*УДК 624.953*

# ИЗМЕНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧКИ ВСЛЕДСТВИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

к.т.н. [1]**Агаев В.Н.,** к.ф.-м.н. [1]**Мартыненко Т.М.,** к.ф.-м.н. [2]**Скляр О.Н.,** к.ф.-м.н. [2]**Мартыненко И.М.**

[1]*Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск*
[2]*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Оболочки и пластины получили широкое распространение в различных отраслях современной техники. В связи с этим весьма важной задачей является создание новых расчетных методов, позволяющих более полно учесть как характерные условия работы современных конструкций, так и специфику свойств применяемых материалов. Вопросы экономии материала требуют разработки методов расчета конструкций на прочность и устойчивость с учетом физической и геометрической нелинейности. Развитие таких методов позволяет провести исследование работы конструкции в упруго-пластической стадии и при больших прогибах.

Эффективное использование прочностных и деформационных ресурсов материалов в конструкциях необходимо в связи с повышением требований к надежности и долговечности изделий. Учет упруго-пластической стадии деформирования материала значительно повышает правильность и надежность расчета элемента конструкции на прочность и устойчивость, позволяет более обосновано и рационально решить вопрос о выборе коэффициента запаса.

Несущая способность гибких элементов конструкций определяется в основном их устойчивостью. Поэтому актуальной является проблема создания алгоритмов, позволяющих определить критическую нагрузку и исследовать закритическое поведение при учете упруго-пластических деформаций и больших прогибов. Оболочки и пластины часто находятся под совместным действием ряда нагрузок: и устойчивость и закритическое поведение их существенно зависят от вида комбинированного нагружения.

В оболочке может возникнуть напряженное состояние не только от воздействия внешних сил, но и вследствие неравномерного распределения температуры. Предположим, что внешние нагрузки отсутствуют, а края оболочки могут свободно перемещаться. Из-за неравномерного нагрева отдельные элементы оболочки стремятся расшириться также неравномерно, а так как они связаны между собой, то в оболочке возникает напряженное состояние. Усилия и моменты, статически эквивалентные этому внутреннему напряженному состоянию, удовлетворяют однородным уравнениям равновесия. Усилия и моменты на краях оболочки равны нулю. Статически возможным, т. е. удовлетворяющим уравнениям равновесия и силовым граничным условиям, является в этом случае нулевое напряженное состояние $T_1 = T_2 = S = M_1 = M_2 = H = 0$. Но оно может осуществляться лишь при определенных условиях, налагаемых на распределение температуры. Для определения отличного от нуля внутреннего напряженного состояния к уравнениям равновесия необходимо добавить физические и геометрические соотношения.

Полные относительные удлинения элементов упругого тела складываются из температурных удлинений и удлинений, связанных с внутренними напряжениями по закону Гука [1]. Компоненты деформации выражаются через перемещения обычным образом. Принимая эти положения, зададимся целью составить полную систему уравнений, описывающих деформацию оболочки при неравномерном распределении температуры. Примем, что по толщине стенки температура изменяется линейно, т. е.

$$t(\theta,\varphi) = t^m(\theta,\varphi) + \frac{\varsigma}{h}\Delta t(\theta,\varphi), \tag{1}$$

где $\varsigma$ - расстояние от срединной поверхности, отсчитываемое по нормали, $t^m$ - средняя температура стенки, $\Delta t$ - перепад температуры по толщине. Если обозначить температуру наружной $\varsigma = +\frac{h}{2}$ и внутренней $\varsigma = -\frac{h}{2}$ поверхностей оболочки через $t^+$ и $t^-$, то

$$t^m = \frac{t^+ + t^-}{2}, \ \Delta t = t^+ - t^- . \tag{2}$$

Компоненты деформации элемента оболочки, расположенного на слое $\varsigma = const$, равны

$$e_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) + \beta t, \ e_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) + \beta t, \ \omega = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{12}, \tag{3}$$

здесь $e_1$, $e_2$ - компоненты удлинения, $\omega$ - сдвиг, $\beta$ - коэффициент линейного температурного расширения, который является физической константой материала, из которого изготовлена оболочка. Решая уравнения (3) относительно $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\tau_{12}$ получим

$$\begin{gathered}\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\left(e_1 + \mu e_2 - (1+\mu)\beta t\right), \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\left(e_2 + \mu e_1 - (1+\mu)\beta t\right), \\ \omega = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{12}.\end{gathered} \tag{4}$$

Пренебрегая величинами $\frac{\varsigma}{R_1}$, $\frac{\varsigma}{R_2}$ и по сравнению с единицей, получим, что удлинения и сдвиг в точках поверхности $\varsigma = const$ выражаются через компоненты деформации срединной поверхности следующим образом [2]:

$$e_1 = \varepsilon_1 + \varsigma\chi_1, e_2 = \varepsilon_2 + \varsigma\chi_2, \omega = \gamma + \varsigma 2\tau. \tag{5}$$

Подставляя выражения (5) в формулы (4) и используя упрощенные выражения для вычисления усилий и изгибающих моментов [3], можно отбросить величины порядка $\frac{\varsigma}{R_1}$, $\frac{\varsigma}{R_2}$ по сравнению с единицей, получим

$$\begin{gathered}T_1 = B\left(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 - (1+\mu)\beta t^m\right), T_2 = B\left(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1 - (1+\mu)\beta t^m\right), \\ S = B\frac{(1-\mu)}{2}\gamma.\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}M_1 = D\left(\chi_1 + \mu\chi_2 - (1+\mu)\beta\frac{\Delta t}{h}\right), M_2 = D\left(\chi_2 + \mu\chi_1 - (1+\mu)\beta\frac{\Delta t}{h}\right), \\ H = D(1-\mu)\tau.\end{gathered} \tag{7}$$

где введены обозначения $B=\dfrac{Eh}{1-\mu^2}$, $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$.

Компоненты деформации $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\gamma$, $\chi_1$, $\chi_2$, $\tau$ не могут быть произвольно заданными функциями координат $\theta$, $\varphi$. Для того чтобы деформированная поверхность, соответствующая этим функциям, могла существовать, они должны удовлетворять условиям неразрывности деформации, - число которых становится очевидным, если вспомнить выражения для компонент деформации через перемещение срединной поверхности $u$, $\upsilon$, $w$ [4].

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1=\frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\omega}{R_1},\ \varepsilon_2=\frac{1}{v}\frac{\partial\upsilon}{\partial\varphi}+\frac{u\cos\theta+\omega\sin\theta}{v},\\
\gamma=\frac{1}{R_1}\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}+\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{\upsilon\cos\theta}{v},\ \chi_1=-\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}-\frac{u}{R_1}\right),\\
\chi_2=-\frac{\cos\theta}{v}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}-\frac{u}{R_1}\right)-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}-\frac{\upsilon\sin\theta}{v}\right),\\
2\tau=\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}-\frac{\upsilon\sin\theta}{v}\right)+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{\upsilon\cos\theta}{v}\right)-\\
-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}-\frac{u}{R_1}\right)+\frac{\cos\theta}{v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}-\frac{\upsilon\sin\theta}{v}\right)+\frac{1}{R_1R_2}\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Действительно, шесть величин $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\gamma$, $\chi_1$, $\chi_2$, $\tau$ выражаются через три функции $u$, $\upsilon$, $w$ и следовательно сами должны быть связаны тремя соотношениями, являющимися условиями интегрируемости системы (8) относительно перемещений. Уравнения равновесия, соотношения упругости (6), (7) и выражения (8) образуют полную систему уравнений для определения усилий, моментов и перемещений в оболочке при заданном распределении температуры. К ней необходимо присоединить граничные условия, которые в рассматриваемом случае, когда внешние силы отсутствуют, представляют собой однородные статические условия.

Соотношения (6), (7) перепишем в виде

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1=\varepsilon_1^e+\varepsilon_1^t,\ \chi_1=\chi_1^e+\chi_1^t,\ \varepsilon_2=\varepsilon_2^e+\varepsilon_2^t,\\
\chi_2=\chi_2^e+\chi_2^t,\ \gamma=\gamma^e+\gamma^t,\ \tau=\tau^e+\tau^t,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1^e=\frac{1}{Eh}\left(T_1-\mu T_2\right),\ \varepsilon_2^e=\frac{1}{Eh}\left(T_2-\mu T_1\right),\ \gamma^e=\frac{2\left(1+\mu\right)}{Eh}S,\\
\chi_1^e=\frac{12}{Eh^3}\left(M_1-\mu M_2\right),\ \chi_2^e=\frac{1}{Eh}\left(M_2-\mu M_1\right),\ \gamma^e=\frac{12\left(1+\mu\right)}{Eh}H,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$
\varepsilon_1^t=\varepsilon_2^t=\beta t^m,\ \chi_1^t=\chi_2^t=\beta\frac{\Delta t}{h},\ \gamma^t=\tau^t=0. \tag{11}
$$

Величины (10) отмечены знаком $e$ в знак того, что они связаны с усилиями и моментами соотношениями упругости обычного вида.

Суммарные компоненты деформации (9) должны удовлетворять уравнениям неразрывности [5].

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nu\chi_2\right)-R_1\chi_1\cos\theta-R_1\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}+\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_1}\frac{\partial\left(\nu\varepsilon_2\right)}{\partial\theta}+\varepsilon_1\cos\theta=0,$$

$$R_1\frac{\partial\chi_1}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(\nu\tau\right)}{\partial\theta}-R_1\tau\cos\theta+\gamma\cos\theta+\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\sin\theta+$$

$$+\frac{\gamma R_1\cos\theta\sin\theta}{\nu}-\frac{R_1\sin\theta}{\nu}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\varphi}=0, \qquad (12)$$

$$\nu\chi_2+R_1\chi_1\sin\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi}-\varepsilon_1\cos\theta+\frac{1}{R_1}\frac{\partial\left(\nu\varepsilon_2\right)}{\partial\theta}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}+\frac{\gamma R_1\cos\theta}{\nu}-\frac{R_1}{\nu}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\varphi}\right)=0.$$

Так как $t^m$, $\Delta t$ являются заданными функциями координат $\theta$, $\varphi$, а $\varepsilon_1^e, \chi_1^e, \varepsilon_2^e, \chi_2^e, \gamma^e, \tau^e$ выражаются через усилия и моменты по (10), то уравнения неразрывности после подстановки в них выражений (9) превратятся в три неоднородных дифференциальных уравнения относительно шести неизвестных усилий и моментов. Совместно с уравнениями равновесия они образуют систему из шести дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно $T_1, T_2, S, M_1, M_2, H$ с однородными статическими граничными условиями. Эта система уравнений неоднородна за счет уравнений неразрывности. Если распределение температуры таково, что компоненты деформации $\varepsilon_1^t, \chi_1^t, \varepsilon_2^t, \chi_2^t, \gamma^t, \tau^t$ тождественно удовлетворяют уравнениям неразрывности, то в этом случае уравнения неразрывности в усилиях и моментах будут иметь свободные члены, тождественно равные нулю. Для определения усилий и моментов получится однородная система из шести уравнений с однородными граничными условиями. Решением этой системы является тождественный нуль, и напряженное состояние в оболочке не возникает.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. - 984 с.*
2. *Власов, В.З. Общая теория оболочек. – М.-Л.:Физматгиз, 1949. – 784 с.*
3. *Блейх, Ф. Устойчивость металлических конструкций. – М.-Л.:Физматгиз, 1959. – 544 с.*
4. *Тимошенко, С.П. Войковский-Кригер С. Пластинки и оболочки. -М.: Физматгиз, 1963.*
5. *Белов, Н.Н. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. / Н.Н. Белов, Д.Г. Компаница, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов// Томск: STT, 2004. – 465с.*
6. *Bangash M.Y.H. Explosion-Resistant Building Structures / Design, Analysis, and Case Studies. // Bangash M.Y.H., Bangash T. Sprnger, Berlin, 2006. – 450 с.*


E-mail: elena.taras@mail.ru

Поступила в редакцию 11.09.2016