УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СИЛОВОЙ СИСТЕМЫ

асп. **Мармыш Д.Е.**

Белорусский государственный университет, Минск

Аналитические решения для распределённой по прямоугольнику нагрузки. Задача о сосредоточенной силе, приложенной в точке упругого изотропного пространства известна как задача Кельвина [1]. Аналитические решения, позволяющие описать напряжённо-деформированное состояние пространства от действия сосредоточенной силы, приведены в работах [1, 2].

Введём в пространстве систему координат $Ox_1x_2x_3$. Рассмотрим прямоугольную область $D=\{(x_1,x_2): x_1\in[a_1;a_2], x_2\in[b_1;b_2]\}$ расположенную в плоскости Ox_1x_2. Пусть по площадке D распределены равномерные усилия интенсивности p_0, направленной вдоль оси Ox_3. Интегрирование фундаментальных решений задачи Кельвина приводит к следующим интегралам для функций влияния для перемещений и напряжений

$$\begin{gathered} u_i^{(K,3)} = \iint\limits_D G_i^{(K,u,3)}(x_1-\xi, x_2-\eta, x_3)\,d\xi d\eta, \quad i=1,2,3, \\ \sigma_{i,j}^{(K,3)} = \iint\limits_D G_{i,j}^{(K,\sigma,3)}(x_1-\xi, x_2-\eta, x_3)\,d\xi d\eta, \quad i,j=1,2,3. \end{gathered} \tag{1}$$

Проинтегрировав выражения (1) по площадке D, получим следующие выражения, записанные в компактной форме

– для компонент вектора перемещений

$$\begin{gathered} u_1^{(3)} = Ax_3 \ln\left[\frac{(x_2-b_1-R_{11})(x_2-b_2-R_{22})}{(x_2-b_1-R_{21})(x_2-b_2-R_{12})}\right], \\ u_2^{(3)} = Ax_3 \ln\left[\frac{(x_1-a_1-R_{11})(x_1-a_2-R_{22})}{(x_1-a_2-R_{21})(x_1-a_1-R_{12})}\right], \\ u_3^{(3)} = \frac{i}{2}\left(Ax_3+\frac{B}{x_3}\right)\sum_{k,l=1}^{2}\ln\frac{B_j'\left\{x_3B_l'+(-1)^{k+1}(a_k-x_1)\left[(-1)^{k+1}a_k+(-1)^k x_1+R_{kl}\right]\right\}}{B_j''\left\{x_3B_l''+(-1)^{k+1}(a_k-x_1)\left[(-1)^{k+1}a_k+(-1)^k x_1+R_{kl}\right]\right\}}, \end{gathered} \tag{2}$$

– для компонент тензора напряжений

$$\begin{gathered} \sigma_{11}^{(3)} = 2A\mu\cdot x_3\sum_{k,l=1}^{2}(-1)^{k+l}\left\{\frac{(a_k-x_1)(b_l-x_2)}{\left[(a_k-x_1)^2+x_3^2\right]R_{kl}}-\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)x_3}\operatorname{arctg}\frac{(a_k-x_1)(b_l-x_2)}{x_3R_{kl}}\right\}, \\ \sigma_{22}^{(3)} = 2A\mu\cdot x_3\sum_{k,l=1}^{2}(-1)^{k+l}\left\{\frac{(a_k-x_1)(b_l-x_2)}{\left[(b_l-x_2)^2+x_3^2\right]R_{kl}}-\frac{\lambda}{(\lambda+\mu)x_3}\operatorname{arctg}\frac{(a_k-x_1)(b_l-x_2)}{x_3R_{kl}}\right\}, \\ \sigma_{12}^{(3)} = -2A\mu\cdot x_3\sum_{k,l=1}^{2}\frac{(-1)^{k+l}}{R_{kl}}, \\ \sigma_{13}^{(3)} = -\frac{2A\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k,l=1}^{2}(-1)^{k+l}\left\{\frac{(\lambda+\mu)(b_l-x_2)x_3^2}{\left[(a_k-x_1)^2+x_3^2\right]R_{kl}}-\mu\ln(x_2-b_l+R_{kl})\right\}, \\ \sigma_{23}^{(3)} = -2A\mu\sum_{k,l=1}^{2}(-1)^{k+l}\left\{\frac{(a_k-x_1)x_3^2}{\left[(b_l-x_2)^2+x_3^2\right]R_{kl}}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\operatorname{arcth}\frac{a_k-x_1}{R_{kl}}\right\}, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\sigma_{33}^{(3)} = -2A\mu \cdot x_3 \sum_{k,l=1}^{2} (-1)^{k+l} \left\{ \frac{(a_k - x_1)(b_l - x_2)(R_{kl}^2 + x_3^2)}{\left[(a_k - x_1)^2 + x_3^2\right]\left[(b_l - x_2)^2 + x_3^2\right] R_{kl}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu) x_3} \operatorname{arctg} \frac{(a_k - x_1)(b_l - x_2)}{x_3 R_{kl}} \right\},$$

где $A = \dfrac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}$, $B = \dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, λ, μ – постоянные Ляме для изотропной упругой среды, i – мнимая единица $R_{kl}^2 = (x_1 - a_k)^2 + (x_2 - b_l)^2 + x_3^2$, $B_l' = (-1)^l b_l + (-1)^{l+1} x_2 + x_3$, $B_l'' = (-1)^{l+1} b_l + (-1)^l x_2 + x_3$, $k, l = 1{,}2$.

Из рисунка 1 видно, что приведённые выше выражения для напряжений удовлетворяют граничным условиям при приложении равномерно распределённой нагрузки по прямоугольной площадке в пространстве.

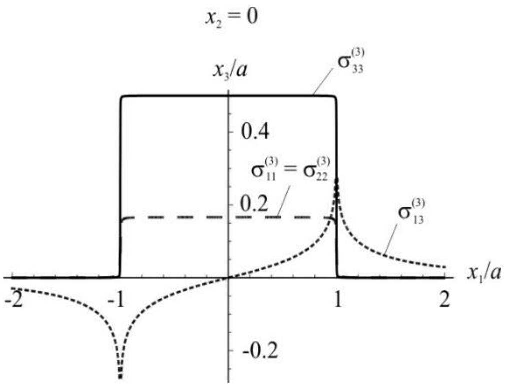

Рис. 1. Распределение вдоль осей x_1 и x_3 некоторых компонент тензора напряжений, отнесенных к величине усилий p_0

Гранично-элементное моделирование напряжённого состояния. При гранично-элементном моделировании напряжённого состояния полупространства под действием произвольно распределённой нагрузки с использованием фундаментальных решений Буссинески и/или Черрути достаточно просуммировать напряжения вызванные действием нагрузки по каждому граничному элементу лежащему в области действия нагрузки [3]. При решении задачи с использованием фундаментальных решений Кельвина необходимо предварительное определение фиктивных усилий для граничных элементов в области действия нагрузки и в некоторой её окрестности.

Рассмотрим некоторую область D в плоскости Ox_1x_2 с произвольно распределённой по ней нагрузкой $p(x_1, x_2)$. Обозначим через $\hat{D}$ окрестность области D. Построим в областях D и $\hat{D}$ равномерную прямоугольную гранично-элементную сетку с количеством элементов N_1, N_2 и шагами сетки h_1, h_2 соответственно вдоль осей Ox_1 и Ox_2. Введём также следующие обозначения: p_{ij}^f – фиктивная нагрузка, действующая по граничному элементу с центром в точке (ih_1, jh_2) $(i = 0,1,\ldots,N_1;\ j = 0,1,\ldots,N_2)$; $p_{ij}^r = p(ih_1, jh_2)$. Задача определения фиктивных усилий сводится к следующей системе $N_1 \times N_2$ линейных уравнений

$$p_{ij}^{r,\alpha} = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} \left[\sum_{\beta=1}^{3} p_{ij}^{f,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(3)}(kh_1, lh_2, 0) \right], \ (\alpha = 1,2,3) \qquad (4)$$

где $p_{ij}^{r,\alpha}, p_{ij}^{f,\beta}$ – проекции нагрузок p_{ij}^r и p_{ij}^f на ось Ox_α.

Решая систему уравнений (4) относительно $p_{ij}^{f,\beta}$ можно найти фиктивные граничные условия для каждого граничного элемента. Далее взяв их в качестве действующих усилий можно найти напряжённое состояние в любой точке полупространства.

В работе [4] рассмотрена задача определения напряжённо-деформированного состояния и состояния повреждаемости в силовой системе ролик/вал используемой при испытаниях материалов на контактно-механическую усталость. В ней, в частности, определены параметры контактного пятна между роликом и валом, а также величина максимального давления в центре площадки контакта. Проведём гранично-элементное моделирования аналогичной задачи с использованием аналитических решений (3).

При давлении тела вращения на упругую изотропную полуплоскость контактное давление распределено по эллиптическому закону [5]

$$p(x_1, x_2) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}}\,, \tag{5}$$

где a, b – величины полуосей эллиптической площадки контакта, p_0 – давление в центре площадки.

Из работы [4] известно, что для реальной испытательной системы ролик/вал $a = 0{,}25$ мм, $b = 0{,}25$ мм, $p_0 = 3727$ МПа. Область $\hat{D}$ была взята за прямоугольник с размерами $6a \times 6b$, шаги гранично-элементной сетки были приняты равными $h_1 = \frac{a}{5}$, $h_2 = \frac{b}{5}$. Таким образом, была получена гранично-элементная сетка состоящая из 30×30 = 900 элементов. Фиктивные граничные условия для каждого граничного элемента определялись согласно системе уравнений (4).

На рисунке 1 представлен пространственный график фиктивных граничных условий p_{ij}^{f} действующих на площадке $\hat{D}$. На рисунке 2 показана аппроксимация непрерывного распределения $p(x_1, x_2)$ дискретным распределением на граничных элементах в разрезе вдоль оси Ox_2.

На рисунках 3 и 4 показаны графики распределения напряжения $\sigma_{33}^{(3)}$ вдоль осей Ox_1 и Ox_3 соответственно, полученные при гранично-элементном моделировании (точечный график) в сравнении с аналитическим решением для полупространства (сплошная линия) [5].

Анализ повреждаемости системы. Введём механический параметр φ как локальную характеристику повреждаемости среды Ω в точке A и определим его как отношение абсолютного значения действующих напряжений σ в точке A к некоторому предельному напряжению $\sigma^{(*\lim)}$ установленного для данного материала, т.е.

$$\phi = \frac{|\sigma|}{\sigma^{(*\lim)}}\,. \tag{6}$$

Выделим элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz с центром в точке A. Элементарный опасный объём соответствующий точке A определим как функцию параметра φ, определяемого формулой (6)

$$dV = \begin{cases} dxdydz, & \phi \geq 1 \\ 0, & \phi < 1. \end{cases} \tag{7}$$

Интегрирование выражения (7) по всему телу Ω определит величину опасного объёма, т.е.

$$V = \int_{\Omega} dV\,. \tag{8}$$

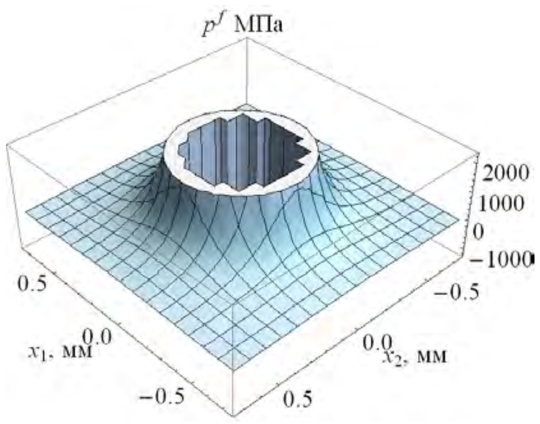

Рис. 1. Фиктивные граничные условия p_{ij}^{f} на площадке $\hat{D}$

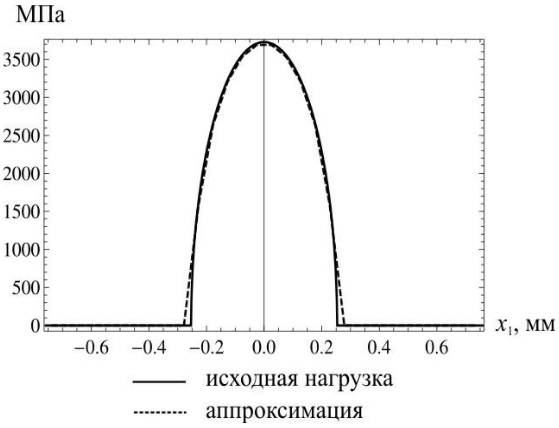

Рис. 2. Аппроксимация непрерывного распределения граничной нагрузки

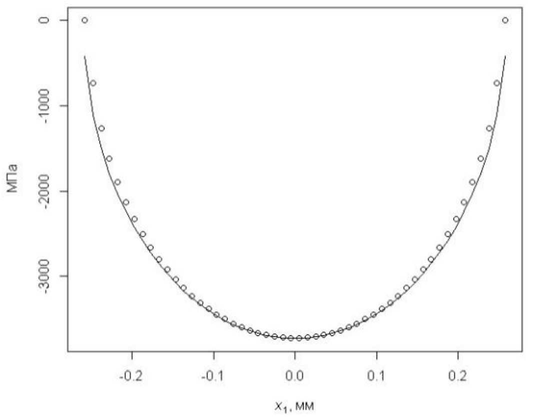

Рис. 3. Распределение напряжения $\sigma_{33}^{(3)}$ вдоль оси Ox_1

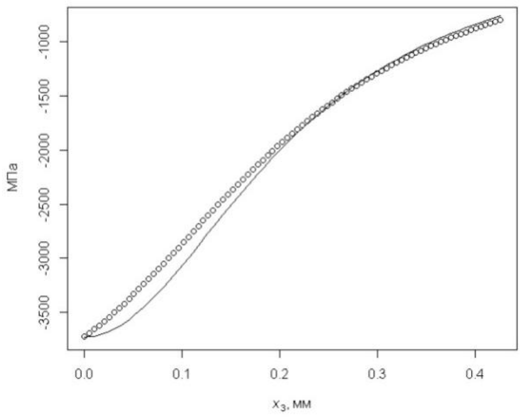

Рис. 4. Распределение напряжения $\sigma_{33}^{(3)}$ вдоль оси Ox_3

Для исследуемой системы ролик/вал предельное напряжение $\sigma^{(*\lim)}$ бралась как предел контактной усталости $\sigma_{\text{int}}^{(*\lim)} = F_{*\lim} = 888$ МПа. В качестве действующих напряжений σ брались эквивалентные напряжения (по Мизесу). На рисунке 5 представлены графики распределения эквивалентных напряжений вдоль оси Ox_3 полученные путём гранично-элементного моделирования (точечный график) и моделирования контактной задачи ролик/вал методом конечных элементов.

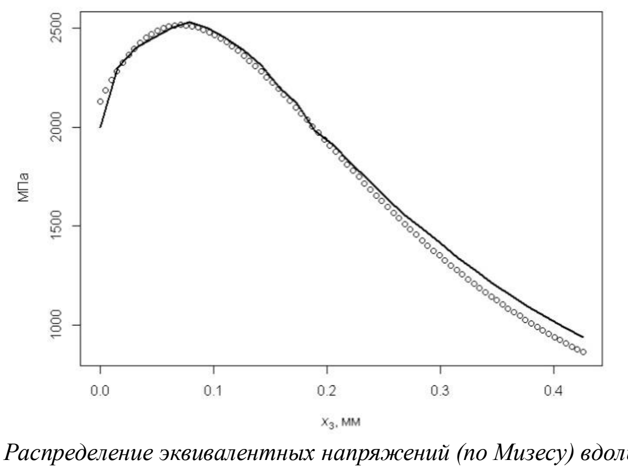

Рис. 5. Распределение эквивалентных напряжений (по Мизесу) вдоль оси Ox_3

Определение всех компонент тензора напряжений для полупространства при гранично-элементном моделировании производился в узловых точках по слоям перпендикулярным оси Ox_3. Расчёт напряжённого состояния заканчивался на слое, в любом узле которого действующее эквивалентное напряжение не превышало предельное напряжение $\sigma^{(*\,\lim)}$. Если в расчетном узле действующее напряжение превышало предельное, то определялась величина элементарного опасного объёма соответствующего данному узлу по формуле (7) и элементарная повреждаемость по формуле (6) выделенного объёма. Интегральные показатели, характеризующие повреждаемость силовой системы рассчитанные методом граничных элементов и методом конечных элементов для силовой системы ролик/вал представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Интегральные показатели повреждаемости

Метод	Опасный объём (мм^3)	Повреждаемость (мм^3)
Граничных элементов	0,2771	0,4511
Конечных элементов	0,2898	0,4453

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавков, М. А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований: курс лекций / М. А. Журавков – Минск: БГУ, 2008. – 247 с.*
2. *Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для вузов / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.*
3. *Davis, R. O. Elasticity and geomechanics / R.O. Davis, A.P.S. Selvadurai. Cambridge University Press, 1996. – 201 p.*
4. *Мармыш, Д.Е. Пространственное напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость системы «ролик-вал» / Д.Е. Мармыш // Актуальные вопросы машиноведения. Сб. науч. тр. – Вып. 4. – Минск: ОИМ. – 2015. – С. 248–251.*
5. *Макушин, В. М. Упругие перемещения и напряженное состояние деталей в местах контакта деталей / В. М. Макушин // Расчеты на прочность в машиностроении; под ред. С. Д. Пономарева. – М.: 1958. – Т. 2. – С. 387–486.*

E-mail: marmyshdenis@mail.ru

Поступила в редакцию 13.09.2016