

## ДВИЖЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ ПО ПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЛИ МАГНИТОСТРИКЦИОННОГО ЭФФЕКТОВ И ГРАВИТАЦИИ

Чигарев В.А., маг. Михнович М.О.

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Миниатюризация машин и в первую очередь мобильных роботов различного назначения, стимулирует разработку и применения новых принципов движения [1,2], источников энергии и её преобразования [3-8] материалов и конструкций [9].

Электро и магнитоупругие материалы, способные деформироваться под действием электрических и магнитных полей находят все более широкое применение в акустооптоэлектронике, в частности для возбуждения акустических объёмных и поверхностных волн [10-11]. Волнообразные движения деформируемых тел могут быть трансформированы в поступательное движение тела при наличии связей, трансформирующих внутреннюю энергию тела в кинетическую энергию поступательного движения [12].

Модели деформируемых тел, создаваемые на основе принципов бионики, привлекают внимание исследователей ещё со времён Л. да Винчи, однако доведение результатов до конечного продукта стало возможным в последние десятилетия в связи с созданием новых материалов-композитов, позволяющих уже на стадии проектирования конструкции реализовать системный подход, проектируя одновременно конструкцию и структуру материала, обеспечивающих изделию необходимые механические свойства.

Динамика шара на шероховатой поверхности привлекает внимание исследователей более ста лет. Устойчивость и управляемость сфероидов, различные механизмы поступательного движения освещены во многих публикациях [1,2,13].

Сравнительно новым направлением в робототехнике является применение пьезоэлектриков, магнитоупругих материалов для создания поступательного движения микро и минироботов [1-5].

В работе предлагается электроупругая модель поступательного перемещения (качения) миниробота, имеющего форму полого шара из пьезоэлектрика и электродированного снаружи и изнутри металлическими пленками, границами которых являются разделительные линии меридионального и широтного направлений. Внутри шара может быть смонтирована система управления (микропроцессоры), источник электричества (аккумуляторы), датчики (сенсоры). Выбор физико-механических характеристик материала определяется требуемыми функциями миниробота, а выбор конструкции в виде шара исходит из требований повышенной маневренности. Отметим принципиальное отличие мобильных роботов, у которых шар выполняет функции колеса и приводится в движение механическими приводами от пьезоэлектрического, который катится за счёт локального изменения геометрии под действием электрического поля [1,2]. Предлагаемая модель использует энергию гравитационного поля Земли подобно тому, как это делают все живые организмы. С помощью электрического поля создается волновое перемещение зоны деформации по внешней поверхности вдоль меридиана, тогда получаем анизотропию коэффициента трения качения и одновременно потерю устойчивости деформированного шара в этом же направлении, что инициирует и поддерживает требуемое поступательное движение.

### **1. Постановка задачи для выпуклого тела произвольной формы.**

Рассмотрим выпуклое тело, расположенное на плоскости  $OXY$ , рисунок 1, в неподвижной системе координат  $OXYZ$ . С телом жестко свяжем систему координат

$S_{xyz}$ , начало которой находится в центре масс точке  $C$ , оси координат  $x, y, z$  направлены вдоль главных центральных осей симметрии тела.

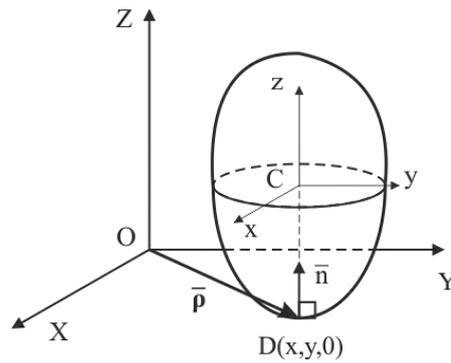


Рис. 1. Выпуклое твёрдое тело, расположенное на плоскости  $OXY$

Точка  $C$  проецируется в точку  $D$ , если тело находится в равновесии. Как известно, равновесие устойчивое, если потенциальная энергия минимальна и неустойчивое, если – максимальна. Запишем уравнение поверхности  $S$ , ограничивающей тело в системе  $S_{xyz}$  в виде

$$f(x, y, z) = 0, \quad (1.1)$$

Вектор внутренней единичной нормали  $\bar{n}$  в точке  $D$  вычисляется по формуле:

$$\bar{n} = -\frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}. \quad (1.2)$$

Очевидно, вектор  $\bar{n}$  направлен по вертикали вдоль  $DC$ .

Пусть материал тела - пьезокерамика или пьезомагнитный полимер и тело содержит внутри себя источники электрического или магнитного полей, под действием которых может деформироваться вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта или магнитострикции таким образом, что происходит потеря устойчивости и тело начинает катиться.

Уравнение поверхности (1.1) разложим в ряд в окрестности точки  $C$  системы координат  $S_{xyz}$ , считая, что оси  $S_x, S_y$  направлены по касательным к линиям главных кривизн поверхности  $S$  в точке  $D$

$$f = -h + z + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2}\right) + \dots = 0, \quad (1.3)$$

где  $h = DC, R_1, R_2$  - главные радиусы кривизн поверхности  $S$  в точке  $D$ .

Если отклонить тело из положения равновесия так, что оно будет касаться плоскости в точке  $D_*$  близкой к точке  $D$ , то потенциальная энергия изменяется и вычисляется по формуле

$$\Pi = mgl, l = -(\bar{n}_* \times \overline{CD_*}), \quad (1.4)$$

где  $\bar{n}_*$  - внутренняя единичная нормаль в точке  $D_*$  к поверхности  $S$ .

Компоненты  $\bar{n}_* = (\bar{n}_{1*}, \bar{n}_{2*}, \bar{n}_{3*})$  согласно формуле (1.2) имеют вид

$$n_{1*} = -\frac{x}{R_1} + \dots, n_{2*} = -\frac{y}{R_2} + \dots, n_{3*} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2}\right) + \dots \quad (1.5)$$

Тогда из (1.4) получим разложение для потенциальной энергии в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}mg\left(\frac{R_1 - h}{R_1^2}x^2 + \frac{R_2 - h}{R_2^2}y^2\right) + \dots \quad (1.6)$$

Из представления (1.6) следует, что положение равновесия устойчиво, если центр тяжести  $C$  будет находиться ниже обоих центров главных кривизн поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, если же центр тяжести лежит выше хотя бы одного из центров главных кривизн, то тело согласно теоремам Ляпунова потеряет устойчивость и начнет катиться в сторону соответствующего центра главной кривизны [13-15].

Таким образом, деформируя тело определенным образом за счет внутренних источников энергии, можно инициировать поступательное движение тела в нужном направлении в гравитационном поле.

Уравнения движения в векторном виде можно записать следующим образом [13-15]. Движение центра масс описываются уравнениями

$$\dot{\vec{V}}_C + \vec{\omega} \times \vec{V}_C = -g\vec{n} + \frac{1}{m}\vec{R}. \quad (1.7)$$

Вращательные движения тела описываются уравнениями

$$\dot{\vec{K}} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{\rho} \times \vec{R}, \quad (1.8)$$

где  $m$  - масса тела,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\vec{V}_C$  - скорость центра масс,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость тела,  $\vec{K}$  - кинетический момент тела относительно центра масс,  $\vec{R}$  - реакция опорной плоскости.

Так как вектор  $\vec{n}$  в точке касания всегда направлен перпендикулярно к плоскости, то имеем уравнения:

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{n}}{\tilde{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{n} = 0 \text{ в точке } D \quad (1.9)$$

Здесь знаком  $\frac{\tilde{d}}{dt}$  обозначается локальная производная.

Таким образом, система уравнений (1.7) -(1.9) определяет динамику движения тела как твердого целого по плоскости. Как известно, в общем случае сложное движение состоит из качения, скольжения, вращения.

Пусть тело находится в состоянии устойчивого равновесия, которое характеризуется минимумом потенциальной энергии, что имеет место в случае, когда центр масс расположен ниже центров главных кривизн поверхности  $S$  в окрестности точки  $D$ .

Учтем деформируемость реальных тел, вследствие чего рассматриваемое тело контактирует с плоскостью не в одной точке  $D$ , а в некоторой окрестности  $S_D$ , в пределах которой находится проекция центра масс [14,15].

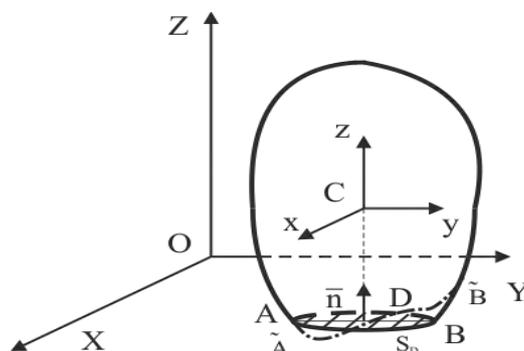


Рис. 2. Тело, расположенное на плоскости OXY и деформирующееся под действием собственного веса

Тело находится в состоянии устойчивого равновесия пока проекция точки  $C$  не выходит за границу области  $S_D$ .

Посредством электрострикции или магнитострикции деформируем тело в окрестности точки  $D$  так, чтобы оно пришло в состояние неустойчивого равновесия, что имеет место, как сказано выше, в случае, когда радиусы главных кривизн можно уменьшить настолько, чтобы центр масс оказался выше, по крайней мере, одного из центров главных кривизн. В этом случае тело теряет статическую устойчивость и начинает катиться так, что линия главной кривизны является касательной линией между телом и плоскостью. Если тело симметрично в окрестности  $D$  согласно (1.3), и деформируется симметрично, то возникает бифуркация, что может приводить к неопределенности направления движения (хаотизации) движения. Для разрушения бифуркации деформация вдоль линии главной кривизны должна быть несимметричной. Это аналогично тому, как при устойчивости стержня бифуркацию можно разрушить за счет малой начальной погиби стержня. В рассматриваемом случае электрострикционных или магнитострикционных эффектов качение тела в выбранном направлении можно осуществить за счет деформации сжатия тела вдоль  $DB$  и деформации выпучивания вдоль  $AD$  так, что прямая линия  $ADB$  тела трансформируется в кривую линию  $\tilde{A}D\tilde{B}$ .

Рассмотрим вопрос об управляемом качении тела, т.е. движении тела под действием внутренних или внешних сил в требуемом направлении. Для этого в теле необходимо иметь актуаторы, под действием которых, тело деформируется асимметрично в соответствии с заданным алгоритмом и за счет потери устойчивости катится в заданном направлении под действием силы тяжести. В этом случае электро- и магнитострикционные актуаторы играют вспомогательную роль спусковых механизмов. Здесь имеет место аналогия с биологическими объектами, эффективно использующими силу тяжести Земли для своего поступательного движения.

## 2. Качение деформируемого шара по шероховатой поверхности.

В качестве конкретного тела рассмотрим шар массой  $m$  и радиусом  $R_0$ , покоящийся в начальный момент на плоскости  $OXY$ .

Движение будем рассматривать в неподвижной системе  $OXYZ$ . С центром масс шара связаны кинематическая система координат  $CX'Y'Z'$ , оси которой во время движения остаются параллельными осям неподвижной системы координат  $OXYZ$  и подвижная система координат  $Cx_1y_1z_1$ , оси которой жестко связаны с шаром.

Уравнение шара в системе  $OXYZ$  имеет вид

$$\left(\frac{X-X_C}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{Y-Y_C}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{Z-Z_C}{R_0}\right)^2 = 1. \quad (2.1)$$

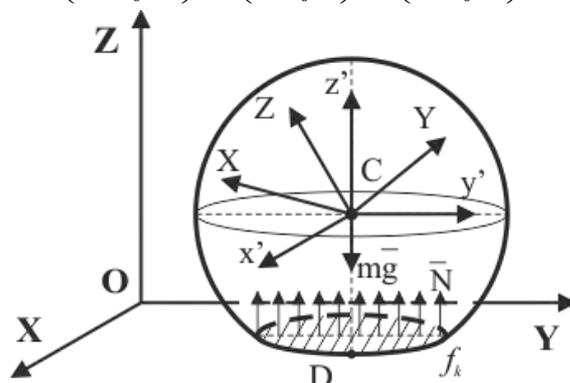


Рис. 3. Шар, расположенный на плоскости  $OXY$  и деформирующийся под действием собственного веса

Так как шар деформируемый, то под действием собственного веса в окрестности точки  $D$  образуется круг - область плоского контакта  $S_D$ . За счет образования этой области потенциальная энергия деформированного шара уменьшится за счет опускания

центра масс  $C$  на величину  $\delta_h$ , равной высоте сегмента. Шар находится в состоянии устойчивого равновесия, если при его качании около точки  $D$ , проекция точки  $C$  не выходит за границу области  $S_D$ . Случай, когда проекция  $C$  находится на границе, соответствует состоянию неустойчивого равновесия и соответствует точке бифуркации системы. При выходе проекции центра масс  $C$  за границы  $S_D$  момент силы  $P = mg$  оказывается достаточным, чтобы шар покатился. Процесс качения будет продолжаться, пока центр масс будет проектироваться в точки, бегущие перед границей  $S_D$ . Ситуацию можно сравнить с перевернутым маятником, который начав движение из состояния неустойчивого равновесия будет вращаться, если его кинетическая энергия больше нуля при прохождении верхнего положения. Однако можно добиться вращательного движения маятника из состояния неустойчивого равновесия, если, например, в момент вертикального положения маятника, мгновенно искривлять невесомый стержень маятника на бесконечно малую величину в сторону вращения так, что будет возникать бесконечно малый момент силы тяжести, поддерживающий режим вращения. В фазовой плоскости это соответствует траекториям, сколь угодно близко расположенным с внешних сторон к сепаратриссам в фазовой плоскости.

Как известно, коэффициент трения качения  $f_k$  имеет размерность длины [13-15] и равен для рассматриваемого шара радиусу круга  $S_D$  - области контакта. Шар находится в равновесии, пока моменты силы тяжести и реакции плоскости уравновешивают друг друга.

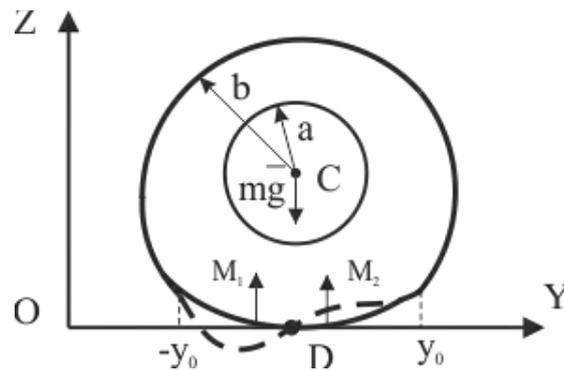


Рис. 4. Сечение шара вертикальной плоскостью  $OYZ$ , пунктиром изображена деформация в окрестности точки  $D$  под действием электрического поля

Рассмотрим напряжение  $\sigma_{33}$ , распределённое по кругу  $S_D$ , рисунок 3. Проинтегрируем напряжение  $\sigma_{33}$  по площади  $S_D$ , тогда условие равновесия имеет вид

$$mg = \iint_{S_D} \sigma_{33} ds \approx \langle \sigma_{33} \rangle \cdot \pi R_D^2, \quad (2.2)$$

где  $\langle \sigma_{33} \rangle$  - среднее напряжение по  $S_D$ ,  $R_D$  - радиус области  $S_D$ .

Условие равновесия

$$M_1 + M_2 = 0, M_{1,2} = \pm \frac{mg}{2} R_D, \quad (2.3)$$

будет нарушаться, если  $M_1$  или  $M_2$  уменьшить или увеличить за счет  $R_D$ . Пусть уменьшается  $R_D$  в выражении для  $M_2$  за счет деформации в направлении  $OY$ . Это можно получить за счет электро- или магнитоэлектрических эффектов радиальной деформации шара

Деформация линии меридиана изображена пунктирной линией на рисунке 4.

### 3. Напряженно-деформированное состояние в поллой пьезокерамической сфере под действием электрического поля.

Поступательное движение пьезокерамического шара по поверхности возникает за счет создания состояния неустойчивого равновесия в начальный момент времени, а затем за счет бегущей волны деформации внешней поверхности шара. Конструктивно это можно реализовать, если наружную  $r = b$  и внутреннюю  $r = a$  поверхности шара электродировать, а затем нанести сетку из параллелей и меридианов, по которым сделать разрезы электродных слоев. Подавая последовательно ток на две пластинки, разделенные меридианом, получим волну радиальной деформации, распространяющуюся вдоль выбранного меридиана, причем меридиан будет катиться по средней линии области  $S_D$ . В работах, посвященных волновому переносу вещества [12] вводится термин «эстафетный перенос вещества». В данном случае движение волны деформации по поверхности сферы не сопровождается переносом вещества и может быть определено как эстафетный перенос энергии деформации, приводящий к поступательному движению шара (переносу вещества) по опорной поверхности.

Возвращаясь к общему случаю движения деформируемого тела, сформулированному в разделе 1, выпишем систему уравнений, описывающую упругие и электромагнитные поля в пьезоэлектрических материалах [4-7].

Уравнения динамического деформирования имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  - напряжение,  $u_i$  - перемещения,  $\rho$  - плотность материала сферы.

Уравнения электродинамики сплошной среды без учета внешних токов и свободных зарядов запишем в виде

$$\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \bar{D} = 0; \quad (3.2)$$

$$\text{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \quad \text{div} \bar{B} = 0; \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D e_{kl} - h_{ijm} D_m; \quad (3.4)$$

$$E_m = -h_{mij} e_{ij} + B_{mk}^l D_k, \quad (3.5)$$

где  $e_{kl}$  - тензор малых упругих деформаций,  $C_{ijkl}^D$  - тензор модулей упругости при постоянной электрической индукции,  $h_{ijm}$  - тензор адиабатических пьезоэлектрических констант,  $B_{mk}^l$  - адиабатические диэлектрические константы при постоянных деформациях.

Вид определяющих уравнений (3.4), (3.5) зависит от выбора термодинамических потенциалов. Если в качестве независимых переменных выбрать деформации  $e_{ij}$  и напряженность электрического поля  $E_i$ , то тогда зависимыми переменными будут механические напряжения  $\sigma_{ij}$ , электрическая индукция  $D_i$  и энтропия  $S$ . В этом случае соответствующим термодинамическим потенциалом является электрическая функция Гиббса [6,7]:

$$G_e = V - E_m D_m - TS, \quad (3.6)$$

где  $V$  - внутренняя энергия,  $T$  - температура.

Определяющие уравнения в этом случае могут быть записаны в виде:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{E,T} e_{kl} - \xi_{ijm}^T E_m; \quad (3.7)$$

$$D_m = \varepsilon_{mk}^{e,T} E_k + \xi_{ijm}^T e_{ij}; \quad (3.8)$$

$$\Delta S = \lambda_{ij}^E e_{ij} + \rho_m^e E_m, \quad (3.9)$$

где  $\xi_{ijm}^T$  - тензор пьезоэлектрических констант,  $\varepsilon_{mk}^{e,T}$  - тензор диэлектрических проницаемостей.

Для связанных систем уравнений (3.1) - (3.3), (3.4), (3.5) или (3.7), (3.8), (3.9) формулируются соответствующие граничные и начальные условия.

Уравнения (3.1) - (3.2) упрощаются для конкретных элементов конструкций. В частности, для полого шара в сферической системе координат для (3.1) получим

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \quad (3.10)$$

где  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}$  - напряжения радиальные и окружные, соответственно  $u_r$  - радиальное перемещение,  $\rho$  - плотность.

Уравнения (3.2), (3.3) в приближении квазиэлектростатики запишутся в виде [6,7]

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2}{r} D_r = 0, \quad (3.11)$$

где  $D_r$  - радиальная составляющая вектора перемещений.

Для случая радиальной поляризации определяющие соотношения (3.7) записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{13}^E e_{\theta\theta} + c_{13}^E e_{\varphi\varphi} + c_{13}^E e_{rr} - \xi_{33} E_r; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{11}^E e_{\theta\theta} + c_{12}^E e_{\varphi\varphi} + c_{13}^E e_{rr} - \xi_{31} E_r; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12}^E e_{\theta\theta} + c_{11}^E e_{\varphi\varphi} + c_{13}^E e_{rr} - \xi_{31} E_r, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $E_r = -d\varphi/dr$  - радиальная компонента вектора напряженности электрического поля.

Соотношения (8) запишем в виде

$$D_r = \xi_{31} (e_{\theta\theta} + e_{rr}) + \xi_{33} e_{rr} + \varepsilon_{33} E_r. \quad (3.13)$$

Формулы Коши в сферической системе имеют вид

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr}, e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}. \quad (3.14)$$

Система уравнений (3.10), (3.11) для перемещения и электрического потенциала  $\varphi$  запишутся в виде

$$c_{33}^E \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{du_r}{dr} \right] + 2(c_{13}^E - c_{12}^E - c_{11}^E) \frac{u_r}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \xi_{33} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) + 2\xi_{31} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}; \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_{33} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \xi_{33} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du_r}{dr} \right) + 2\xi_{31} \frac{d}{dr} (ru_r). \quad (3.16)$$

Применяя операцию интегрирования к (3.16), получим

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\xi_{33}}{\varepsilon_{33}} \left( r^2 \frac{du_r}{dr} \right) + 2 \frac{\xi_{31}}{\varepsilon_{33}} (ru_r) + C, \quad (3.17)$$

где  $C$  - константа интегрирования.

Подставляя  $\frac{d\varphi}{dr}$  в (3.15), получим уравнение для радиальных перемещений  $u_r$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{4} - \mathcal{G}^2 \right) u_r = \frac{c}{r^3}; \quad (3.18)$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho}{c_{33}^E (1 + k_{33}^2)}, k_{33}^2 = \frac{\xi_{33}^2}{c_{33}^E \varepsilon_{33}},$$

$$\mathcal{G}^2 = \left[ 2 \frac{C_{11}^E}{C_{33}^E} \left( 1 + \frac{C_{12}^E}{C_{11}^E} - \frac{C_{13}^E}{C_{11}^E} \right) + 4 \frac{\xi_{31}^2}{\xi_{33}^2} k_{33}^2 - 2 \frac{\xi_{31}}{\xi_{33}} k_{33}^2 \right] \frac{1}{1 + k_{33}^2} + \frac{1}{4}.$$

Интегрируем (3.17) повторно с учетом граничного условия

$$\varphi = -\varphi_0 \text{ при } r = b \quad (3.19)$$

тогда получим выражение для  $\varphi$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \frac{c_{33}}{\xi_{31}} (1 + k_{33}^2) c \left( \frac{r-a}{ra} \right) + \frac{\xi_{33}}{\varepsilon_{33}} [u_r(r) - u_r(a)] + 2 \frac{\xi_{31}}{\varepsilon_{33}} \int_a^r u_r(x) \frac{dx}{x}. \quad (3.20)$$

Шар представляет собой сферический резонатор, для которого вектор электрической индукции  $\overline{D}_r$  находится из определяющего соотношения (3.13) с учетом выражений (3.20), (3.14).

В начальный момент времени под действием электрического поля внешняя граница шара деформируется так, что для  $0 \leq y < y_0$  происходит сжатие (вмятина на шаре), а при  $-y_0 < y < 0$  расширение (выпуклость на шаре), это можно записать в сферической системе координат в виде

$$r = r(\varphi, \theta), -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0, -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ при } t = 0. \quad (3.21)$$

Функцию  $r(\varphi, \theta)$  представляем в виде

$$r = r_0 \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2\varphi_0} \varphi, \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_0; \\ -\cos \frac{\pi}{2\varphi_0} \varphi, \text{ при } -\varphi_0 \leq \varphi \leq 0. \end{cases}$$

При  $t > 0$  электрическое поле создаёт бегущую волну деформаций на внешней границе шара, регулируемую поступательным перемещением центра шара в выбранном направлении. Выражение для бегущей волны в направлении качения запишется в виде бегущей волны

$$r = r_0 \sin \left( \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi - \omega t \right) (-1)^\alpha \cos \frac{\pi}{2\theta_0} \theta; \quad (3.22)$$

$$\alpha = -1, \text{ для } -\varphi_0 \leq \varphi \leq 0,$$

$$\alpha = 1, \text{ для } 0 \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

$$\alpha = H(\varphi), \text{ для } -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

где  $H(\varphi)$  - функция Хевисайда.

Используя комплексное представление для тригонометрических функций, запишем  $u_r$  в виде

$$u_r(r, t) = u_r(r) e^{i \left( \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi - \omega t \right)} (-1)^\alpha \cos \frac{\pi}{2\theta_0} \theta. \quad (3.23)$$

Тогда для  $u_r(r)$ , получим уравнение

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} + \left[ \lambda^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{4} - \nu^2 \right) \right] u_r = \frac{C}{r^3}; \quad (3.24)$$

$$\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2}{C_{33}^E}, k_{33}^2 = \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E \epsilon_{33}}, \quad (3.25)$$

$$\nu^2 = \left[ 2 \frac{C_{11}^E}{C_{33}^E} \left( 1 + \frac{C_{12}^E}{C_{11}^E} - \frac{C_{13}^E}{C_{11}^E} \right) + 4 \frac{e_{31}^2}{e_{33}^2} k_{33}^2 - 2 \frac{e_{31}}{e_{33}} k_{33}^2 \right] \frac{1}{(1+k_{33}^2)} + \frac{1}{4},$$

$$C = \text{const.}$$

Уравнение (3.24) представляет собой неоднородное уравнение Бесселя, решение которого запишем в виде [7] суммы общего и частного решений

$$u_r = A_1 r^{-1/2} J_\nu(\lambda r) + A_2 r^{-1/2} Y_\nu(\lambda r) + \frac{\pi}{2} C \left[ r^{-1/2} J_\nu(\lambda r) \int_r^b x^{-3/2} Y_\nu(\lambda x) dx + r^{-1/2} Y_\nu(\lambda r) \int_a^r x^{-3/2} J_\nu(\lambda x) dx \right]; \quad (3.26)$$

где  $J_\nu(x), Y_\nu(x)$  - функции Бесселя,  $A_1, A_2$  - постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий на границе  $S = S_\sigma + S_u$  на свободной границе  $S_\sigma$

$$\sigma_{rr} = 0, \text{ при } r = a, r = b \in S_\sigma \quad (3.27)$$

где  $a$  - радиус внутренней,  $b$  - радиус внешней поверхности шара.

Бегущую волну перемещений на части поверхности  $S_u$  создаём за счёт электрострикции включая и выключая последовательно электродированные элементы на внешних электродах шара.

Так как поверхность  $S_\sigma$  - это та часть  $S$ , на которой не действует электрострикционный эффект, поэтому в (3.26)  $C = 0$ , а для  $A_1, A_2$  получаем из (3.27) уравнения для нахождения  $A_1, A_2$ .

Из (3.20) можем получить зависимость  $u_r$  от  $r$  в виде

$$u_r(r) = \left( \frac{a}{r} \right)^\alpha \left[ u_r(a) + \frac{\beta}{a^2} \left( r^\alpha \varphi(r) - a^\alpha \varphi(a) - \alpha \int_a^r \varphi(r) r^{\alpha-1} dr \right) \right]; \quad (3.28)$$

$$\alpha = \frac{2e_{31}}{e_{33}}, \beta = \frac{\epsilon_{33}}{e_{33}}.$$

Поступательная прямолинейная скорость  $V_C$  качения шара в заданном направлении определяется скоростью бегущей волны смещения точек внешней поверхности  $S_u$  в виде вмятины и выпуклости, перемещающихся по внешней поверхности. В установленном режиме переключения пластин электродов осуществляются процессором таким образом, чтобы обеспечить плавное качение с постоянной скоростью

$$V_C = \dot{\theta} b, \quad (3.29)$$

где  $\dot{\theta}$  - угловая скорость волны, бегущей вдоль меридиана,  $b$  - радиус шара в недеформированном состоянии.

При качении по ровной поверхности глубина вмятины поверхности не играет роли, в то время как, качение по рельефной поверхности, в частности преодоление выступов зависит от глубины впадины, обеспечивающей сцепление колеса при преодолении выступа рисунок 5.

С этой точки зрения сформулируем задачу определения такого электрического потенциала  $\varphi$ , который обеспечивал бы условия на поверхности сферы вида

$$u_r(a) = 0, u_r(b) = \max. \quad (3.30)$$

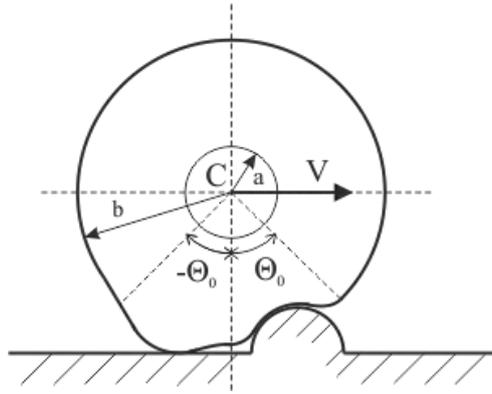


Рис. 5. Схема перекачивания шара через неровности поверхности

На основе уравнения (3.28) имеем

$$u_r(b) = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \left[ \frac{\beta}{\alpha^2} (b^\alpha \varphi(b) - a^\alpha \varphi(a)) - \alpha \int_a^b \varphi(r) r^{\alpha-1} dr \right]. \quad (3.31)$$

Очевидно  $u_r(b)$  является функционалом от  $\varphi$ , а также зависит от  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. электроупругих свойств материала, из которого изготовлен шар.

Запишем уравнение (3.31) в виде

$$u_r[\varphi] = u_0(\alpha, \beta) Q(\alpha, \beta) \int_a^b \varphi(r) r^{\alpha-1} dr. \quad (3.32)$$

Из (3.32) следует, что нахождение  $\varphi(r)$  при заданных  $u_r(b)$  и  $u_0$  представляет собой некорректную задачу. Очевидно, что на практике основное значение имеет то, какие значения имеют  $\varphi(a), \varphi(b)$ , а  $\varphi(r)$  аппроксимируем какой-либо функцией, например линейной

$$\varphi(r) = \varphi(a) + \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a} (r-a), \quad \varphi(b) = -\varphi_0. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) в (3.32) получим выражения для перемещения  $u_r$  в виде функциональных зависимостей от материальных параметров  $\alpha, \beta$  и конструктивных  $a, b$ . Варьируя  $\alpha, \beta$  можно получить нужные величины  $u_r$  за счёт выбора материалов, а изменяя  $a, b$  получим нужные величины для перемещения поверхности сферы за счёт конструктивных параметров  $a, b$ .

Рассмотрим теперь вычисление произвольных постоянных  $A_1, A_2, C$  при заданных граничных условиях на  $S_\sigma$  и  $S_u$ . На  $S_\sigma$  выполняются условия (3.27) и отсутствует потенциал  $\varphi$ , поэтому условия для нахождения  $A_1, A_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 f_1(\lambda a) + A_2 f_2(\lambda a) &= 0; \\ A_1 f_1(\lambda b) + A_2 f_2(\lambda b) &= 0; \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$f_\alpha(x) = (1 + k_{33}^2) \left[ \left( \nu - \frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} Q_\alpha(x) - x^{-\frac{1}{2}} Q_{\alpha+1}(x) \right] + 2 \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} \left( 1 + \frac{e_{31}}{e_{33}} k_{33}^2 \right) x^{-\frac{3}{2}} Q_\alpha(x);$$

$$Q_\alpha(x) = \begin{cases} J_\alpha(x), & \text{при } \alpha = 1, \\ Y_\alpha(x), & \text{при } \alpha = 2. \end{cases}$$

Условия существования ненулевых решений для (3.34) приводит к уравнению для антирезонансных частот [7]

$$\Delta(\lambda) = f_1(\lambda a) f_2(\lambda b) - f_1(\lambda b) f_2(\lambda a) = 0, \quad (3.35)$$

Причём ток на частоте антирезонанса в соответствующей части шарового резонатора равен нулю, также на  $S_\sigma$  считается  $D_r = 0, C = 0$ .

На части поверхности  $S_u$  в электродах плотность электрического тока записывается в виде

$$\bar{j}_r = \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial t}, \quad (3.36)$$

или, учитывая гармоническую зависимость всех величин от времени, выражение для амплитуды радиальной составляющей имеет вид

$$j_r = i\omega D_r. \quad (3.37)$$

Полный ток на части поверхности  $S_u$  в данный момент, подключаемой к источнику, вычисляется по формуле

$$I_r = i\omega \int_{S_u} D_r ds. \quad (3.38)$$

С учётом формулы (3.20) получим

$$D_r = -\frac{c}{r^2} \frac{e_{33}^2}{2e_{31}} \left( \frac{1+k_{33}^2}{k_{33}^2} \right), \quad (3.39)$$

Тогда из формулы (3.38) найдём

$$I_r = -2\pi c \frac{e_{33}^2}{e_{31}} \left( \frac{1+k_{33}^2}{k_{33}^2} \right) (i\omega). \quad (3.40)$$

Обозначим сопротивление резонатора через  $Z$ , тогда имеем

$$Z = \frac{\lambda e_{31} \Delta_1(\lambda)}{4\pi i \omega e_{33} \varepsilon_{33} \Delta(\lambda)}. \quad (3.41)$$

Резонансные частоты  $f_r = \omega_r / 2\pi$  определяются из уравнения  $\Delta_1(\lambda) = 0$  [7], а антирезонансные  $f_a = \omega_a / 2\pi$  из уравнения (3.35)  $\Delta(\lambda) = 0$ .

Условия резонанса и антирезонанса дают критерии для проектирования шаровых полых резонаторов с требуемыми физико-механическими свойствами и спектром резонансных и антирезонансных частот.

Знание резонансных  $f_r$  и антирезонансных  $f_a$  частот позволяет рассчитывать динамический коэффициент электромеханической связи по формуле [7]

$$k_{d(1)}^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}, \quad (3.42)$$

Коэффициент электромеханической связи даёт возможность оценить эффективность возбуждения колебаний существующего пьезоэлектрического шара на резонансных частотах. С другой стороны формула (3.42) даёт возможность проектировать конструкции из пьезоэлектрических материалов, в частности из композитов, имеющих спектры резонансных и антирезонансных частот, для которых динамический коэффициент электродинамической связи имеет заданное значение [9].

Коэффициент электромеханической связи (3.42) может использоваться для оценки энергоэффективности пьезоэлектрического шара [7] согласно соотношению

$$k_{d(2)}^2 = \frac{U_{эл}^{обп}}{U_p}, \quad U_{эл}^{обп} = U_p - U_k, \quad (3.43)$$

где  $U_p$  - внутренняя энергия тела при разомкнутых электродах,  $U_k$  - внутренняя энергия при коротко замкнутых (закороченных) электродах,  $U_{эл}^{обп}$  - электрическая энергия, запасённая в объёме и способная к обращению.

Формула (3.43) позволяет проектировать энергоэффективные конструктивные элементы из пьезоэлектрических материалов.

На рисунке 6 изображены зависимости  $k_{d(1)}^2$  и  $k_{d(2)}^2$  в зависимости от  $a/b$ . Зависимости (3.27), (3.34) дают близкие значения, однако  $k_{d(2)}^2$ , вычисляемый из энергетический соотношений является более общим и позволяет рассматривать  $k_d^2$  для всего спектра частот.

На рисунке 6 изображена зависимость  $k_d^2$  от  $a/b$ .

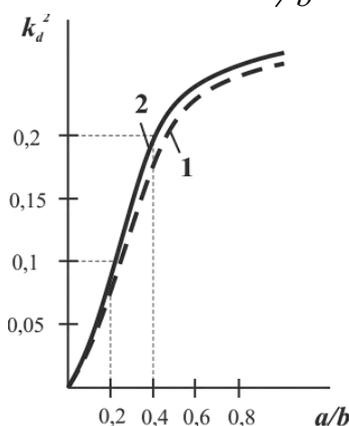


Рис. 6. Зависимость электромеханического коэффициента от отношения внутреннего и внешнего радиусов шара из PZT-4; 1) для формулы (3.42), 2) для формулы (3.43)

На рисунке 7 представлены зависимости резонансных и антирезонансных частот от отклонения внутреннего и внешнего радиусов шара из пьезокерамики PZT-4.

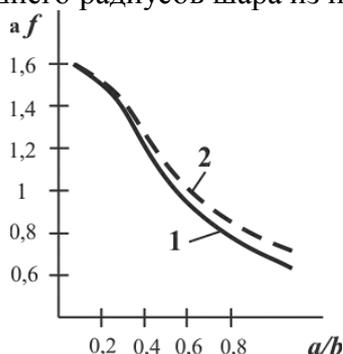


Рис. 7. Зависимость резонансных (кривая 1) и антирезонансных частот (кривая 2) полого шара из PZT-4 от отношения внутреннего и внешнего радиусов

Основные результаты исследований:

- установлена возможность инициирования и поддержания состояния качения шара-робота из электроупругого материала под действием внутреннего электрического поля вследствие деформации опорной поверхности шара и действия силы тяжести Земли.

- определены напряжения и деформации в шаре-роботе, возникающие под действием внутреннего электрического поля и перемещающиеся по поверхности в форме задаваемой бегущей волны.

- найдены уравнения для нахождения частот резонанса и антирезонанса, позволяющие получить зависимость частот от материальных коэффициентов пьезоэлектрического материала и геометрических параметров.

- получены выражения для коэффициентов электромеханической связи по резонансному и энергетическому условию, которые можно использовать для проектирования робота-шара с требуемыми физико-механическими, геометрическими параметрами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов, А.В. Мобильные роботы. Робот-колесо, робот-шар / Борисов А.В., Мамаев И.С., Кузнецов М. – М.: Наука, 2013.
2. Градецкий В.Г., Механика миниатюрных роботов / Градецкий В.Г., Князьков М.М., Фомин Л.Ф., Чащухин В.Т. - М.: Наука, 2010. - 265 с.
3. Minchenia, V. The dynamical of a microrobot with three fulcrums on the plane surface / Minchenia V., Chigarev V., Zimmerman K., Abfza K. // 50. Int. Wissenschaft. Kolloquim, 19-23.09.2005. - 101-102 p.
4. Zhengyi, Xu Design and optimization of a magnetic wheel for a grit-blasting robot for use on ship hulls / Zhengyi Xu, Yu Xie, Ke Zhang, Xongaqiang Hu, Xaiopeng Zhu, Hao Shil // Robotica, Cambridge University Press, 2015. - 204-209 p.
5. Heimann, B. Mechatronika / Heimann B., Gerth W., Popp K., Karl Hanser Verlag, Munich // FRG, 2013. - 373 p.
6. Можен, Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Можен Ж., М.: Мир, 1991. - 560 с.
7. Партон, В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / Партон В.З., Кудрявцев Б.А. . - М. Наука, Физ-мат.лит., 1988. - 470 с.
8. Kanzig, W. Ferroelectrics and antiferroelectrics / Kanzig W. . - Solid State Physics, vol. 4, Academic Press Inc. Publishers, New York, 1957. - p. 234.
9. Паньков, А.А. Статистическая механика пьезокомпозиатов / Паньков А.А. . - Изд-во Пермского гос. тех. ун-та, 2009. - 479 с.
10. Дьелесан, Э. Упругие волны в твёрдых телах. Применение для обработки сигналов / Дьелесан Э., Руйе Д. . - М.: Наука, Физматлит, 1982. - 489 с.
11. Красильников, В.А. Введение в физическую акустику / Красильников В.А., Крылов В.В. . - М.: Наука, Физ-мат. Лит., 1984. - 399 с.
12. Добролюбов, А.И. Волновой перенос вещества/ Добролюбов А.И. . - Минск, Беларуская навука, 1996. - 304 с.
13. Маркеев А.П., Теоретическая механика / Маркеев А.П. . - М.: Наука, Физ.-мат. Лит., 1990. - 414 с.
14. Тураев, Х.Т. Теория движения систем с качением / Тураев Х.Т., Фуфаев Н.А., Мусарский Р.А. . - Ташкент, Изд-во "ФАН", 1987. - 158 с.
15. Левин, М.А. Теория качения деформируемого колеса / Левин М.А., Фуфаев Н.А. . - М., Наука, Физ-мат. Лит., 1989. - 269 с.

E-mail: [chigarev.vitalik@yandex.ru](mailto:chigarev.vitalik@yandex.ru)  
[mayjka@mail.ru](mailto:mayjka@mail.ru)

Поступила в редакцию 21.10.2016