УДК 629.7

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

Докт. техн. наук, проф. ЛОБАТЫЙ А. А., асп. ИКУАС Ю. Ф.

Белорусский национальный технический университет

В условиях полета беспилотного летательного аппарата (БЛА) возможна ситуация, когда необходимо перевести БЛА из заданной точки x_0 в некоторую конечную $x_к$ по оптимальной траектории с обеспечением минимума потерь на управление [1]. В общем случае координата $x_к$ может изменяться в процессе полета БЛА при изменении полетного задания.

Современные интеллектуальные технологии позволяют реализовать на борту БЛА алгоритмы управления, основанные на использовании сложных математических моделей большой размерности. Однако на практике это, как правило, не обеспечивает определения строго оптимального управления БЛА, так как допущения, которые приходится принимать в используемых математических моделях, а также методические ошибки фактически сводят на нет все усилия по оптимизации управления. В ряде случаев целесообразнее решить задачу поиска оптимального управления для простой модели, что позволяет получить точный результат, а затем использовать полученное решение в алгоритмах, разработанных на основе многомерной модели процесса наведения БЛА с учетом ограничений.

Кинематическая схема наведения БЛА в плоскости маневра $O\xi\eta$ представлена на рис. 1, где $\vec{D}(t)$ – вектор текущей дальности между x_0 и $x_к$; $\vec{a}(t)$ – вектор нормального (управляющего) ускорения БЛА относительно вектора $\vec{D}(t)$; $\omega(t)$ – угловая скорость вращения вектора $\vec{D}(t)$ в системе координат $O\xi\eta$; $\vec{v}(t)$ – скорость перемещения точки $x_к$.

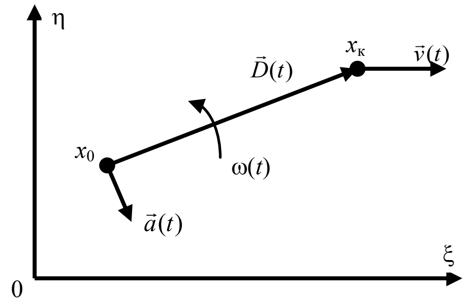


Рис. 1. Кинематическая схема наведения БЛА

Рассмотрение такой схемы позволяет на этапе аналитического решения оптимизационной задачи не учитывать нелинейности, обусловленные преобразованием координат, и свести нелинейную в общем случае математическую модель к линейной.

Модель процесса наведения БЛА при данной постановке задачи имеет вид [2]

$$\dot{\omega} + \frac{2\dot{D}}{D}\omega = \frac{1}{D}a, \quad \omega(t_0) = \omega_0, \qquad (1)$$

где $\dot{D}$ – скорость сближения БЛА и точки $x_к$; $a = a(t)$ – нормальное (управляющее) ускорение БЛА.

Предположим, что законы изменения $D(t)$, $\dot{D}(t)$ и $\vec{v}(t)$ заданы (прогнозируются). Следовательно, $a^*(t)$ – искомое оптимальное управление движением БЛА. Обозначив $-\frac{2\dot{D}(t)}{D(t)} = A(t)$; $\frac{1}{D(t)} = B(t)$, уравнение (1) можно переписать в виде

$$\dot{\omega} = A\omega + Ba, \tag{2}$$

где аргумент t для упрощения записи опущен.

Минимизируемый функционал качества зададим в квадратичной форме – стандартной для задач такого класса

$$J_0 = K_1\omega^2(t_к) + \int_{t_0}^{t_к} K_2 a^2 dt \to \min, \tag{3}$$

где $\omega(t_к) = \omega_к$.

Терминальный член функционала (3) в данном случае характеризует обеспечение требуемой угловой скорости $\omega(t_к) = \omega_к$, которая определяет условия, необходимые для выполнения БЛА последующего маневра. Интегральный член характеризует потери на управление. Коэффициенты K_1 и K_2 выбираются из условия одинаковой размерности терминального и интегрального членов функционала (3). Удобно задавать их в виде:

$$K_1 = \frac{1}{\omega_{\max}^2}; \quad K_2 = \frac{1}{a_{\max}^2}, \tag{4}$$

где $\omega_{\max}$, $a_{\max}$ – максимально допустимые значения ω и a соответственно.

Задача поиска оптимального ускорения (оптимального управления в задаче Больца) может быть решена методами динамического программирования или с использованием принципа максимума Понтрягина. При этом метод динамического программирования сводит задачу оптимального управления к решению уравнения Беллмана в частных производных. В то же время с помощью принципа максимума решение задачи управления сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что представляется более простым, особенно при увеличении размерности математической модели вектора фазовых координат системы.

В силу этого рассмотрим применение принципа максимума для определения оптимального программного управления $a(t)$ БЛА при выводе его в заданную точку.

В соответствии с классическим подходом [3] составляем гамильтониан (функцию Понтрягина)

$$H(\omega, a, \psi, t) = \psi_1 f_1 + \psi_2 F_0, \tag{5}$$

где f_1 – правая часть уравнения состояния (2); F_0 – подынтегральная часть функционала качества (3); ψ_1, ψ_2 – вспомогательные функции ($\psi_2 = -1$; ψ_1 – не определена).

Подставив значения f_1, F_0, ψ_2, перепишем выражение (5) в виде

$$H(\omega, a, \psi, t) = \psi_1(A\omega + Ba) - K_2 a^2. \tag{6}$$

Считая, что ограничения на управление отсутствуют, находим максимум гамильтониана, применив необходимые условия безусловного экстремума

$$\frac{\partial}{\partial a} H(\omega, a, \psi, t) = \psi_1 B - 2K_2 a = 0. \tag{7}$$

Следовательно, структура оптимального управления

$$a^* = a^*(t) = \frac{\psi_1(t)B(t)}{2K_2}. \tag{8}$$

Найденное управление обеспечивает максимум функции $H(\omega, a, \psi, t)$ по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума – отрицательное значение второй производной гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} H(\omega, a, \psi, t) = -2K_2 < 0,$$

поскольку по условию задачи $K_2 > 0$.

С учетом (2), (6), (8) система канонических уравнений Понтрягина [3] для нашей задачи имеет вид:

$$\dot{\omega}(t) = \frac{\partial}{\partial \psi_1} H(\omega, a, \psi, t) =$$
$$= A(t)\omega(t) + \frac{\psi_1(t) B^2(t)}{2K_2}; \qquad (9)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial}{\partial \omega} H(\omega, a, \psi, t) = -\psi_1(t) A(t). \qquad (10)$$

Начальные условия уравнения (9) $\omega(t_0) = \omega_0$ – угловая скорость БЛА в точке x_0. Для определения недостающих краевых условий (10) $\psi_1(t_к)$ проверяем условия трансверсальности (условия минимума функционала J_0), которые в общем случае имеют вид [4]:

$$\delta\varphi_0(t_к) - H(x^*, u^*, \psi, t_к)\delta t_к +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t_к)\delta x_i(t_к) = 0, \qquad (11)$$

где δ(…) – вариация (бесконечно малое смещение) соответствующей переменной; φ_0 – терминальный член функционала качества; $H(x^*, u^*, \psi, t_к)$ – значение гамильтониана в точке $(x^*, u^*, t_к)$; u^* и x^* – оптимальное управление и оптимальная фазовая траектория соответственно.

Применительно к нашей задаче имеем: $n = 1$; $x = \omega$; $u = a$; $\varphi_0 = K_1\omega^2(t_к)$; $\delta\varphi_0 = \delta(K_1\omega^2) = 2K_1\omega\delta\omega$ при $t = t_к$.

Возможны два варианта – две задачи управления БЛА. В первом случае заданы конечные условия $\omega(t_к) = \omega_к$ ($\delta\omega = 0$) и не определен момент окончания наведения БЛА ($\delta t_к \neq 0$). Во втором случае момент окончания наведения задан, т. е. $\delta t = 0$, следовательно, $\delta\omega \neq 0$.

Рассмотрим наиболее характерный первый случай, когда $\delta\omega = 0$. Поскольку $t_к$ – не фиксировано ($\delta t_к \neq 0$), то из (11) следует, что

$$H(\omega^*, a^*, \psi, t_к) = \psi_1(A\omega_к^* + Ba^*) - K_2 a^{*2} = 0. \qquad (12)$$

Подставим в (12) значение a^* из (8) и вычислим значение ψ_1

$$\psi_1\left(A\omega_к^* + B\frac{\psi_1 B}{2K_2}\right) - K_2\left(\frac{\psi_1 B}{2K_2}\right)^2 = 0;$$

$$\psi_1\left(4K_2 A\omega_к^* + \psi_1 B^2\right) = 0; \qquad (13)$$

$$\psi_{11} = 0; \quad \psi_{12} = \frac{-4K_2 A}{B^2}\omega_к^* = \psi_к.$$

Решение $\psi_{11} = 0$ отбрасываем, так как в этом случае $a^* = 0$.

С учетом (13) уравнение (10) решаем аналитически и получаем

$$\psi_1 = \psi_к e^{A(t_к - t)}. \qquad (14)$$

Подставив (14) в (8), получим окончательное выражение для программного (без обратной связи по фазовым координатам) управления

$$a^* = -\frac{2A\omega_к}{B} e^{A(t_к - t)}. \qquad (15)$$

С учетом введенных обозначений закон изменения потребной управляющей перегрузки БЛА будет

$$a^* = 4\dot{D}\omega_к e^{\frac{-2\dot{D}}{D}(t_к - t)}. \qquad (16)$$

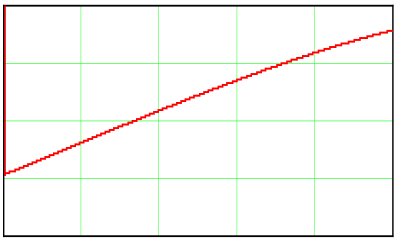
Заметим, что при $t_к = t$ терминальный функционал качества (3) превращается в локальный, а зависимость (16) – в закон управления при методе пропорционального наведения с навигационной постоянной, равной четырем [2].

При известном значении оптимальной перегрузки $a^* = a^*(t)$ определим аналитически оптимальный закон изменения ω^* (оптимальную траекторию фазовой координаты ω). Для этого подставим (15) в уравнение (2) и решим его аналитически при известных начальных условиях $\omega(t_0) = \omega_0$. В результате получим

$$\omega^* = \frac{1}{A}\left[(A_0\omega_0 + B_0 a_0^*)e^{At} - Ba^*\right]. \qquad (17)$$

Из выражения (17) при $t = t_к$; $\omega^* = \omega_к^*$; $A = A_к$; $B = B_к$ находится оптимальное время наведения БЛА

$$t_{\text{к}} = t_{\text{к}}^{*} = \frac{1}{A_{\text{к}}} \ln \left[\frac{A_{\text{к}}\omega_{\text{к}}^{*} + B_{\text{к}}a^{*}}{A_0\omega_0 + B_0 a_0^{*}} \right].$$



В качестве примера рассмотрим применение полученных законов a^* и ω^* в типовой ситуации наведения БЛА при следующих условиях применения: $\dot{D} = -50$ м/с; $D_0 = 10000$ м; $\omega_0 = 0$; $\omega_{\text{к}} = -0{,}01$ 1/с. На рис. 2 представлены графики изменения a^* и ω^*, полученные моделированием в среде MathCad.

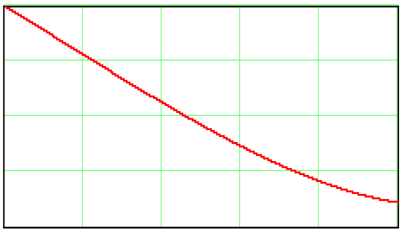


Рис. 2. Оптимальные параметры наведения БЛА

Результаты моделирования показывают, что поведение a^* и ω^* при наведении БЛА соответствует требованиям, предъявляемым к системе наведения (постепенное убывание управляющего ускорения a^* при стремлении ω^* к заданному значению).

ВЫВОД

Аналитически получен оптимальный закон изменения перегрузки БЛА. Особенностью применения принципа максимума для синтеза закона управления БЛА является решение двухточечной краевой задачи, что для многомерных систем вызывает затруднение. Для практической реализации данного закона на борту БЛА необходимо учесть вращение введенной в рассмотрение подвижной системы координат $O\xi\eta$ относительно неподвижной, а также аэродинамические свойства БЛА и динамические характеристики управляющих подсистем, что является задачей синтеза регулятора многомерной системы, входной переменной которой будет полученное аналитически значение $a^*(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красильщиков, М. Н.** Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / М. Н. Красильщиков, Г. Г. Серебряков. – М.: Наука, 2005. – 280 с.

2. **Меркулов, В. И.** Авиационные системы радиоуправления. – Т. 2: Радиоэлектронные системы самонаведения / под ред. А. И. Канащенкова и В. И. Меркулова. – М.: Радиотехника, 2003. – 390 с.

3. **Математическая** теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

4. **Пупков, К. А.** Методы классической и современной теории автоматического управления. – Т. 2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / К. А. Пупков, Н. В. Егупов. – М.: Изд-во МГТУ имени Баумана, 2004. – 640 с.

Поступила 02.11.2011