

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

асп. Козел А.Г.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Расчёт элементов конструкций на упругом основании имеет большое практическое значение. Результаты данных изысканий могут применяться для таких сооружений как аэродромные и дорожные покрытия, полы промышленных зданий, днища резервуаров, ленточные фундаменты, треки для испытаний и площадки для запуска ракет, конструкции зданий, расположенных на сжимаемых грунтах и мн. др.

Статическое и динамическое деформирование трехслойных элементов конструкций исследовалось В.В. Болотиным, А.Г. Горшковым, Э.И. Старовойтовым, Д.В. Леоненко, А.В. Яровой, Ю.М. Плескачевским в работах [1–4].

Напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин и стержней, связанных с упругим основанием Винклера, в достаточно полной мере исследовано в работах [5-13]. Однако эта модель основания учитывает только сжимаемость грунта, а его связность пренебрегается и, как следствие, не способна объективно отразить реальную картину взаимодействия конструкции с подстилающим её грунтом. Поэтому актуальной является постановка задачи с применением модели Пастернака, которая является более адекватной.

Здесь приведена постановка краевой задачи *об изгибе несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака*. Получено общее аналитическое решение однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей уравнениям равновесия. Оно может служить исходным для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины, опёртой на упругое основание Пастернака. Рассмотрен случай изгиба пластины под действием равномерно распределенной нагрузки.

1. Постановка краевой задачи в усилиях

Поперечно нагруженная упругая трехслойная круговая пластина покоится на упругом основании (рисунок 1). Для изотропных несущих слоев толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Заполнитель считается легким, т. е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении.

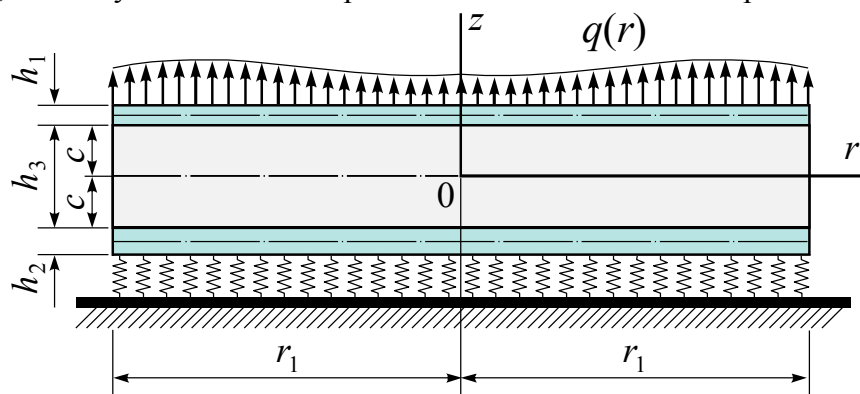


Рис. 1. Схема деформирования круговой пластины

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q_0 = q_0(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. На нижнюю поверхность пластины действует распределенная по ее площади реакция основания q_r .

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi(k) = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $u(r), \psi(r), w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Через h_k обозначена толщина k -го слоя, реакция основания – q_r .

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения радиальных перемещений в слоях $u_r(k)$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение $(u - c\psi)$, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \quad (2)$$

Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины в усилиях получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \quad M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q_0 + q_R. \quad (3)$$

На контуре пластины ($r = r_1$) должны выполняться силовые условия

$$T_r = T_r^1, \quad H_r = H_r^1, \quad M_r = M_r^1, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^1$$

2. Решение краевой задачи в перемещениях

Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости:

$$s_\alpha^k = 2G_k \varepsilon_\alpha^k, \quad \sigma^k = K_k \theta^k. \quad (4)$$

Подставив в (4) деформации, следующие из (1) и соотношений Коши, и воспользовавшись соотношениями (2), получим выражение обобщенных усилий T_α, M_α и H_α через три неизвестные функции: $u = u(r), \psi = \psi(r), w = w(r)$. После подстановки этих выражений в (3) получим в перемещениях следующую систему дифференциальных уравнений равновесия, описывающую изгиб круговой трехслойной пластины на упругом основании:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -(q_0 - q_R), \end{aligned} \quad (5)$$

где q_0 – интенсивность внешней распределенной нагрузки,

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$

$$a_3 = h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+; \quad a_4 = c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c K_3^+),$$

$$a_5 = c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+],$$

$$a_6 = h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+,$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \quad L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}.$$

Связь между реакцией основания q_r и прогибом принимаем в соответствии с моделью Пастернака, согласно которой [14]:

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (6)$$

где κ – коэффициент сжатия; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа.

С помощью первых двух уравнений системы (5) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ . После некоторых преобразований выделим дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения прогиба $w(r)$:

$$w_{,rrrr} + \frac{2}{r}w_{,rrr} - \frac{1}{r^2}w_{,rr} + \frac{1}{r^3}w_{,r} - t_{f1}(w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r}) + \kappa^4 w = q, \quad (7)$$

или

$$\Delta^2 w - t_{f1} \Delta w + \kappa^4 w = q,$$

где

$$\kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D, \quad t_{f1} = t_f D, \quad D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (7), и введем в нем замену переменной $x = \kappa r$. В результате приходим к уравнению вида

$$w_{,xxxx} + \frac{2}{x}w_{,xxx} - \frac{1}{x^2}w_{,xx} + \frac{1}{x^3}w_{,x} - 2t_0^2(w_{,xx} + \frac{1}{x}w_{,x}) + w = 0$$

или

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0, \quad (8)$$

где $2t_0^2 = t_{f1}/\kappa^2$, $\Delta w(x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x}$.

Уравнение (8) может быть приведено к системе эквивалентных ему двух уравнений второго порядка. Пусть $w = w(x)$ – некоторое частное решение однородного уравнения (8), удовлетворяющее в то же время уравнению

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad (9)$$

где λ – константа, подлежащая определению.

Исходя из уравнения (9), имеем

$$\Delta w = -\lambda w, \quad \Delta^2 w = \lambda^2 w. \quad (10)$$

Подставив теперь выражения (10) в исходное уравнение (8), получим относительно λ характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2t_0^2 \lambda + 1 = 0. \quad (11)$$

Значения корней характеристического уравнения (11) определяются формулами

$$\lambda_1 = -t_0^2 + \sqrt{(t_0^2)^2 - 1}, \quad \lambda_2 = -t_0^2 - \sqrt{(t_0^2)^2 - 1}. \quad (12)$$

Следует отметить, что для реальных грунтов значение интегральной характеристики находится в пределах $0 \leq t_0^2 \leq 1$ [14]. Случай $t_0^2 = 0$ соответствует отсутствию сил сдвига в упругом основании и $t_f = 0$.

Таким образом, корни характеристического уравнения (11) можно рассматривать как комплексно сопряженные величины

$$\lambda_1 = a = -a_1 + ib_1, \quad \lambda_2 = \bar{a} = -a_1 - ib_1, \quad (13)$$

где $a_1 = t_0^2$, $b_1 = \sqrt{1 - t_0^2}$.

Заметим, что комплексные величины (13) равны по модулю свободному члену характеристического уравнения (11), т.е.:

$$|a| = 1, \quad |\bar{a}| = 1. \quad (14)$$

Исходя из уравнения (9), можно видеть, что двум комплексно сопряженным корням (13) соответствуют два линейно независимых уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} w_{1,xx} + \frac{1}{x} w_{1,x} + a w_1 &= 0, \\ w_{2,xx} + \frac{1}{x} w_{2,x} + \bar{a} w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Общий интеграл основного дифференциального уравнения (7) может быть теперь представлен в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_p, \quad (16)$$

где w_1 и w_2 - фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям (15), а w_p - частный интеграл, соответствующий неоднородному уравнению (7).

Введем новые переменные по формулам:

$$u = \sqrt{ax}, \quad v = \sqrt{\bar{a}x}. \quad (17)$$

С введением новых переменных (17) преобразуем уравнение (15) к уравнениям Бесселя нулевого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{du^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dw_1}{du} + w_1 &= 0, \\ \frac{dw_2}{dv^2} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dw_2}{dv} + w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение системы (18), как это следует из теории бесселевых функций, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= B_1 I_0(\sqrt{ax}) + B_2 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}), \\ w_2(x) &= B_3 I_0(\sqrt{\bar{a}x}) + B_4 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}), \end{aligned} \quad (19)$$

где $I_0(\sqrt{ax})$ и $I_0(\sqrt{\bar{a}x})$ - функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, аргументов \sqrt{ax} и $\sqrt{\bar{a}x}$; $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$ - функции Ганкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Используя решение (19), перепишем общий интеграл (16) в окончательной форме

$$w = B_1 I_0(\sqrt{ax}) + B_2 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + B_3 I_0(\sqrt{\bar{a}x}) + B_4 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) + w_p. \quad (20)$$

Так как функции $I_0(\sqrt{ax})$, $I_0(\sqrt{\bar{a}x})$, $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$, являются комплексными, а функция прогибов пластины w должна быть действительной, то постоянные интегрирования B_1 , B_2 , B_3 , B_4 также должны быть комплексными числами. Для того чтобы выразить решение задачи через действительные функции, перепишем интеграл (20) в другой форме

$$w = C_1 u_0(\sqrt{ax}) + C_2 v_0(\sqrt{ax}) + C_3 f_0(\sqrt{ax}) + C_4 g_0(\sqrt{ax}) + w_p, \quad (21)$$

где введены следующие обозначения:

$$u_0(x) = \operatorname{Re} I_0(\sqrt{ax}) = \frac{I_0(\sqrt{ax}) + I_0(\sqrt{ax})}{2}, \quad v_0(x) = \operatorname{Im} I_0(\sqrt{ax}) = \frac{I_0(\sqrt{ax}) - I_0(\sqrt{ax})}{2i},$$

$$f_0(x) = \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + H_0^{(2)}(\sqrt{ax})}{2}, \quad g_0(x) = \operatorname{Im} H_0^{(2)}(\sqrt{ax}) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) - H_0^{(2)}(\sqrt{ax})}{2i}.$$

Из выражений (21) следует, что функции $u_0(x)$, $f_0(x)$ представляют собой действительные, а функции $v_0(x)$, $g_0(x)$ – мнимые части функций Бесселя и Ганкеля нулевого порядка. Так как эти функции действительны, то действительными будут и произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , которые определяются из граничных условий.

3. Упругая пластина конечных размеров

Круглая пластина под действием равномерно распределённой нагрузки. Рассмотрим расположенную на упругом однослойном основании круглую трёхслойную пластину радиуса R , находящуюся под действием равномерно распределённой нагрузки интенсивности q_0 .

Дифференциальное уравнение изгиба такой плиты может быть записано в следующем виде:

$$\Delta^2 w_1 - 2t_0^2 \Delta w_1 + w_1 = \frac{q_0 D}{\kappa^4} = \frac{q_0}{\kappa_0}, \quad (22)$$

где $x = \kappa r$ – приведённая координата, а t_0^2 и κ^4 – обобщённые характеристики пластины и упругого основания, определяемые по формулам:

$$2t_0^2 = \frac{t_{f1}}{\kappa^2}, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D.$$

В области внешней по отношению к пластине реакция основания отсутствует. В ней, справедливо однородное дифференциальное уравнение, которое следует из (6) и в безразмерных координатах имеет вид:

$$\Delta w_2 - \alpha_0^2 w_2 = 0, \quad \alpha_0^2 = \frac{\kappa_0}{t_f \kappa^2} = \frac{\sqrt{\kappa_0}}{t_f \sqrt{D}} = \frac{\kappa^2}{t_f D}. \quad (23)$$

Ранее было показано, что общее решение дифференциальных уравнений (22) и (23) может быть представлено в виде:

$$w_1 = C_1 u_0(x) + C_2 v_0(x) + C_3 f_0(x) + C_4 g_0(x) + \frac{q_0}{\kappa_0}, \quad (24)$$

$$w_2 = C_5 I_0(\alpha_0 x) + C_6 K_0(\alpha_0 x),$$

где q_0/κ_0 – частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения (24); $I_0(\alpha_0 x)$, $K_0(\alpha_0 x)$ – модифицированные бесселевы функции первого и второго рода нулевого порядка аргумента $\alpha_0 x$, C_1, \dots, C_6 – произвольные постоянные интегрирования.

Таким образом, решение задачи об изгибе трёхслойной пластины, свободно лежащей на однослойном упругом основании, определяется с точностью до шести постоянных интегрирования. Исходя из физического содержания задачи, для вычисления этих постоянных задаются граничные условия.

4. Выводы. Полученное в работе общее решение системы дифференциальных уравнений можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины при опирании ее на упругое основание Пастернака.

Рассмотренный частный случай действия равномерно распределённой нагрузки может быть использован в расчетной практике заинтересованных организаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. *Механика многослойных конструкций* / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Старовойтов, Э. И. *Сопротивление материалов* / Э. И. Старовойтов – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2000. – № 6. – С. 91.
4. Плескачевский, Ю. М. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием* / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
5. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2005. – № 1. – С. 16–22.
6. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2006. – № 3. – С. 45–50.
7. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2006. – № 4. – С. 55–62.
8. Starovoitov, E.I. *Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. 2008. Vol. 44. – № 9. – P. 1032-1040.
9. Starovoitov, E.I. *Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation* / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 47– № 5. – P. 580–589.
10. Leonenko, D.V. *Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base* / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2009. – Vol. 44 – № 5. – P. 744–755.
11. Starovoitov, E. I. *Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation* / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46 – № 2. – P. 291–298.
12. Leonenko, D. V. *Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation* / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol. 47– № 1. – P. 111–118.
13. Kuznetsova, E.L. *Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium* / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 5 – №3. – P. 359–366. doi: 10.3103/S0025654415030127.
14. Власов, В.З. *Балки, плиты, оболочки на упругом основании* / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 491 с.

E-mail: kostjaschka2009@mail.ru

Поступила в редакцию 21.10.2016