава Д16Т ($E = 7,208 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu = 0,35$; $K = 8 \cdot 10^{10}$ Па; $G = 2,67 \cdot 10^{10}$ Па), наполнитель толщиной $h_3 = 2c = 0,2$ м – из фторопласта (политетрафторэтилена) ($E = 2,68 \cdot 10^8$ Па; $\nu = 0,49$; $K = 4,7 \cdot 10^9$ Па; $G = 9,0 \cdot 10^7$ Па). Стержень опирается на упругое основание двумя крайними участками ($x_1 = 0,3 l$; $x_2 = 0,7 l$) и испытывает действие равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивностью $q = 500$ кПа.

Рисунок 2 иллюстрирует изменение прогиба w (а), сдвига в наполнителе ψ (б) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (в) по длине стержня при различной жесткости основания на участке *I*.

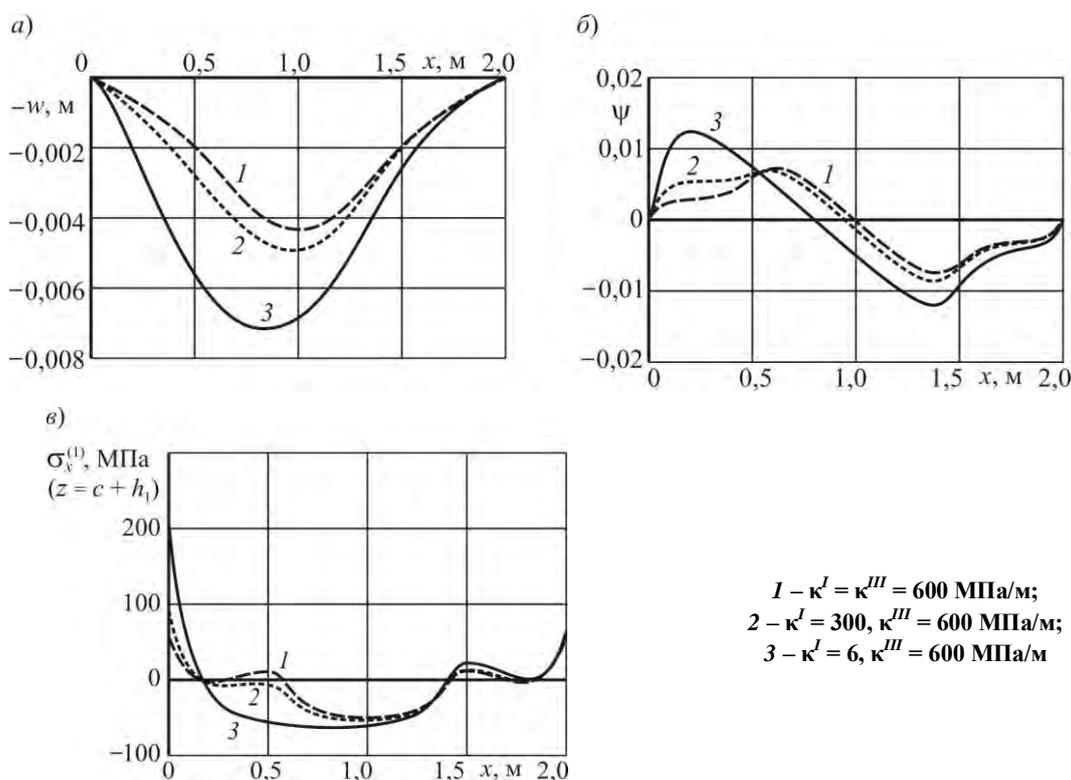
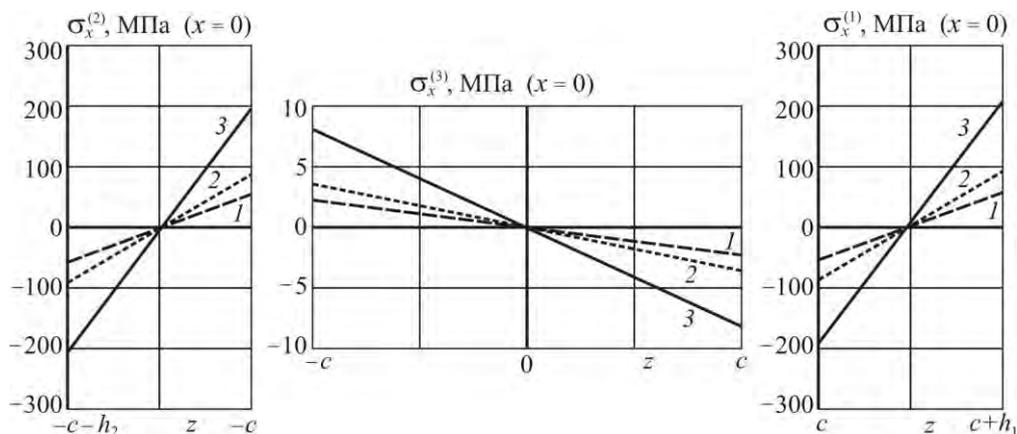


Рис. 2. Изменение прогиба w (а), сдвига в наполнителе ψ (б) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (в) по длине стержня

Для симметрично нагруженного стержня при одинаковой жесткости участков *I* и *III* все графики симметричны, посередине ($x = 0,5 l$) наблюдаются максимумы прогибов. Напряжения на торцах положительны, а посередине пролета ($x = 0,5 l$) – отрицательны, сдвиг в наполнителе переходит из положительной области в отрицательную. С уменьшением κ^I участка *I* графики меняются по форме, максимальные прогибы увеличиваются и смещаются к левой заделке. Напряжения у левой заделки имеют небольшие значения, с увеличением прогиба напряжения растут. Сдвиг в наполнителе увеличивается как в положительной области, так и в отрицательной. Чем меньше κ^I участка *I*, тем больше перемещения и напряжения. При уменьшении κ^I участка *I* с 600 до 6 МПа/м

наибольший прогиб увеличивается на 43 %, сдвиг в заполнителе на 62 %, максимальные напряжения в левой заделке увеличиваются на 75 %.

На рисунке 3 показано распределение нормальных напряжений в левой заделке ($x = 0$) по высоте сечения стержня. Все графики симметричны. При уменьшении κ^I участка I с 600 до 6 МПа/м напряжения в слоях увеличиваются на 75 %.



$$1 - \kappa^I = \kappa^{III} = 600 \text{ МПа/м}; 2 - \kappa^I = 300, \kappa^{III} = 600 \text{ МПа/м}; 3 - \kappa^I = 6, \kappa^{III} = 600 \text{ МПа/м}$$

Рис. 3. Распределение нормальных напряжений в левой заделке ($x = 0$) по толщине слоев

При помощи разработанной методики была рассчитана и спроектирована новая конструкция сборно-разборного дорожного настила, который может быть использован для устройства проезжей части колеяного или сплошного типа. По результатам исследования получен патент на изобретение № 19687 «Сборно-разборный дорожный настил» [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.
3. Сборно-разборный дорожный настил : пат. ВУ 19687 / А. В. Яровая, А. А. Поддубный. – Опубл. – 30.12.2015.

E-mail: aleksey.podd@yandex.by

Поступила в редакцию 21.10.2016