УДК 517.5 (075.8)

О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ РЯД

к.ф.-м.н. [1]**В.А. Акимов,** ст. преп. [1]**С.В. Гончарова**, к.т.н. [2]**А.Л. Хотеев**

Белорусский национальный технический университет, Минск
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

В данной работе речь пойдет о разложении функции *f(x)* в гиперболический ряд на отрезке [*-l, l*]:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n ch\delta_n x+b_n sh\delta_n x),\quad \text{где}\qquad \delta_n=\frac{\pi n}{l} \tag{1}$$

В некоторых случаях заданную на отрезке [0, *l*] функцию достаточно разложить в ряд только по гиперболическим косинусам или синусам, а затем продолжить ее четным или нечетным способом на отрезок [*-l*, 0]. В точке разрыва первого рода будем считать, что гиперболический ряд, как и ряд Фурье, сходится к значению $f(x)=0{,}5\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$

По аналогии с [1], введем символический оператор дифференцирования бесконечного высокого порядка $T_l=\sin ld_x=-ish(ild_x)=-\frac{i}{2}(e^{ild_x}-e^{-ild_x})$, где обозначено $d_x=\frac{d}{dx}$ - операция дифференцирования, а $i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица. Установим два необходимых для дальнейших выкладок свойства оператора T_l по отношению к основному $\left\{sh\delta_n x; ch\delta_n x\right\}_{n=0}^{\infty}$ и производному $\left\{x sh\delta_n x; x ch\delta_n x\right\}_{n=0}^{\infty}$ классам функций, где $\delta_n=\frac{\pi n}{l}$.

Используя известные формулы:

$sh(\alpha\pm\beta)=sh\alpha ch\beta\pm ch\alpha sh\beta$, $ch(\alpha\pm\beta)=ch\alpha ch\beta\pm sh\alpha sh\beta$,

$\sin x=-ishix$, $\cos x=chix$,

а также формулу сдвига числовой оси $e^{ild_x}f(x)=f(x+il)$, определяем:

$$T_l\left[sh\delta_n x\right]=-ishild_x[sh\delta_n x]=-i\frac{1}{2}\left[sh\delta_n(x+il)-sh\delta_n(x-il)\right]=$$
$$=-ich\delta_n x\, shil\delta_n=ch\delta_n x\sin\pi n=0.$$

$$\begin{aligned}T_l\left[ch\delta_n x\right]&=-i\sin ild_x[ch\delta_n x]=-\frac{i}{2}[ch\delta_n(x+il)-ch\delta_n(x-il)]=\\&=-i\,sh\delta_n x\,shil\delta_n=sh\delta_n x\sin\pi n=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично

$$T_l\left[x\,sh\delta_n x\right]=-ishil[xsh\delta_n x]=-\frac{i}{2}\left[(x+il)sh\delta_n(x+il)-(x-il)sh\delta_n(x-il)\right]=$$
$$=-\frac{i}{2}\{x[sh\delta_n(x+il)-sh\delta_n(x-il)]-il[sh\delta_n(x+il)+sh\delta_n(x-il)]\}=$$
$$=-ixch\delta_n xshi\delta_n l+lsh\delta_n xchi\delta_n l=xch\delta_n x\sin\pi n+l\,sh\delta_n x\cos\pi n=$$
$$=l\,sh\delta_n x cos\pi n=(-1)^n l\,sh\delta_n x.$$

$$T_l\left[x\,\mathrm{c}h\delta_n x\right] = -ishild_x[xch\delta_n x] = -\frac{i}{2}[(x+il)ch\delta_n(x+il)-(x-il)ch\delta_n(x-il)] =$$
$$= -\frac{i}{2}x\{[ch\delta_n(x+il)-ch\delta_n(x-il)]-il[ch\delta_n(x+il)+ch\delta_n(x-il)]\} = \quad (3)$$
$$= -ixsh\delta_n xsh\delta_n il + lch\delta_n xch\delta_n il = xsh\delta_n x\sin\pi n + lch\delta_n xcos\pi n = (-1)^n l\,\mathrm{c}h\delta_n x$$

Теперь введем еще один прямой $V_n = 1 - d_x^2/\delta_n^2$ и обратный ему оператор

$$V_n^{-1}\left[f(x)\right] = \frac{f(x)}{1-d_x^2/\delta_n^2} \quad (4)$$

Можно непосредственно убедиться в том, что общее решение операторного уравнения (4) можно представить в виде суммы, соответственно, частного и однородного решений

$$V_n^{-1}\left[f(x)\right] = g_1(x) + g_2(x)$$, где $$g_1(x) = \delta_n ch\delta_n x\int f(x)sh\delta_n xdx - \delta_n sh\delta_n x\int f(x)ch\delta_n xdx \quad (5)$$

$$g_2(x) = c_1\,\mathrm{s}h\delta_n x + c_2\,\mathrm{c}h\delta_n x$$

причем $V_n\left[g_1(x)\right] = f(x)$, $V_n\left[g_2(x)\right] = 0$.

Действительно, легко установить: $g_1'(x) = \delta_n^2 sh\delta_n x\int f(x)sh\delta_n xdx - \delta_n^2 ch\delta_n x\int f(x)ch\delta_n xdx$

$$g_1''(x) = \delta_n^3 ch\delta_n x\int f(x)sh\delta_n xdx - \delta_n^3 sh\delta_n x\int f(x)ch\delta_n xdx + \delta_n^2(sh^2\delta_n x - ch^2\delta_n x)f(x) =$$
$$= \delta_n^3 ch\delta_n x\int f(x)sh\delta_n xdx - \delta_n^3 sh\delta_n x\int f(x)ch\delta_n xdx - \delta_n^2 f(x)$$

Здесь было учтено равенство $ch^2\delta_n x - sh^2\delta_n x = 1$.

И тогда $V_n g_1(x) = (1 - d_x^2/\delta_n^2)g_1(x) = g_1(x) - \dfrac{g_1''}{\delta_n^2} = f(x)$, что и требовалось д оказать. Еще проще показать $V_n[g_2(x)] = 0$.

Если функция *f(x)* принадлежит основному классу, то решение частного уравнения проще искать в виде $g_1(x) = A_m sh\delta_m x + B_m ch\delta_m x$.

Исходя из представления $V_n = 1 - d_x^2/\delta_n^2$, после подстановки $g_1(x)$ в (4) и приравнивания коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях справа и слева, получим:

$$V_n^{-1}\left[\mathrm{s}h\delta_m x\right] = \begin{cases} -\dfrac{\delta_n x\,\mathrm{c}h\delta_n x}{2} & \text{, при } m = n \\ \dfrac{sh\delta_m x}{1-\delta_m^2/\delta_n^2} & \text{, при } m \neq n \end{cases} \quad (6)$$

$$V_n^{-1}\left[ch\delta_m x\right] = \begin{cases} -\dfrac{\delta_n xsh\delta_n x}{2} & \text{, при } m = n \\ \dfrac{ch\delta_m x}{1-\delta_m^2/\delta_n^2} & \text{, при } m \neq n \end{cases}$$

Проверим полученные соотношения посредством формулы (5). Для этого предварительно установим:

$$\int sh\delta_m x sh\delta_n x dx = \frac{sh(\delta_m+\delta_n)x}{2(\delta_m+\delta_n)} - \frac{sh(\delta_m-\delta_n)x}{2(\delta_m-\delta_n)}$$

$$\int sh^2\delta_n x dx = \frac{sh(2\delta_n x)}{4\delta_n} - \frac{x}{2}$$

$$\int sh\delta_m x ch\delta_n x dx = \frac{ch(\delta_m+\delta_n)x}{2(\delta_m+\delta_m)} + \frac{ch(\delta_m-\delta_n)x}{2(\delta_m-\delta_n)}$$

$$\int sh\delta_n ch\delta_n dx = \frac{ch(2\delta_n x)}{4\delta_n}$$

$$\int ch\delta_m x ch\delta_n x dx = \frac{sh(\delta_m+\delta_n)x}{2(\delta_m+\delta_n)} + \frac{sh(\delta_m-\delta_n)}{2(\delta_m-\delta_n)}$$

$$\int ch^2\delta_n x dx = \frac{sh(2\delta_n x)}{4\delta_n} + \frac{x}{2}$$

Тогда получим:

$$g_1(x) = \delta_n ch\delta_n x \int sh^2\delta_n x dx - \delta_n sh\delta_n x \int sh\delta_n x ch\delta_n x =$$

$$= \delta_n ch\delta_n x\left(\frac{sh(2\delta_n x)}{4\delta_n} - \frac{x}{2}\right) - \delta_n sh\delta_n x\frac{ch(2\delta_n x)}{4\delta_n} = -\frac{\delta_n x ch\delta_n x}{2} + \frac{1}{4}sh\delta_n x$$, при $m = n$

Второе слагаемое не является существенным, так как входит в состав $g_2(x)$.

Если $m \neq n$, то получим:

$$g_1(x) = \delta_n ch\delta_n x \int sh\delta_m x sh\delta_n x dx - \delta_n sh\delta_n x \int sh\delta_m x ch\delta_n x dx =$$

$$= \delta_n ch\delta_n x\left[\frac{sh(\delta_m+\delta_n)x}{2(\delta_m+\delta_n)} - \frac{sh(\delta_m-\delta_n)x}{2(\delta_m-\delta_n)}\right] - \delta_n sh\delta_n x\left[\frac{ch(\delta_m+\delta_n)x}{2(\delta_m+\delta_n)} +\right.$$

$$\left. + \frac{ch(\delta_m-\delta_n)x}{2(\delta_m-\delta_n)}\right] = \frac{\delta_n}{2(\delta_m+\delta_n)}[ch\delta_n x sh(\delta_m+\delta_n)x - sh\delta_n x ch(\delta_m+\delta_n)x] -$$

$$- \frac{\delta_n}{2(\delta_m-\delta_n)}[ch\delta_n x sh(\delta_m-\delta_n)x + sh\delta_n x ch(\delta_m-\delta_n) =$$

$$= \frac{\delta_n sh\delta_n x}{2}\left(\frac{1}{\delta_m+\delta_n} - \frac{1}{\delta_m-\delta_n}\right) = -\frac{\delta_n^2 sh\delta_n x}{\delta_m^2-\delta_n^2} = \frac{sh\delta_n x}{1-\delta_m^2/\delta_n^2}$$

Таким образом, установлено, что результаты совпадают. Используя дополнительные соотношения

$$\frac{ch\delta_n x}{ld_x} = \frac{sh\delta_n x}{l\delta_n} + const \qquad \frac{sh\delta_n x}{ld_x} = \frac{ch_n x}{l\delta_n} + const,$$

а также учитывая выражения (2), (3) и (6) , на основе принципа суперпозиций устанавливаем свойства операторов $D_0 = \frac{T_l}{ld_x}$, $D_1 = T_l V_n^{-1}$ и $D_2 = ld_x T_l V_n^{-1}$ в основном классе гиперболических функций:

1. $D_0 = \dfrac{\sin(ld_x)}{ld_x}$;

$$D_0\left[sh\delta_m x\right] = 0, \qquad D_0\left[ch\delta_m x\right] = 0, \qquad D_0[C]=C \tag{7}$$

2. $D_1 = \dfrac{\sin(ld_x)}{1 - d_x^2/\delta_n^2}$;

$$D_1\left[sh\delta_m x\right] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1} l\delta_n}{2} ch\delta_n x & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases} \tag{8}$$

$$D_1\left[ch\delta_m x\right] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1} l\delta_n}{2} sh\delta_n x & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases}$$

$$D_1[C] = 0 \qquad \text{независимо от m и n}$$

3. $D_2 = \dfrac{ld_x sh(ld_x)}{1 - d_x^2/\delta_n^2}$:

$$D_2\left[sh\delta_m x\right] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1} l^2\delta_n^2}{2} sh\delta_n x & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases} \tag{9}$$

$$D_2\left[ch\delta_m x\right] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1} l^2\delta_n^2}{2} ch\delta_n x & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases}$$

$$D_2[C] = 0 \qquad \text{независимо от m и n}$$

Выше С - произвольная постоянная, а *m, n* - числа натурального ряда.

Формулы (8) и (9) также можно получить другим, более компактным способом, если заметить, что частное вида $T_l/V_n[sh\delta_n x]$ есть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ и тогда переходим к пределу

$$\lim_{d_x \to \delta_n} \frac{T_l}{V_n}[sh\delta_n x] = \frac{(T)'_{d_x}}{(V)'_{d_x}}[sh\delta_n x] = -\frac{l\delta_n^2 \cos ld_x}{2d_x}[sh\delta_n x] = -\frac{l\delta_n}{2}\cos ld_x[ch\delta_n x] =$$

$$= -\frac{l\delta_n \cos\pi n}{2} ch\delta_n x = \frac{(-1)^{n+1} l\delta_n}{2} ch\delta_n x$$

Здесь было учтено соотношение

$$\cos ld_x[ch\delta_n x] = \left(1 - \frac{l^2 d_x^2}{2!} + \frac{l^4 d_x^4}{4!} - \frac{l^6 d_x^6}{6!} + \cdots\cdots\right)[ch\delta_n x] = \cos\pi n ch\delta_n x = (-1)^n ch\delta_n x$$

Аналогично проверяются и другие пункты формул (8) и (9).

Рассмотрим конкретные примеры нахождения коэффициентов гиперболических рядов операторным методом.

1. Пусть $$x^{2r+1}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{s}h\delta_n x,\qquad r=0,1,2,3\ \dots .$$

Произведем над обеими частями записанного ряда операцию D_1. Непосредственно устанавливаем:

$$V_n^{-1}\left[x^{2r+1}\right]=\frac{x^{2r+1}}{1-\dfrac{d_x^2}{\delta_n^2}}=(1+\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+\frac{d_x^4}{\delta_n^4}+\frac{d_x^6}{\delta_n^6}+\dots)\left[x^{2r+1}\right]=x^{2r+1}+\frac{(2r+1)2rx^{2r-1}}{\delta_n^2}+$$

$$+\frac{(2r+1)2r(2r-1)(2r-2)}{\delta_n^4}x^{2r-3}+\dots+\frac{(2r+1)!}{\delta_n^{2r}}x$$

Кроме того $$\sin(ld_x)=ld-\frac{l^3d_x^3}{3!}+\frac{l^5d_x^5}{5!}\dots+\frac{(-1)^n l^{2n+1}d_x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$$

В результате получим:

$$D_1[x^{2r+1}]\Big|_{x=0}=\frac{\sin ld_x}{1-d_x^2/\delta_n^2}[x^{2r+1}]=l^{2r+1}-\frac{(2r+1)2r}{\delta_n^2}l^{2r-1}+$$
$$+\frac{(2r+1)2r(2r-1)(2r-2)}{\delta_n^4}l^{2r-3}+\dots+(-1)^r\frac{(2r+1)!}{\delta_n^{2r}}l \tag{10}$$

Выражение в правой части на основании (9), при $x=0$ принимает вид:

$$D_1[\sum_{n=1}^{\infty} b_n sh\delta_n x]\Big|_{x=0}=b_n\frac{(-1)^{n-1}l\delta_n}{2} \tag{11}$$

Приравнивая (11) и (12) между собой, окончательно находим:

$$x^{2r+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{l^{2r}}{\delta_n}-\frac{(2r+1)2r}{\delta_n^3}l^{2(r-1)}+\dots+(-1)^r\frac{(2r+1)!}{\delta_n^{2r+1}}\right]\mathrm{s}h\delta_n x \tag{12}$$

Полагая в (13) для определенности $r=1$, получим следующую формулу

$$x^3=2l^3\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}+\frac{(-1)^n 6}{\pi^3 n^3}\right]\mathrm{s}h\delta_n x\,. \tag{13}$$

2. Пусть $$x^{2r}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\mathrm{c}h\delta_n x,\qquad r=0,1,2,3\ \dots .$$

По аналогии с примером 1, предварительно определяем:

$$D_0[x^{2r}]\Big|_{x=0}=\frac{\sin ld_x}{ld_x}[x^{2r}]\Bigg|_{x=0}=(1-\frac{l^2d_x^2}{3!}+\frac{l^4d_x^4}{5!}-\frac{l^6d_x^6}{7!}+\cdots\frac{(-1)^n l^{2n}d_x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots)[x^{2r}]\Bigg|_{x=0}=$$

$$=(x^{2r}-\frac{l^2 2r(2r-1)}{3!}x^{2r-2}+\frac{l^4 2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}{5!}x^{2r-4}-\cdots+\frac{(-1)^r l^{2r}(2r)!}{(2r+1)!})\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\frac{(-1)^r l^{2r}}{2r+1}$$

$$D_0[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n ch\delta_n x]\Big|_{x=0}=\frac{a_0}{2}$$

$$D_2[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n ch\delta_n x]\Big|_{x=0}=a_n\frac{(-1)^{n+1}l^2\delta_n^2}{2}$$

$$D_2[x^{2r}]\Big|_{x=0}=\frac{ld_x\sin ld_x}{1-d_x^2/\delta_n^2}[x^{2r}]\Big|_{x=0}=ld_x\sin ld_x(1+\frac{d_x^2}{\delta_n^2}+\frac{d_x^4}{\delta_n^4}+\frac{d_x^6}{\delta_n^6}+\cdots)[x^{2r}]\Big|_{x=0}=$$

$$=(l^2d_x^2-\frac{l^4d_x^4}{3!}+\frac{l^6d_x^6}{5!}-\frac{l^8d_x^8}{7!}+\cdots\frac{(-1)^n l^{2n}d_x^{2n}}{(2n-1)!})(x^{2r}+\frac{2r(2r-1)}{\delta_n^2}x^{2r-2}+$$

$$+\frac{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}{\delta_n^4}x^{2r-2}+\cdots+\frac{(2r)!}{\delta_n^{2r}})\Big|_{x=0}=$$

$$=l^{2r}[(-1)^{r-1}2r+(-1)^{r-2}2r(2r-1)(2r-2)/\pi^2n^2+$$

$$+(-1)^{r-3}2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)(2r-4)/\pi^4n^4+\cdots+(2r)!/\pi^{2r-2}n^{2r-2}]$$

Окончательно получим:

$$x^{2r}=\frac{(-1)^r l^{2r}}{2r+1}+2l^{2r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{(-1)^{r-1}2r}{\pi^2n^2}+\ldots+\frac{(2r)!}{\pi^r n^r}\right]\mathrm{c}h\delta_n x \qquad (14)$$

Выражение (15) после подстановки в него значений r=2 принимает вид:

$$x^4=\frac{l^4}{5}+8l^4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[-\frac{1}{n^2\pi^2}+\frac{6}{n^4\pi^4}\right]\mathrm{c}h(nx) \qquad (15)$$

Проанализируем полученный результат. Если в формулах (13) и (15) положить $l=\pi$ и заменить x на ix, то получим известный для рядов Фурье случай [1,2,3]. Это обстоятельство еще раз гарантирует корректность всех проведенных здесь выкладок и правильность выведенных формул. Таким образом, операторный метод разложения функций в не ортогональные ряды получил еще одно подтверждение эффективности своего использования при решении конкретных практических задач.

Одной из ценностью полученного результата является его оригинальность и непротиворечивость математических выкладок при переходе в операторных формулах от вещественных переменных к комплексным переменным, т.е. по существу предлагаемый операторный метод получил свое обобщение на случай теории функций комплексного переменного. Такой результат принято считать классическим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. тМн. УП «Технопринт». 2003-101 с.

2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды.//М.:Физматиз.-1961-936с.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды.//М.:Мир-1965.Т.1-615с., Т.2-537с.

E-mail: vakim50@mail.ru

Поступила в редакцию 30.10.2016