

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ CUDA ДЛЯ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

д.ф.-м.н. **Щербаков С.С., Сергеев В.Э.**

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Современные машиностроение, геомеханика и другие области приложения моделей механики деформируемого твердого тела требуют многопараметрического анализа сложных технических объектов ответственного назначения (система колесо-рельс, зубчатые зацепления, подземные выработки и мн. др.) в зависимости от уровня нагружения, различных геометрических характеристик и свойств материалов.

Подобный анализ ограничен временем расчета напряженно-деформированного состояния системы для заданного набора входных параметров. Так, один расчет, например, системы типа колесо-рельс или режущего аппарата сельскохозяйственного комбайна [1,2] с помощью распространённых пакетов конечно-элементного моделирования (Ansys, Abaqus, Nastran и др.) может длиться от нескольких часов до нескольких дней. Распараллеливание расчета на ядрах центрального процессора или графического ускорителя дает сокращение времени вычислений не более чем в 2-4 раза. Особенностью конечно-элементной аппроксимации исходных дифференциальных уравнений в частных производных, является наличие связи между соседними узлами расчетной сетки. Это обуславливает затруднения, связанные с распараллеливанием вычислений как элементов квазидиагональной матрицы жесткости, так и полей перемещений и напряжений.

С другой стороны, гранично-элементная аппроксимация граничных интегральных уравнений позволяет рассчитывать взаимное влияние граничных элементов (расчетных узлов) независимо друг от друга, формируя полностью заполненную матрицу системы линейных алгебраических уравнений [3-5]. Таким образом, при гранично-элементном моделировании как элементы матрицы взаимовлияний, так и значения полей перемещений и напряжений в каждой точке могут быть рассчитаны параллельно [6]. Следует отметить, что для обычного графического процессора вычислительная сеть может максимально состоять из 65535 блоков, в каждом из которых можно запустить максимум 1024 вычислительные нити. Таким образом, имеется возможность запуска 67107840 параллельно работающих вычислительных единиц, что значительно превосходит возможности распараллеливания на центральных процессорах [7].

Постановка задачи. В работе рассматривается распараллеливание гранично-элементного расчета на ядрах графического процессора с помощью технологии NVIDIA CUDA [7].

Решалась задача об определении распределения потенциала p в полуплоскости для его значений, заданных на границе по следующему закону (см. рисунок 1, а):

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} p_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}, & x \in [-a, a], \\ 0, & x \notin [-a, a]. \end{cases} \quad (1)$$

В расчетах были приняты следующие исходные данные: максимальное значение потенциала на границе $p_0 = 1$, полуширина отрезка его приложения $a = 5$, размеры расчетной области: $x = [-20..20]$, $y = [-20..-0,0001]$. Ось $y=0$ не рассматривалась, поскольку в данной области решение стремится к бесконечности.

Гранично-элементное моделирование. Для описания процесса распределения потенциала в полуплоскости применяется известное аналитическое решение уравнения Лапласа для сосредоточенного на границе потенциала P [3]:

$$PG(x, y) = P \cdot \frac{1}{2\pi k} \cdot \ln \frac{r}{r_0}, \quad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а r_0 такова, что функция влияния $G(x, y) = 0$ при $r = r_0$.

Данная функция была проинтегрирована аналитически, чтобы получить решение для равномерно распределенного вдоль координаты x усилия \bar{p} :

$$\bar{p}G^I(x, y) = \bar{p} \int G(x-s, y) ds = \bar{p} \cdot \frac{1}{2\pi k} \cdot \left(x \cdot \left(\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0} - 1 \right) + y \cdot \tan^{-1} \frac{x}{y} \right) \quad (3)$$

Область приложения потенциала и ее окрестность на верхней границе полуплоскости была разбита на граничные элементы заданной полуширины h . Затем функция $IG(x, y)$ рассчитывается в локальной системе координат каждого граничного элемента:

$$\begin{aligned} \bar{p}G^I(x, y, a, b) = \bar{p} \cdot \frac{1}{2\pi k} \cdot \left[a - b + y \cdot \left(\tan^{-1} \frac{b-x}{y} - \tan^{-1} \frac{a-x}{y} \right), \right. \\ \left. + (x-a) \cdot \ln \frac{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}}{r_0} + (b-x) \cdot \ln \frac{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}}{r_0} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

где a и b – левая и правая границы граничного элемента.

Решение граничной задачи сводится к определению значений фиктивного потенциала \bar{p}^* , которые необходимо приложить на границе полуплоскости, чтобы удовлетворялись граничные условия (1).

Соответствующая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных \bar{p}_j^* , равномерно распределенных по каждому граничному элементу имеет вид

$$\bar{p}(x_i, 0) = \sum_{j=1}^N \bar{p}_j^* \cdot G^I(x_i - x_j, 0, a_j, b_j) = \sum_{j=1}^N \bar{p}_j^* \cdot W_{ij}, \quad (5)$$

где x_i, x_j – центры граничных элементов в глобальной системе координат, $\bar{p}(x_j, 0)$ – заданное значение потенциала в точке границы полуплоскости x_j , W_{ij} – матрица взаимовлияний элементов.

Расчеты матрицы взаимовлияний W_{ij} и решение системы (5) проводились в пакете компьютерной алгебры Mathematica 10, последовательно и параллельно на ядрах графического процессора.

Система (5) решалась с помощью встроенной функции Solve и матричным методом для уменьшения времени вычислений.

Расчет потенциала в некоторой точке полуплоскости (x, y) проводился в соответствии со следующей формулой:

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^N \bar{p}_j^* \cdot G^I(x - x_j, y, a_j, b_j) \quad (6)$$

Из рисунка 1 видно, что фиктивный потенциал (рисунок 1,б) вызывает распределение потенциала на поверхности при $y=0$, хорошо согласующееся с граничными условиями (1) (рисунок 1,в).

Аналогичным образом с помощью формулы (6) последовательно и параллельно было рассчитано распределение потенциала параллельного в полуплоскости (рисунок 2).

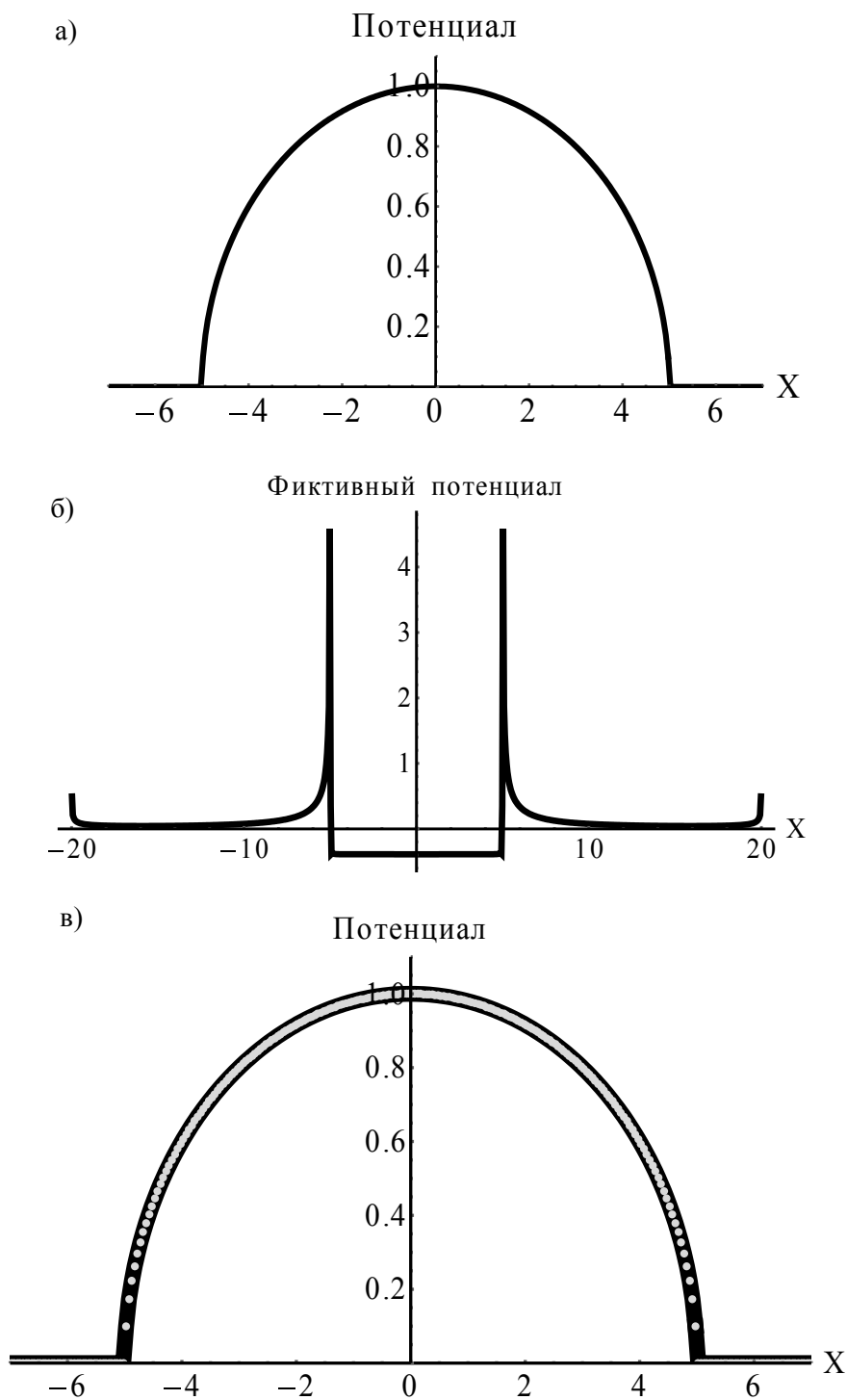


Рис. 1. Распределение потенциала на границе полуплоскости (а), распределение фиктивного потенциала, удовлетворяющего заданному граничному условию (б); решение на поверхности полуплоскости, полученное с использованием фиктивного потенциала (точечная кривая) и приложенный потенциал (сплошная кривая) (в)

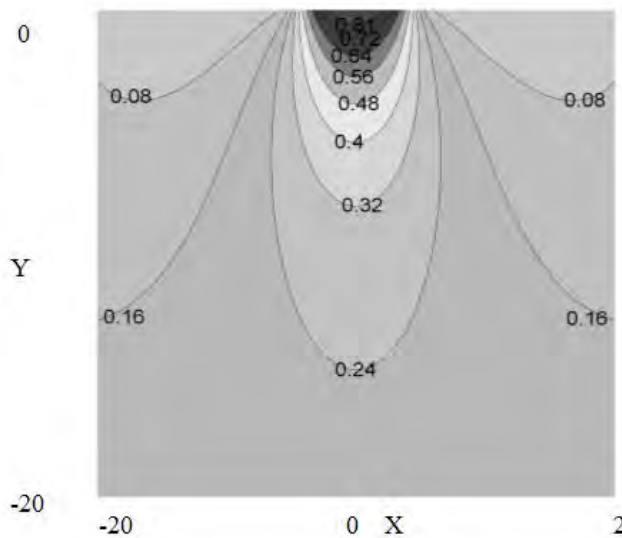


Рис. 2. Распределение потенциала в полуплоскости

Сравнение быстродействия расчетов. При выполнении параллельных расчетов были выбраны несколько значений полуширины h граничных для разбиения ими поверхности полуплоскости: 0,2, 0,1, 0,05 и 0,025. Соответственно, расчеты проводились для 100, 200, 400 и 800 элементов, а также 10^4 , $4 \cdot 10^4$, $1,6 \cdot 10^5$ и $6,4 \cdot 10^5$ расчетных узлов в полуплоскости. Для вычислений применялся компьютер на базе центрального процессора Intel Core i7 с тактовой частотой 2200 МГц и объемом оперативной памяти DDR3 8 Гб, а также графического адаптера NVIDIA GeForce GT 630M с объемом локальной видеопамяти 2 Гб.

Из рисунка 3 видно, что при увеличении количества граничных элементов наибольшее время требуется для последовательного расчета распределения потенциала в полуплоскости и матрицы взаимовлияний. При этом время параллельного расчета в десятки и сотни раз меньше последовательного. С целью уменьшения времени решения СЛАУ матричным способом была применена функция вычисления скалярного произведения `CUDADot[]` для его параллельной реализации на графическом ускорителе (рисунки 3,в).

Из рисунка 4 видно, что при расчете матрицы взаимовлияний ускорение параллельных вычислений по сравнению с последовательными растет практически линейно с увеличением количества элементов. Для 800 граничных элементов ускорение вычислений матрицы взаимовлияний составило примерно 592 раза, а распределения потенциала в полуплоскости – примерно 73 раза (для $6,4 \cdot 10^5$ расчетных узлов в полупространстве). При этом наибольшее ускорение расчета распределения потенциала в полуплоскости составило примерно 106 раз для 200 элементов ($4 \cdot 10^4$ расчетных узлов в полупространстве). Такая нелинейная зависимость может быть обусловлена дополнительными временными затратами при работе с памятью для большого числа точек полуплоскости.

Заключение. Методом граничных элементов решена задача о неравномерном нагружении поверхности полуплоскости потенциалом с круговым распределением. Определены значения фиктивного потенциала, который необходимо приложить на границе полуплоскости, чтобы удовлетворялись граничные условия. Рассчитано распределение потенциала в полуплоскости.

Распределение потенциала в полуплоскости, матрица взаимовлияний и решение СЛАУ матричным способом были получены на основе последовательных и параллельных вычислений с использованием технологии NVIDIA CUDA.

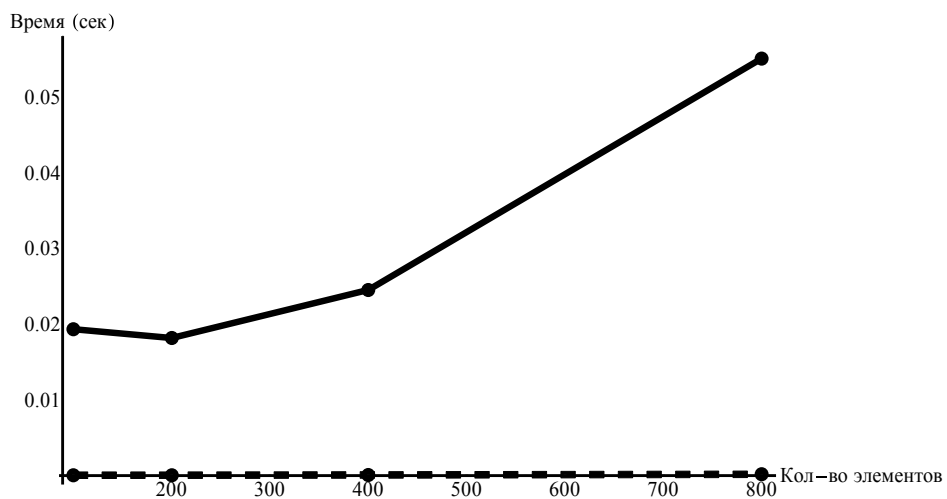
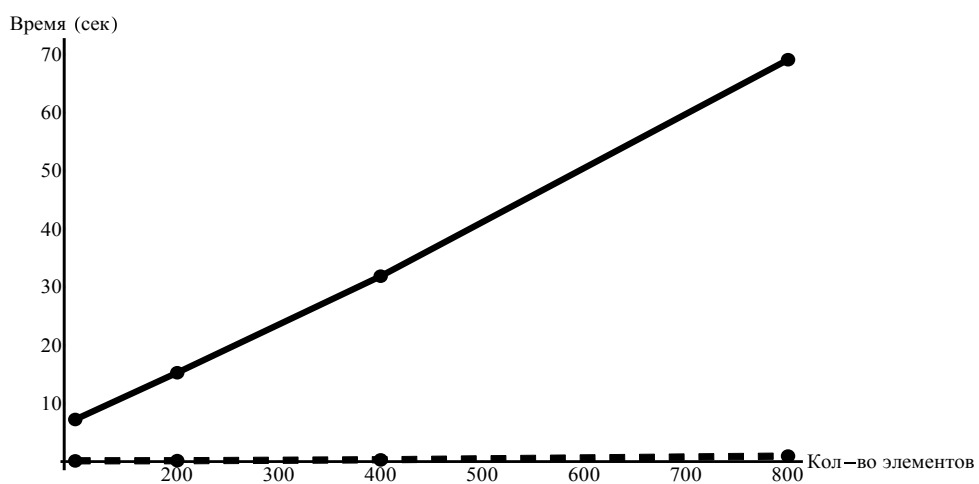
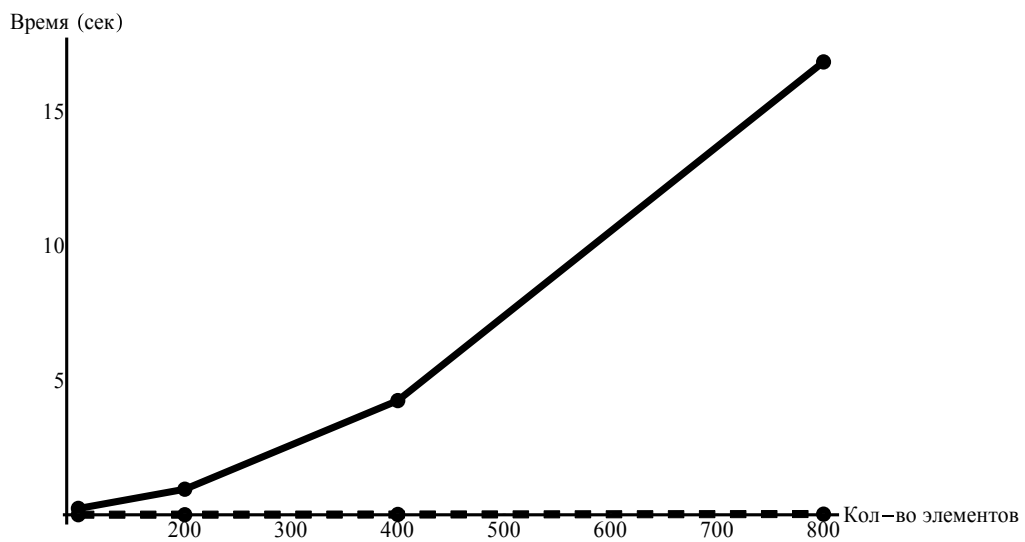


Рис. 3. Время последовательного (сплошная кривая) и параллельного (штриховая кривая) расчета матрицы взаимовлияний при определении фиктивного потенциала (а), расчета распределения потенциала в полупространстве (б), решения СЛАУ матричным способом (в)

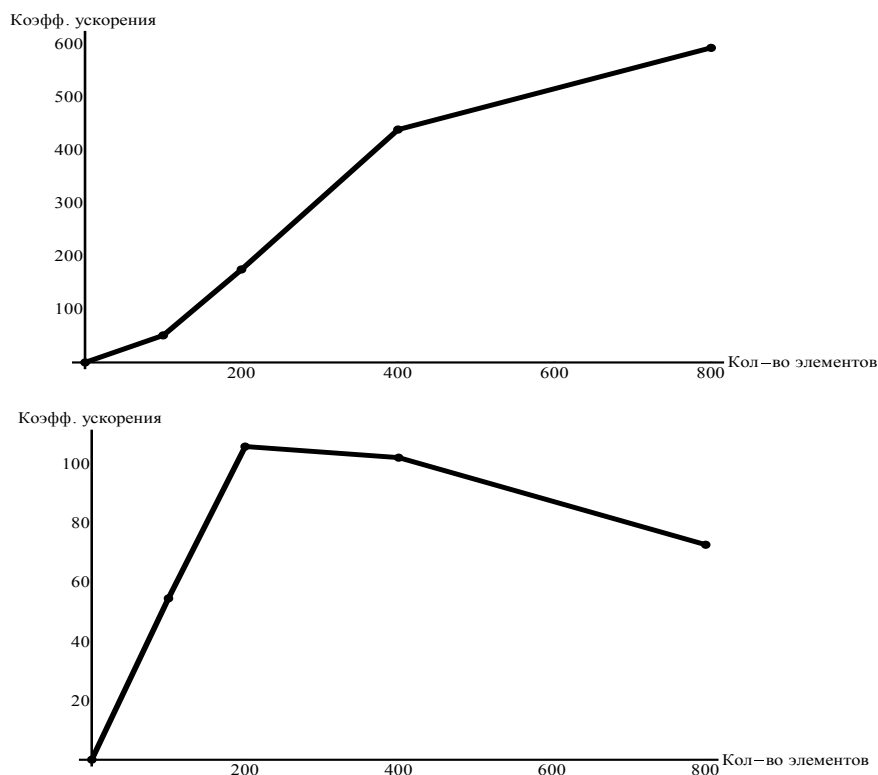


Рис. 4. Коэффициенты ускорения расчетов при расчете матрицы взаимовлияний (а), распределения потенциала в полупространстве (б)

В результате было получено многократное уменьшение времени расчетов. Для 800 граничных элементов было получено 592-кратное ускорение параллельных вычислений по сравнению с последовательными при расчете матрицы взаимовлияний. Ускорение в 73 раза было получено при расчете распределения потенциала в полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков, С.С., Напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость в окрестности контактного взаимодействия в трибофатической системе колесо / рельс с учетом неконтактного деформирования рельса / С.С. Щербаков, О.А. Насань // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2016. – № 1 (32). – С. 234–247.
2. Журавков, М.А. Объемная повреждаемость динамически нагруженных элементов режущего инструмента сельскохозяйственного комбайна / Журавков М.А., Щербаков С.С., Насань О.А. // Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сборник научно-методических статей. – Вып.30. – Минск: БНТУ, –2015. – С. 297 – 305.
3. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд – М: Мир, 1984. – 494 с.
4. Крауч, С Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд – М: Мир, 1987. – 328 с.
5. Beer, G. Boundary element method with programming / G. Beer, I. Smith, Duenser C. – Springer, 2008. – 494 p.
6. Журавков, М.А. Гранично-элементное моделирование с использованием элементов с квадратичным распределением усилий и распараллеливанием вычислений / М.А. Журавков, А.В. Круподеров, С.С. Щербаков // Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сборник научно-методических статей. – Вып.29. – Минск: БНТУ, – 2014. – С.105-110.
7. http://www.nvidia.ru/object/cuda_home_new.html

Поступила в редакцию 05.11.2016