УДК 539.3

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ДЛЯ ТЕЛ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

к.ф.-м.н. [1]**Миронов Д.Н.,** к.т.н. [2]**Гончаренко В.П.**

[1]*Белорусский национальный технический университет, Минск*
[2]*УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск*

Различают стационарное (независящее от времени) и нестационарное (зависящее от времени) поле температур, а также одно-, двух- и трехмерное поле, которое характеризуется одной, двумя или тремя координатами.

Если температура конкретной точки зависит только от координат $T = f(x,y,z)$, то такое температурное поле называется стационарным, а если от координат и времени $T = f(x,y,z,\tau)$ − нестационарным.

Явление нестационарного распространения тепла в одномерном пространстве твердого тела описывается дифференциальным уравнением – уравнение Фурье [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где a - коэффициент температуропроводности тела, $T(x,\tau)$ – поле температур, x - координата, τ –время. В нестационарных тепловых процессах a характеризует скорость изменения температуры.

Любая функция $T = f(x,\tau)$ будет решением этого уравнения, если при подстановке в него она даст тождество. Пусть $T = U(\tau)V(x)$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = U'(\tau)V(\mathrm{x}), \ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = U(\tau)V''(x). \tag{2}$$

После подстановки в дифференциальное уравнение получается

$$V(x)U'(\tau) = aV''(x)U(\tau) \text{ или } \frac{U'(\tau)}{aU(\tau)} = \frac{V''(x)}{V(x)} = -k^2. \tag{3}$$

Переменные τ и x являются независимыми друг от друга аргументами. Это означает, что величина k^2 может быть только постоянной. Тогда дифференциальное уравнение в частных производных можно представить в виде системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$U'(\tau) + ak^2U(\tau) = 0, \ U''(x) + k^2V(x) = 0 \tag{4}$$

которые будут иметь решения, соответственно,

$$U(\tau) = C_1e^{-ak^2\tau} \text{ и } V(x) = C_2e^{-ikx} + C_3e^{ikx} \tag{5}$$

Учитывая известные соотношения [2]

$$e^{-ikx} = Cos(kx) - iSin(\mathrm{kx}), \ e^{ikx} = Cos(kx) + iSin(\mathrm{kx}) \tag{6}$$

можно записать $V(x) = C_4Cos(\mathrm{kx}) + C_5Sin(\mathrm{kx})$. Тогда

$$T = DCos(\mathrm{kx})\mathrm{e}^{-ak^2\tau} + BSin(\mathrm{kx})\mathrm{e}^{-ak^2\tau} \tag{7}$$

есть общее решение дифференциального уравнения теплопроводности, а постоянные D, B, k определяются при более конкретной постановке задачи.

Если явление распространения тепла описывается дифференциальным уравнением в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{8}$$

То

$$T=DJ_0(kx)e^{-ak^2\tau}+BJ_1(kx)e^{-ak^2\tau} \tag{9}$$

где $J_0(kx)$ − функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $J_1(kx)$ − функция Бесселя первого рода первого порядка.

Если явление распространения тепла описывается дифференциальным уравнением в сферической системе координат, то

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{10}$$

то подстановкой $Z=rT$ его можно свести к уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \tag{11}$$

решение которого уже известно [3].

Рассмотрим задачу когда тело равномерно нагретое до температуры T_0 в момент времени $\tau=0$ помещается в среду с температурой T_c и охлаждается одинаковым образом с обеих сторон путем теплоотдачи с коэффициентом *α*. Математически такой процесс описывается следующими уравнениями.

Дифференциальное уравнение теплопроводности в общем случае [1]

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{12}$$

Условие симметрии:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}=0 \tag{13}$$

Граничные условия:

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=R}=a\left(T_T-T_C\right), \tag{14}$$

Начальные условия:

$$(T)_{\tau=0}=T\,. \tag{15}$$

Краевые условия (13-15) описывают физическую картину в начале процесса и на границах тела, благодаря чему в общем решении дифференциального уравнения теплопроводности находятся константы *D, B, k* и решение становится конкретным [4].

Вводим новую переменную $\vartheta=T-T_C$. Тогда

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0}=0\,,\ -\lambda\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=R}=a\vartheta_T\,,\ (\vartheta)_{\tau=0}=0\,. \tag{17}$$

Общее решение дифференциального уравнения (16) для нахождения нестационарного теплового поля аналогично решению уравнения (1) [5]:

$$\vartheta = DCos\left(kx\right)e^{-ak^2\tau} + BSin\left(kx\right)e^{-ak^2\tau} \tag{18}$$

Подстановка в условия симметрии даёт $B=0$. Следовательно,

$$\vartheta = DCos\left(kx\right)e^{-ak^2\tau} \tag{19}$$

Последнее выражение при подстановке в граничное условие (из 17) приводит к характеристическому уравнению

$$ctg\left(\mu\right) = \frac{1}{B_i}\mu\,, \left(\mu = kr; \quad B_i = \frac{ar}{\lambda}\right). \tag{20}$$

С бесчисленным множеством дискретных чисел: μ_1, μ_2, μ_3, ... μ_n. Таким образом

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n Cos\left(\mu_n \frac{x}{r}\right)e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{r^2}}. \tag{21}$$

Для определения константы D необходимо использовать начальное условие (из 17) и свойство ортогональных функций [6]

$$\vartheta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n Cos\left(\mu_n \frac{x}{r}\right) \tag{22}$$

или

$$D_1 Cos\left(\mu_1 \frac{x}{r}\right) + D_2 Cos\left(\mu_2 \frac{x}{r}\right) + D_3 Cos\left(\mu_3 \frac{x}{r}\right) + ... = \vartheta_0. \tag{23}$$

После умножения на $cos(\mu_1 x/r)$ и интегрирования в пределах от $(-r)$ до $(+r)$ получим

$$\begin{aligned} &D_1 \int_{-r}^{+r} Cos^2\left(\mu_1 \frac{x}{r}\right)dx + D_2 \int_{-r}^{+r} Cos\left(\mu_2 \frac{x}{r}\right)Cos\left(\mu_1 \frac{x}{r}\right)dx + D_3 \int_{-r}^{+r} Cos\left(\mu_3 \frac{x}{r}\right)Cos\left(\mu_1 \frac{x}{r}\right)dx + ... = \\ &= \vartheta_0 \int_{-r}^{+r} Cos\left(\mu_1 \frac{x}{r}\right)dx \end{aligned} \tag{24}$$

На основании свойств ортогональности

$$D_1 \int_{-r}^{+r} Cos^2\left(\mu_1 \frac{x}{r}\right)dx = \vartheta_0 \int_{-r}^{+r} Cos\left(\mu_1 \frac{x}{r}\right)dx \tag{25}$$

Откуда

$$D_1 = \vartheta_0 \frac{2Sin\left(\mu_1\right)}{\mu_1 + Sin\left(\mu_1\right)Cos\left(\mu_1\right)} \tag{26}$$

Действуя таким же образом находим D_2, D_3, ..., D_n. Подставляем получаем

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Sin\left(\mu_n\right)}{\mu_1 + Sin\left(\mu_n\right)Cos\left(\mu_n\right)} Cos\left(\mu_n X\right)e^{-\mu_n^2 F_0}, \tag{27}$$

где $\theta = \dfrac{T - T_C}{T_0 - T_C}$, $X = \dfrac{x}{r}$, $F_0 = \dfrac{a\tau}{r^2}$ - соответственно, безразмерная температура, координата и время (критерий Фурье). Когда имеет место нагрев, решение (27) остается без изменения. Однако под температурным комплексом следует понимать отношение

$$\theta = \frac{T_C - T}{T_C - T_0}\,. \qquad (28)$$

Значение температурного поля позволяет определить тепловой поток на поверхности как

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=r} = \frac{\lambda \vartheta_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Sin(\mu_n)}{\mu_n + Sin(\mu_n)Cos(\mu_n)}e^{-\mu_n^2 F_0} \qquad (29)$$

и среднюю температуру тела в любой момент времени

$$\theta_{cp} = \int_0^1 \theta dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Sin^2(\mu_n)}{\mu_n^2 + \mu_n Sin(\mu_n)Cos(\mu_n)}e^{-\mu_n^2 F_0}\,. \qquad (30)$$

Для бесконечного цилиндра температурное поле находится

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n\left[J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)\right]}J_0\left(\mu_n\frac{R}{r}\right)e^{-\mu_n^2 F_0} \qquad (31)$$

При этом дискретные μ_n числа определяются из характеристического уравнения

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{1}{B_i}\mu\,, \qquad (32)$$

Тепловой поток на поверхности цилиндра:

$$q = \frac{\lambda \vartheta_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mu_n J_1^2(\mu_n)}{\mu_n\left[J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)\right]}e^{-\mu_n^2 F_0}\,,\; T_{cp} = \frac{2}{r^2}\int_0^r (TR)dr\,. \qquad (33)$$

Безразмерный комплекс $Bi = {ar}/{\lambda}$, входящий в структуру уравнений для определения дискретных чисел (критерий Био), характеризует теплообмен на границе тела и теоретически может принимать значения от нуля до бесконечности. Обычными значениями этого критерия характеризуются граничные условия третьего рода, когда заданы закон теплообмена и температура окружающей среды. При $Bi \to \infty$ имеет место $T_m \to T_C$. Граничные условия третьего рода переходят в граничные условия первого рода, когда вместо закона теплообмена задается температура на поверхности тела. В этом случае характеристические уравнения для плоского тела и цилиндра или сферы, соответственно, $cos\mu = 0$; $J_0(\mu) = 0$.

В общем случае для анализа нестационарных термоупругих деформаций необходимо использовать уравнение движения для твердых тел

$$\rho\frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad (34)$$

где ρ - плотность материала, u_i - компоненты вектора деформации, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, действующих в объекте.

В рамках (квазистатического) приближения в уравнении (34) можно пренебречь действием сил инерции. При этом компоненты тензора

напряжений в задачах термоупругости задаются в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu U_{ij} + \left[\lambda U_{kk} - \gamma(T_T - T_C)\right]\delta_{ik} \qquad (35)$$

где λ и μ — коэффициенты Ламэ, γ — коэффициент термоупругой связи, u_{ij} — компоненты тензора деформации.

Решение нестационарной задачи термоупругости заключается в следующем. Необходимо при заданных механических и тепловых воздействиях определить 16 функций координат x_k и времени τ: шесть компонентов тензора напряжения σ_{ij}, шесть компонентов тензора деформации ε_{ij}, три компонента вектора перемещения u_i и температуру T, удовлетворяющих: трем уравнениям движения; шести соотношениям между напряжениями и деформациями или шести соотношениям между деформациями и перемещениями уравнению теплопроводности, при определенных начальных и граничных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Безухов, Н.И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н.И. Безухов. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.]*
2. *Бажанов, В.Л. Расчеты конструкций на тепловые воздействия / В.Л. Бажанов. – М.: Машиностроение, 1969. – 599 с.*
3. *Чигарев, А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред/ А.В. Чигарев; под ред. Шемякина Е.И. – Мн.: УП "Технопрchoosing", 2000. – 426 с.*
4. *Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М., Л.: ГИТТЛ, 1950. – 396 с.*
5. *Ивлев, Д.Д. Механика пластических сред / Д.Д. Ивлев. – М.: Физмат. Лит, 2001. – Т. 1. – 445 с.*
6. *Ландау, Л.Д. Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматгиз, 1963. – 234 с.*

E-mail: Diman@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.09.2016