УДК 539.3

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

к.ф.-м.н. [1]**Чигарев А.В.,** асп. [2] **Покульницкий А.Р.**

[1]*Белорусский национальный технический университет, Минск*
[2]*ОАО «ПЕЛЕНГ», Минск*

Введение

Моделирование упругих цилиндрических оболочек широко применяется для анализа различных процессов в технике и биомеханике. Одной из важнейших задач динамики оболочек является задача определения собственных частот и форм малых колебаний. В работе получены значения собственных частот колебаний, а также их формы. Проведено сравнение аналитических результатов с численными, полученными с использованием программного комплекса ANSYS.

Основные расчётные соотношения.

При деформациях тонкостенной круговой цилиндрической оболочки, рассматриваемой в работе, выполняются следующие условия:

Прямолинейный элемент, перпендикулярный к срединной поверхности до деформации, остаётся прямым и перпендикулярным деформированной срединной поверхности и не изменяет своей длину [1] ;

Напряжения, нормальные к площадкам, параллельным срединной поверхности, считаются пренебрежимо малыми по сравнению с остальными напряжениями;

Материал оболочки работает в области линейной упругости;

Силы внутреннего трения при колебаниях не учитываются.

Первые три допущения позволяют решать задачу колебаний оболочки в линейной постановке с малой погрешностью порядка $\frac{\delta}{R}$ в сравнении с единицей (δ – толщина оболочки, R –радиус срединной поверхности). Уравнения (1 – 6), описывающие колебания оболочки, выводятся из условий динамического равновесия её элемента, представленного на рисунке 1.

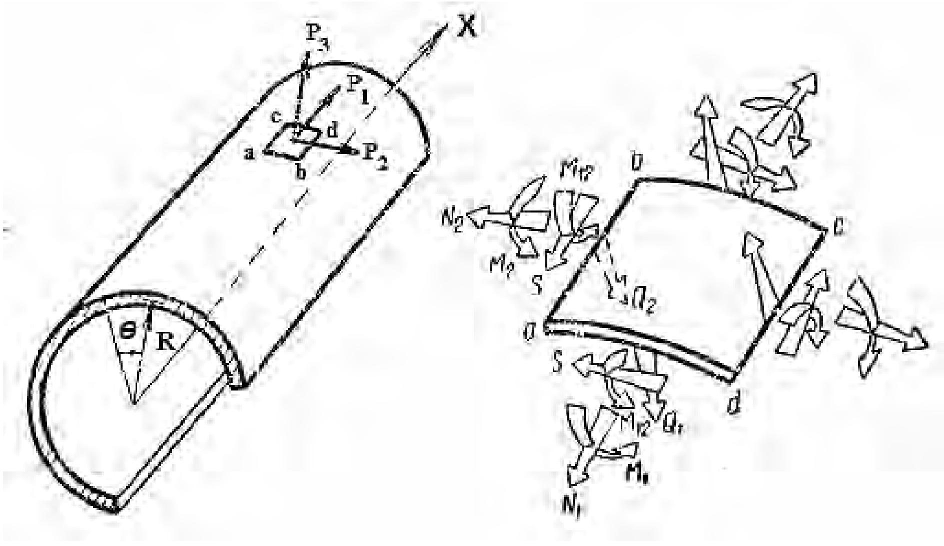

Рис. 1. Система координат и равновесие элемента тонкостенной круговой цилиндрической оболочки

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial S_{12}}{\partial \theta}+P_1-\rho h\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S_{21}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_2}{\partial \theta}+\frac{1}{R}Q_2+P_2-\rho h\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial Q_2}{\partial \theta}-N_2+P_3-\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial \theta}-Q_2=0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta}-Q_1=0, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{R}M_{21}+S_{12}-S_{21}=0, \qquad (6)$$

где N_1, S_{12}, – компоненты напряженного состояния в сечении $x = Const$; N_2, S_{21}, – компоненты напряженного состояния в сечении $\theta = Const$; M_1, M_{12}, Q_1– изгибающий момент, крутящий момент и перерезывающая сила в сечении $x = Const$; M_2, M_{21}, Q_2– изгибающий момент, крутящий момент и перерезывающая сила в сечении $\theta = Const$; P_1, P_2, P_3 – компоненты распределённой внешней нагрузки.
В уравнениях (1) – (6):

$$\mathrm{N}_1=\frac{\mathrm{Eh}}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}+\mu\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}-\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{R}}\right)\right]; \qquad (7)$$

$$\mathrm{N}_2=\frac{\mathrm{Eh}}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}+\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{R}}+\mu\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\right); \qquad (8)$$

$$\mathrm{S}=\mathrm{S}_{12}=\mathrm{S}_{21}=\frac{\mathrm{Eh}}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \theta}\right); \qquad (9)$$

$$\mathrm{M}_1=-\mathrm{D}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\mu}{\mathrm{R}^2}\left(-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \theta^2}\right)\right); \qquad (10)$$

$$\mathrm{M}_2=-\mathrm{D}\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2}\left(-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \theta^2}\right)+\mu\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{x}^2}\right); \qquad (11)$$

$$\mathrm{M}_2=-\mathrm{D}\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2}\left(-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \theta^2}\right)+\mu\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{x}^2}\right); \qquad (12)$$

$$\mathrm{M}_{21}=\mathrm{M}_{12}=-\mathrm{D}(1-\mu)\frac{1}{\mathrm{R}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \theta}\right). \qquad (13)$$

В соответствии с принципом Даламбера к внешней нагрузке добавим компоненты распределённых сил инерции с обратными знаками:

$$-\rho h\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, -\rho h\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, -\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \qquad (14)$$

Дифференциальные уравнения динамики оболочки в перемещениях можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2R^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{1-\mu^2}{E\delta}P_1-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial W}{\partial \theta}-\frac{\delta^2}{12R^2}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3}+\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \theta}-\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right)+\frac{1-\mu^2}{E\delta}P_2-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0, \quad (15)$$

$$\mu\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{1}{R}W+\frac{\delta^2}{12R^2}\left(R^3\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2R\frac{\partial^4 W}{\partial \theta^2 \partial x^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^3 V}{\partial \theta^3}-R\frac{\partial^3 V}{\partial \theta \partial x^2}\right)-\frac{R(1-\mu^2)}{E\delta}P_3+\rho\frac{R(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0.$$

Решение системы уравнений (15) будем искать в следующем виде:

$$U=A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos(n\theta)\sin(\omega t)\,; \quad (16)$$

$$V=B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin(n\theta)\sin(\omega t)\,; \quad (17)$$

$$W=C_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin(n\theta)\sin(\omega t)\,; \quad (18)$$

где m – число полуволн в продольном направлении, n – число полуволн в окружном направлении оболочки; θ – угловая координата в окружном направлении; L – длина оболочки; A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} – амплитуды колебаний вдоль соответствующих направлений; ω – круговая частота колебаний; U, V, W – перемещение срединой поверхности оболочки в продольно, окружном, и радиальном направлении.

Формулы (16 – 18) позволяют удовлетворить граничным условиям свободного опирания по краям оболочки при учете, что цилиндр ограничен только по двум краям $x = const$, т.е. $x = 0$ и $x = L$. Свободно опертый край имеет опирание, при котором $W = 0$. Однако опора не в состоянии воспринять изгибающие моменты M_1, поэтому зададимся условием обращения в нуль момента $M_1 = 0$. Такое опирание не допускает также тангенциального перемещения: $V = 0$. В качестве четвертого краевого условия можно принять, что опорный элемент податлив в направлении x, что дает $N_1 = 0$. Остальные краевые усилия отличны от нуля [2]. При подстановке этих выражений в систему дифференциальных уравнений (15), после проведения несложных математических преобразований, получается система уравнений относительно амплитуд.

$$A\left(\frac{n^2}{2}+\lambda^2-\frac{n^2\mu}{2}-\Omega\right)+B\left(-\frac{n\lambda}{2}-\frac{n\lambda\mu}{2}\right)-C\lambda\mu=0,$$

$$A\left(-\frac{n\lambda}{2}-\frac{n\lambda\mu}{2}\right)+B\left(n^2+k^2n^2+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{k^2\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^2\mu}{2}-\frac{1}{2}k^2\lambda^2\mu-\Omega\right)+C(n+k^2n^3+k^2n\lambda^2)=0, \quad (19)$$

где $\lambda = \frac{m\pi R}{L}$ – параметр продольной волны, который характеризует количество продольных полуволн деформации ($m = 1,2,3,\ldots$); $k^2 = \frac{\delta^2}{12R^2}$.

Равенство нулю их определителя дает уравнение шестой степени относительно круговой частоты колебаний ω.

$$-\Omega^3 + \Omega^2\left(1 + \frac{3-\mu}{2}(n^2+\lambda^2) + k^2\left(n^2 + n^4 + \lambda^2\left(\frac{1-\mu}{2} + 2n^2\right) + \lambda^4\right)\right) + \Omega\left(\frac{\mu-1}{2}(n^2 + n^4) + \lambda^2\left(n^2(\mu-1) + \frac{\mu-3}{2} + \mu^2\right) + \lambda^4\frac{\mu-1}{2} + k^2\left(-n^2 + n^4\frac{\mu+3}{2} + n^6\frac{\mu-3}{2} + \lambda^2\left(\frac{\mu-1}{2} + n^2\frac{3+2\mu-\mu^2}{4} + n^4\frac{3\mu-9}{2}\right) + \lambda^4\left(\frac{\mu-1}{2} + n^2\frac{3\mu-9}{2}\right)\right) + k^4\left(\lambda^2 n^4\frac{\mu-1}{2} + \lambda^4 n^2(1-\mu) + \lambda^6\frac{\mu-1}{2}\right)\right) + \left(\lambda^4\frac{\mu^3-\mu^2-\mu+1}{2} + k^2\left(n^4\frac{1-\mu}{2} + n^6(\mu-1) + n^8\frac{1-\mu}{2} + \lambda^2\left(n^2\frac{5-2\mu-3\mu^2}{4} + n^4(-3+2\mu+\mu^2) + n^6(2-2\mu)\right) + \lambda^4\left(\frac{\mu^3-\mu^2-\mu+1}{2} + n^2(-2+\mu+\mu^2) + n^4(3-3\mu)\right)\right) + k^4\left(\lambda^2 n^6\frac{1-2\mu+\mu^2}{4} + \lambda^4 n^4\frac{2-3\mu+\mu^2}{2} + \lambda^6 n^2\frac{5-6\mu+\mu^2}{4} + \lambda^8\frac{1-\mu}{2}\right)\right) = 0 \quad (20)$$

где $\Omega = \frac{1-\mu^2}{E}R^2\rho\omega^2$

Члены уравнения с множителями k^4, λ^4, λ^6, λ^8 не оказывают значительного влияния на итоговые значения искомой величины, поэтому ими можно пренебречь. Уравнение 20 примет вид:

$$-\Omega^3 + \Omega^2(1 + \frac{3-\mu}{2}(n^2+\lambda^2) + k^2(n^2 + n^4 + \lambda^2(\frac{1-\mu}{2} + 2n^2))) + \Omega(\frac{\mu-1}{2}(n^2+n^4) + \lambda^2(n^2(\mu-1) + \frac{\mu-3}{2} + \mu^2) + k^2(-n^2 + n^4\frac{\mu+3}{2} + n^6\frac{\mu-3}{2} + \lambda^2(\frac{\mu-1}{2} + n^2\frac{3+2\mu-\mu^2}{4} + n^4\frac{3\mu-9}{2})) + (k^2\left(n^4\frac{1-\mu}{2} + n^6(\mu-1) + n^8\frac{1-\mu}{2} + \lambda^2\left(n^2\frac{5-2\mu-3\mu^2}{4} + n^4(-3+2\mu+\mu^2) + n^6(2-2\mu)\right)\right) = 0 \quad (21)$$

Определение спектра собственных частот оболочки

Уравнение частот позволяет определить спектр частот собственных колебаний оболочки для каждой заданной пары m и n. Так, для оболочки с параметрами $E = 2.1\times10^{11}$ Па; $\frac{R}{L} = 0.2$; $\frac{\delta}{R} = 0.001$; $\rho = 7850$кг/м^3; $\mu = 0{,}3$. Для случая $m = 1$; $n = 4$ значения собственных частот равны: $\omega_1 = 5.29$ с$^{-1}$; :$\omega_2 = 243.8$с$^{-1}$; $\omega_3 = 423.08$с$^{-1}$. Самым медленным является поперечное колебание. Остальные колебания являются продольными. Спектр частот собственных колебаний для фиксированного значения $m = 1$ и переменного значения n для рассматриваемой оболочки представлен на рисунке 2. На рисунке 3 приведены спектры частот собственных колебаний при разных отношениях $\frac{R}{L}$ (изменяя длину оболочки), для фиксированного значения $m = 1$ и переменного значения n.

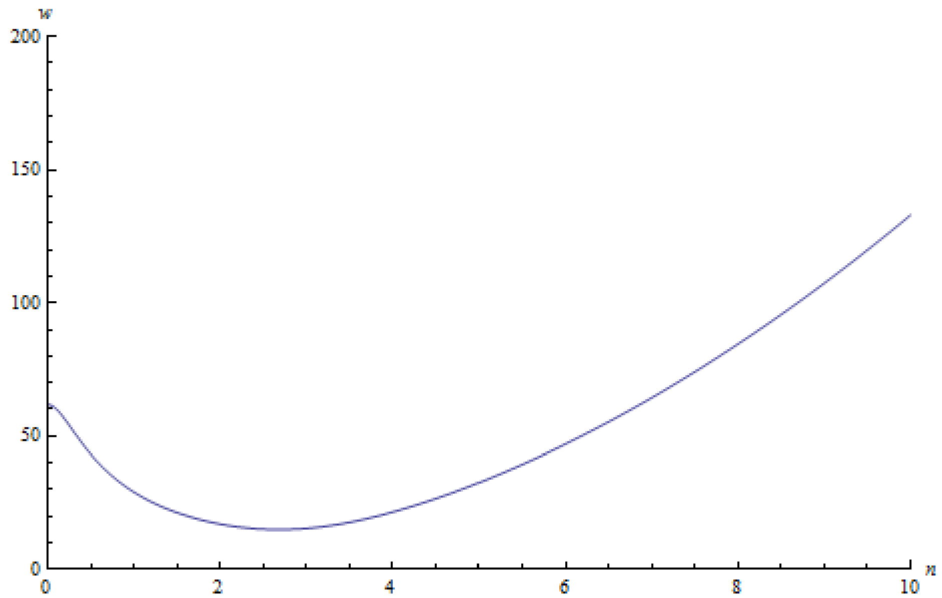

Рис. 2. Спектр собственных частот оболочки в зависимости от числа полуволн в окружном направлении оболочки

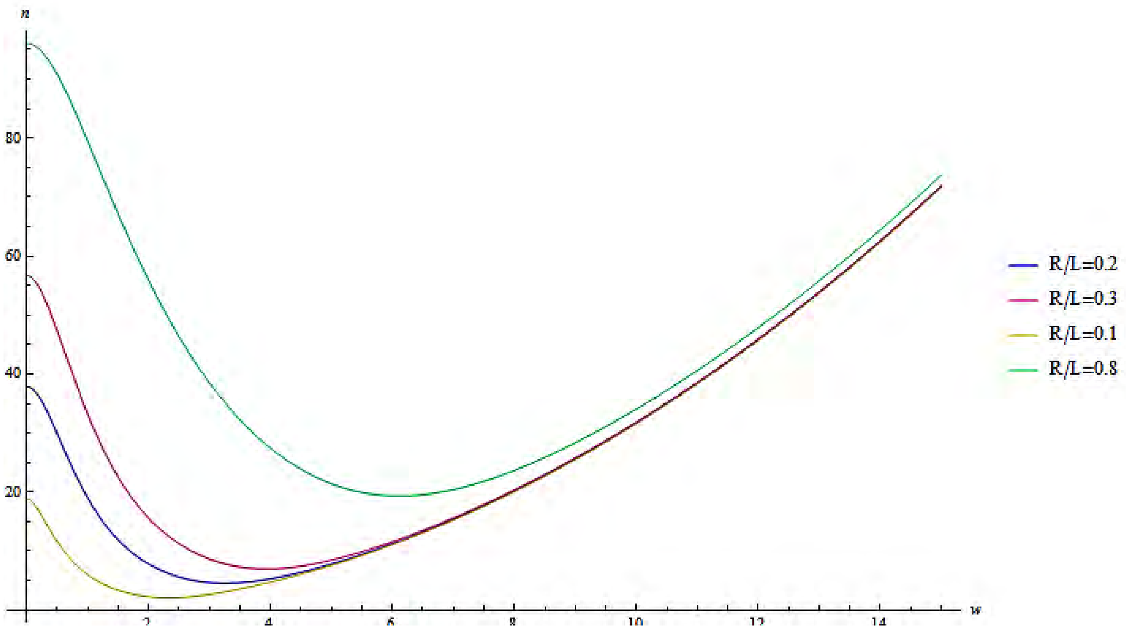

Рис. 3. Спектр собственных частот оболочки в зависимости от длины оболочки

Из графика 3 видно, что с увеличением длины L оболочки за счёт снижения величины λ, собственная частота оболочки уменьшается.

Моделирование собственных колебаний оболочки в программном комплексе ANSYS.

Произведено сравнение полученных аналитических результатов с конечно-элементным моделированием. Для моделирования формы колебаний применялся программный комплекс ANSYS. Форма и частота первой собственной частоты колебаний представлены на рисунке 4:

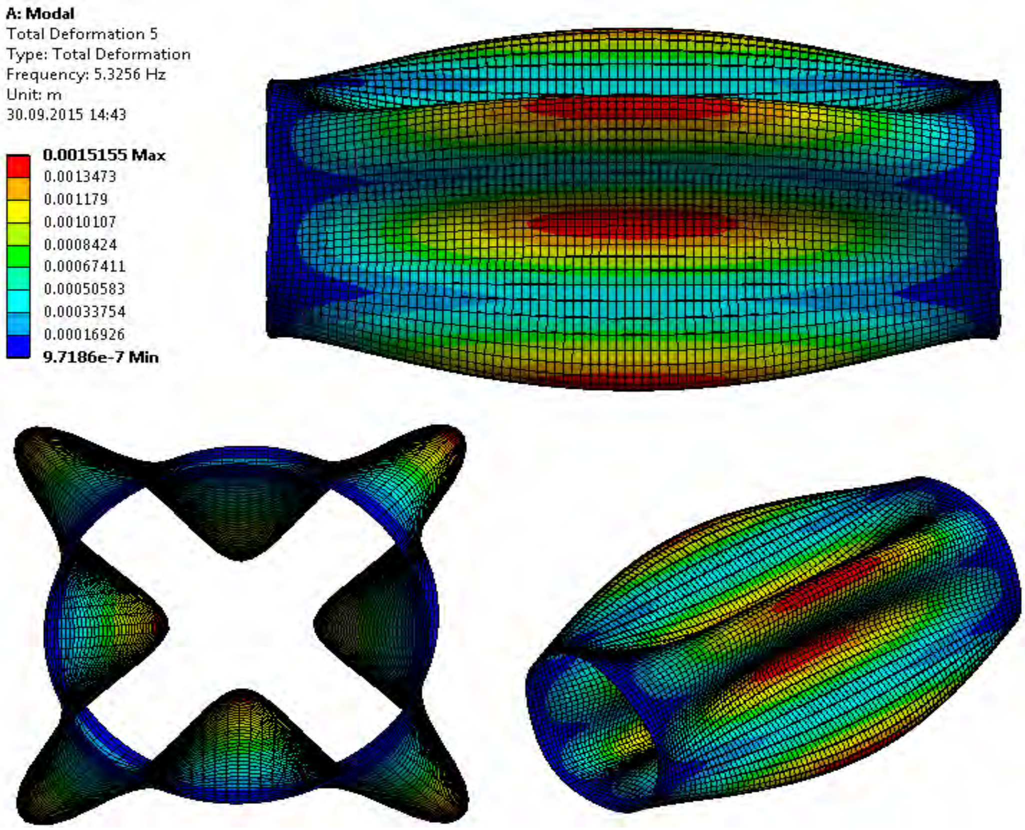

Рис. 4. Форма колебаний для частоты ω_1

Значение первой собственных частоты полученной в программном комплексе ANSYS равно $\omega_1 = 5.32$ с$^{-1}$. Расхождение результатов при численном и аналитическом решениях составляет 0.5 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек. − Москва: Высшая школа, 1963. − 278 с.*
2. *Флюгге В. Статика и динамика оболочек. − Москва: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1961. − 306 с.*
3. *Ван Цзи-Де. Прикладная теория упругости. − Москва: Государственное издательство физко-математической литературы, 1959. − 400 с.*

E-mail: Chigarev@rambler.ru

Поступила в редакцию 21.11.2015