УДК 62-231.1:621.313.13

ОСОБЕННОСТИ АЛГОРИТМИЗАЦИИ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

[1]Дайняк И.В., [1]Титко Е.А., [2]Голдын Л., [3]Щебёт Р.

[1]УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск
[2]«Белостокский технический университет», Белосток, Польша
[3]«Высшая школа информатики и предпринимательства», Ломжа, Польша

Большое количество современных технических систем основано на построении траекторий на дифференциальных многообразиях с заданной точностью. Для автоматизированного управления ими предпочтительно, чтобы задание на перемещение было записано в виде дифференциального уравнения или системы уравнений, связывающих отдельные координаты. Такие системы с поведением, заданным с точностью [1] до пересечения многообразий относятся к числу голономных систем, для которых задача синтеза (построения) предполагает синтез дифференциального анализатора в виде дифференциальных уравнений, решением которых и является воспроизводимая программа движения [2].

При задании программы движений объемы потоков информации, как поступающей от задающего устройства, так и вводимого в интерполятор, велики, что вызывает большие трудности в приготовлении этой информации, в ее хранении, проверке и вводе. При задании программных движений более целесообразным оказывается управлять системой перемещений с шестью степенями свободы непосредственно от интерполятора [3].

Оператор или программа управления верхнего уровня определяет программу движений в виде технологического задания на оборудование, представленное в виде последовательности операций над заготовкой.

Операции, которые необходимо выполнить в рамках технологического процесса, впоследствии преобразуются в программу движений, которая в свою очередь описывается в виде траекторий, принадлежащих тому или иному топологическому многообразию. В результате на выходе подсистемы, формирующей программу движений будет множество точек, последовательный проход по которым представляет собой программу перемещений.

Для построения программы перемещений в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$, задаваемом прямоугольной системой координат $Oxyz$, задается некоторая кривая l, представляющая собой программу движения:

$$l:\begin{cases} x = f_1(\varphi), \\ y = f_2(\varphi), \\ z = f_3(\varphi), \end{cases} \tag{1}$$

где параметр φ пробегает некоторый отрезок $I=[\varphi_0,\varphi_1]$. Примером кривой, задаваемой таким образом, может быть полувиток спирали, выражение которого имеет вид:

$$x = \sin\varphi, \quad y = \cos\varphi, \quad z = \varphi \tag{2}$$

где $\varphi \in [0,\pi]$.

Параметр φ в выражении (1) произволен, т.е. никак не связан с возможностями и способами прохождения кривой *l*. Например, тот же полувиток (2) спирали может быть задан и по-другому:

$$x = 2\sin\varphi\cos\varphi, \quad y = 2\cos^2\varphi - 1, \quad z = 2\varphi \tag{3}$$

где $\varphi \in [0, \pi/2]$, или в виде

$$x = \sqrt{1-\varphi^2}, \quad y = \varphi, \quad z = \arccos\varphi \tag{4}$$

где $\varphi \in [-1, 1]$.

Таким образом, хотя параметрические представления (2), (3) и (4) различны, множества точек в пространстве $\mathbf{R}^3$, определяемые ими, совпадают, т. е. (2), (3) и (4) задают в $\mathbf{R}^3$ одну и ту же кривую.

Для построения управляемого движения точки по кривой *l*, заключающегося в воспроизведении этой кривой с помощью устройства (дифференциального анализатора), управляющее воздействие которого в каждый момент времени *t* заключается в изменении скорости точки вдоль каждой координаты, причем это изменение – линейная функция текущих фазовых координат точки в зависимости от времени *t* коэффициентами; эти коэффициенты и есть предмет управления [4, 5]. Кроме того, заданы ограничения, которым должен удовлетворять максимально возможный модуль *v* скорости движения точки по этой кривой. Обычно, эти ограничения заданы в виде закона $v = v(t)$ зависимости модуля максимальной скорости от времени и определяются типом управляющего устройства. Как правило, график функции $v = v(t)$ является трапецией (рис. 1).

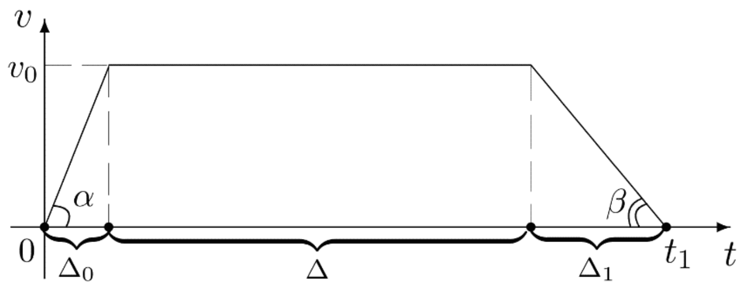

Рис. 1. Зависимость модуля максимальной скорости от времени

На рисунке 1 $\Delta_0, \Delta_1 -$ участки разгона и торможения точки соответственно (их длины фиксированы), а $\Delta -$ участок постоянства скорости v_0, который может выбираться сколь угодно большим (таким, чтобы обеспечить прохождение точкой всей кривой). Учитывая все сказанное выше, можно сформулировать следующую задачу: нужно так выбрать управление – коэффициенты $u_{ij}(t)$, $i, j = 1,2,3$, в линейной дифференциальной системе 3-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = u_{11}(t)x + u_{12}(t)y + u_{13}(t)z, \\ \dot{y} = u_{21}(t)x + u_{22}(t)y + u_{23}(t)z, \\ \dot{z} = u_{31}(t)x + u_{32}(t)y + u_{33}(t)z, \end{cases} \tag{5}$$

чтобы фазовая кривая этой системы, начавшись в начальный момент времени вектором $\left[f_1(\varphi_0), f_2(\varphi_0), f_3(\varphi_0)\right]^T$ за некоторый промежуток времени описала кривую *l* и только ее, причем чтобы в каждый момент времени *t* движения модуль скорости точки, воспроизводящей кривую *l*, не превосходил $v(t)$.

Перейдем в задании (1) кривой *l* от параметра φ (он произволен) к естественному, или, как его еще называют, натуральному, параметру $s -$ длине кривой. После такого перехода (перепараметризации) параметрическое задание кривой *l* имеет вид:

$$l:\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \\ z = z(s), \end{cases} \qquad (6)$$
$$s \in [0, S_\ell]$$

где S_l – длина кривой *l*.

Поскольку закон изменения модуля максимальной скорости точки при движении вдоль кривой задан в виде $v = v(t)$, то можем найти закон изменения длины пути *s*, пройденного точкой за время от 0 до *t*:

$$s = s(t) = \int_0^t v(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (7)$$

Остановимся подробнее на вычислении интеграла (7), поскольку функция $v(\xi)$, если говорить о рассматриваемом ее задании, дана нам только с точностью до величины $\Delta -$ длины отрезка ее постоянства. Обозначим через *L* величину

$$L = S_l - \frac{v_0}{2}(\Delta_0 + \Delta_1) \qquad (8)$$

где $L -$ разность между длиной кривой *l* и длиной, которую проходит точка на участках разгона и торможения.

Пусть $L > 0$. Тогда положим в задании функции $v = v(t)$ участок постоянства скорости $\Delta = L/v_0$ и вычислим интеграл (7) от теперь уже полностью заданной функции $v = v(t)$ (рис. 1).

Пусть теперь $L \le 0$. Тогда, если требовать, чтобы кривая *l* была пройдена за наименьшее время, участка постоянства скорости с некоторым $v_1 \le v_0$ быть не может и, как легко подсчитать (площадь под графиком $v = v(t)$ должна быть равна S_l), функция $v = v(t)$ имеет вид, показанный на рис. 2, где

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S_\ell(k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}}, \quad \tau = \frac{k_2 t_1}{k_1 + k_2}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{2S_\ell k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}} \qquad (9)$$

и $k_1 = \mathrm{tg}\alpha,\ k_2 = \mathrm{tg}\beta$.

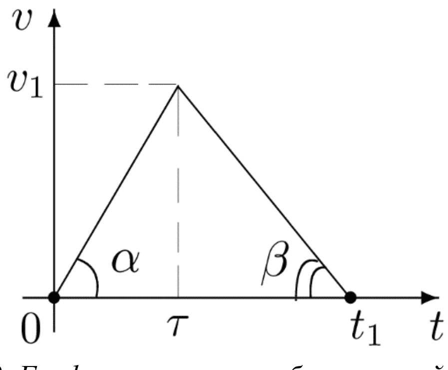

Рис. 2. График скорости изображающей точки

Это значит, в случае $L \le 0$ интеграл (7) – это интеграл от функции, показанной на рис. 2, параметры которой задаются формулами (9).

Теперь, воспользовавшись соотношением (7), перейдем в (1) от натурального параметра *s* (длины) к параметру *t* (время):

$$l:\begin{cases} x = x(s(t)), \\ y = y(s(t)), \\ z = z(s(t)), \end{cases} \tag{10}$$

или, обозначив в (10) $x(s(t)) = X(t)$, $y(s(t)) = Y(t)$, $z(s(t)) = Z(t)$, окончательно получим:

$$l:\begin{cases} x = X(t), \\ y = Y(t), \\ z = Z(t). \end{cases} \tag{11}$$

Итак, получили равенства (11), которые задают закон движения точки по кривой l в зависимости от времени t (при заданном модуле скорости $v = v(t)$ движения точки).

Алгоритмически этот основной переход $\varphi \to s \to t$, состоящий в замене произвольного параметра φ в задании кривой l к временному параметру t можно описать с помощью следующих шагов.

Шаг 1. Взяв кривую l в форме (1), вычисляем длину $s = s(\varphi)$ кривой l как функцию параметра φ:

$$s(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(f_1'(\varphi))^2 + (f_2'(\varphi))^2 + (f_3'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]. \tag{12}$$

Функция $s = s(\varphi)$ – возрастающая на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$, поэтому существует обратная ей функция $\varphi = \omega(s)$, $s \in [0, S_l]$ $(S_l = s(\varphi_1))$. Сделаем замену переменной:

$$l:\begin{cases} x = f_1(\omega(s)), \\ y = f_2(\omega(s)), \\ z = f_3(\omega(s)), \end{cases} \tag{13}$$

или, обозначив $f_1(\omega(s)) = x(s)$, $f_2(\omega(s)) = y(s)$, $f_3(\omega(s)) = z(s)$, получим параметризацию (6) кривой l через ее натуральный параметр s.

Шаг 2. Этот шаг аналогичен шагу 1: вычислим интеграл (7), т. е. найдем $s = s(t)$ и, сделав в (6), или, что то же, в (13), замену $s = s(t)$, получим задание (10), или задание (11) кривой l через временной параметр t.

Кривая l задана формулами (11), в которых параметр t – время (к этим формулам мы приходим с помощью шагов 1 и 2). Нужно так выбрать коэффициенты-управления $u_{ij}(t)$, $t \geq 0$, $i, j = 1,2,3$, чтобы у системы (5) имелось решение $[X(t), Y(t), Z(t)]^T$, где $X(t), Y(t), Z(t) -$ функции (11). Коэффициенты-управления $u_{ij}(t)$, $i, j = 1,2,3$, ищутся в классе непрерывных функций.

В такой, общей (т. е. если считать функции u_{ij} не зависящими друг от друга) постановке задача легко разрешима – можно указать бесконечное множество систем (5), реализующих любую кривую l. Поэтому мы можем заранее задаться каким-либо критерием качества управляющей системы (5) и искать коэффициенты-управления в этом классе. Например, можно считать, что коэффициенты u_{ij} не должны превосходить по абсолютной величине некоторую константу, или что матрица коэффициентов системы (5) должна иметь заранее заданный вид, или что число не тождественно нулевых коэффициентов должно быть минимальным и т.д.

Так как система (5) удовлетворяет теореме существования и единственности и имеет тождественно нулевое решение, то никакая ее фазовая кривая l не может проходить через начало координат. Это условие считаем в дальнейшем выполненным, т. е., равносильно,

$$X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t)\neq 0,\ \forall t \tag{14}$$

где $X(t),Y(t),Z(t)-$ функции (11).

Если заранее на матрицу коэффициентов системы (5) не накладывать никаких дополнительных ограничений, то для любой кривой l, не проходящей через начало координат, можно определить коэффициенты $u_{ij}(t)$, $i,j=1,2,3$ системы (5) сразу и в общем виде, так, чтобы l была ее фазовой кривой. Действительно, учитывая выражение (14) и обозначая

$$D=X^2(t)+Y^2(t)+Z^2(t) \tag{15}$$

положим:

$$\begin{aligned}
&u_{11}(t)=\frac{X(t)\dot X(t)}{D},u_{12}(t)=\frac{Y(t)\dot X(t)}{D},u_{13}(t)=\frac{Z(t)\dot X(t)}{D};\\
&u_{21}(t)=\frac{X(t)\dot Y(t)}{D},u_{22}(t)=\frac{Y(t)\dot Y(t)}{D},u_{23}(t)=\frac{Z(t)\dot Y(t)}{D};\\
&u_{31}(t)=\frac{X(t)\dot Z(t)}{D},u_{32}(t)=\frac{Y(t)\dot Z(t)}{D},u_{33}(t)=\frac{Z(t)\dot Z(t)}{D};
\end{aligned} \tag{16}$$

где $X(t),Y(t),Z(t)-$ функции (11). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что вектор-функция $[X(t),Y(t),Z(t)]^T$ – решение системы (5) с так определенными коэффициентами, а значит, l – ее фазовая кривая.

Полученные в выражениях (15) функции $u_{ij}(t)$, $i,j=1,2,3$, могут быть реализованы в формирующем команды внешнем контроллере системы управления [6, 7] или полностью запрограммированы в задающей программе более высокого уровня на управляющем компьютере.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования / В.В. Жарский [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. С.Е. Карповича. – Минск : Бестпринт, 2013. – 208 с.*
2. *Карпович, С.Е. Имитационное моделирование голономных и мобильных автоматических систем / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : Белпринт, 2008. – 212 с.*
3. *Карпович, С.Е. Системы перемещений на основе привода прямого действия / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. – Минск : БГУИР, 2008. – 239 с.*
4. *Heimann, B. Mechatronika. Komponenty, metody, przyklady / B. Heimann, W. Gerth, K. Popp. – Warzawa : PWN, 2001. – 351 s.*
5. *Shetty, D. Mechatronics System Design / D. Shetty, R. Kolk. – Cengage Learning, 2010. – 504 p.*
6. *Innovative Algorithms and Techniques in Automation, Industrial Electronics and Telecommunications / T. Sobh [et al]. –Springer Science & Business Media, 2007. – 552 p.*
7. *Zentner, J. Zur optimalen Gestaltung von Parallelkinematikmaschinen mit Planarantrieben / J. Zentner. – Illmenau : ISLE, 2006. – 123 s.*

E-mail: dainiak@bsuir.by

Поступила в редакцию 21.09.2016