Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Машиностроительный факультет

Кафедра «Технология машиностроения»

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ ЛИСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИМПЛЕКС МЕТОДА

Методические указания к лабораторной работе

по дисциплине "Дискретная математика и математическое моделирование технологических задач в машиностроении»

Электронный учебный материал

Минск 2017

УДК 621.98: 519.1 (076.5) (075.8)
ББК 34.642 я 7
М54

Авторы:

Бохан С.Г., доцент кафедры «Технология машиностроения» Белорусского национального технического университета, кандидат технических наук , Варварина И.А., старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения» Белорусского национального технического университета

Рецензент:

Гулай А.В., доцент кафедры «Интеллектуальные системы» Белорусского национального технического университета, кандидат технических наук

В методических указаниях даны практические рекомендации по содержанию, объему и последовательности выполнения лабораторной работы "Оптимизация раскроя листовых материалов с использованием симплекс метода" по дисциплине «Дискретная математика и математическое моделирование технологических задач в машиностроении».

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
тел. (017)2939297, факс (017)2924101
E-mail: metech@bntu.by
Регистрационный № БНТУ/МСФ23-02.2017

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ее целью является освоение студентами методов нахождения оптимальных решений широкого круга технических задач, решаемых с помощью симплекс метода.

2 ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания разработаны в соответствии с базовым учебным планом по дисциплине «Дискретная математика и математическое моделирование технологических задач в машиностроении». В процессе выполнения лабораторной работы, студенты решают следующие вопросы: находят начальные опорные планы, исследуют их на оптимальность, оптимизируют начальные опорные планы до нахождения оптимального решения по раскрою листового материала.

3 СИМПЛЕКС-МЕТОД

3.1 ОСНОВНАЯ ИДЕЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Одним из универсальных методов решения задач, содержащих более двух переменных, является *симплексный (симплекс-метод),* называемый также *методом последовательного улучшения плана.*

Пусть задача записана в канонической форме:

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,(\max) \qquad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0} \quad \left(i=\overline{1,m}\right) \qquad (3.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(i=\overline{1,n}\right) \qquad (3.3)$$

Если задача (3.1) - (3.3) разрешима, то ее оптимальный план совпадает, по крайней мере, с одним из опорных решений (планов) системы уравнений (3.2). Именно этот опорный план и отыскивается симплекс-методом в результате упорядоченного перебора опорных планов. Применительно к задаче (3.1) - (3.3) упорядоченность понимается в том смысле, что при переходе от одного опорного плана к другому соответствующие им значения целевой функции (3.1) возрастают (не убывают). Поэтому симплекс-метод называют методом последовательного улучшения плана. Поскольку общее число опорных планов не превышает C_n^r, то через конечное число шагов будет либо найден оптимальный опорный план, либо установлена неразрешимость задачи.

Решение задачи (3.1) - (3.3) складывается из двух этапов: *на первом находят какой-либо начальный опорный план* $\overline{X_0}$*. На втором - по специальным правилам переходят от начального плана* $\overline{X_0}$ *к другому, более близкому к оптимальному, опорному плану* $\overline{X_1}$, *затем к следующему* $\overline{X_2}$ *и так до тех пор, пока задача не будет решена.*

С геометрической точки зрения перебор опорных планов можно толковать как *переход по ребрам из одной вершины многогранника планов в другую по направлению к вершине* $\overline{x^*}$, *в которой целевая функция достигает максимального значения* (рисунок 3.1).

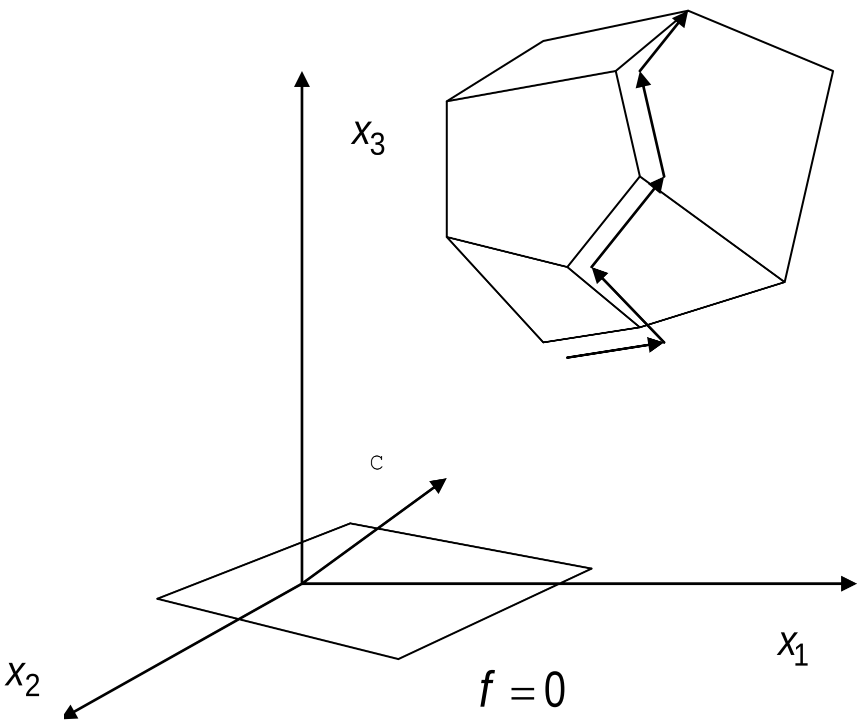


Рисунок 3.1 - Многогранник опорных планов

3.2 НАХОЖДЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА

Для компактности и единообразия вычислительной процедуры к исходной жордановой таблице приписывают строку для целевой функции (таблица 3.1). В результате после приведений системы ограничительных уравнений к единичному базису целевая функция, как и базисные переменные, окажется выраженной через свободные переменные.

Таблица 3.1

	1	$-x_1$	...	$-x_n$
0=	a_{10}	a_{11}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...
0=	a_{m0}	a_{m1}	...	a_{mn}
f=	0	$-c_1$	...	$-c_n$

Итак, для нахождения начального опорного плана задачи (3.1) - (3.3) можно предложить следующий алгоритм:

1) записать задачу в форме жордановой таблицы так, чтобы все элементы столбца свободных членов были неотрицательными, т.е. выполнялось неравенство $a_{i0} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$. Те уравнения системы (3.2), в которых свободные члены отрицательны, предварительно умножаются на - 1. Табл. 3.1 называют **симплексной;**

2) табл. 3.1 преобразовать шагами жордановых исключений, замещая нули в левом столбце соответствующими x. При этом на каждом шаге разрешающим может быть выбран любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. Строка целевой функции на выбор разрешающих столбцов на данном этапе никакого влияния не оказывает. Разрешающая строка определяется по наименьшему из отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца (такие отношения будем называть **симплексным**).

В ходе жордановых исключений столбцы под "переброшенными" на верх таблицы нулями (разрешающие столбцы) можно вычеркивать. Подлежат вычеркиванию и строки, состоящие из одних нулей.

Если в процессе исключений встретится 0-строка, все элементы которой — нули, а свободный член отличен от нуля, то система ограничительных уравнений решений не имеет.

Если же встретится 0-строка, в которой, кроме свободного члена, других положительных элементов нет, то система ограничительных уравнений не имеет неотрицательных решений.

Если система ограничительных уравнений совместна, то через некоторое число шагов все нули в левом столбце будут замещены x и тем самым получен некоторый базис, а следовательно, и отвечающий ему опорный план. Чтобы выписать из таблицы компоненты опорного плана, надо положить равными нулю свободные переменные, тогда базисные переменные будут равны соответствующим свободным членам: число шагов все нули в левом столбце будут замещены x и тем самым получен $x_1=b_{10},\ldots, x_r=b_{r0}$, $x_{r+1}=0,\ldots, x_n=0$ или $\overline{x_0}=(b_{10};\ldots; b_{r0}; 0;\ldots;0)$. Отвечающее опорному плану $\overline{x_0}$ значение функции f равно свободному члену b_{00}, ***т.е.*** $f(\overline{x_0})=b_{00}$.

В п.1 алгоритма предполагается, что все элементы столбца свободных членов неотрицательны. Это требование не обязательно, но если оно выполнено, то все последующие жордановы исключения выполняются только с положительными разрешающими элементами", а это удобно при вычислениях.

В случае, когда в столбце свободных членов имеются ***отрицательные*** числа, разрешающий элемент выбирают следующим образом:

1) просматривают строку, отвечающую какому-либо отрицательному свободному члену, например t-строку, и выбирают в ней какой-либо отрицательный элемент, а соответствующий ему столбец принимают за разрешающий (мы предполагаем, что ограничения задачи совместны);

2) составляют отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца, имеющим одинаковые знаки (симплексные отношения);

3) из симплексных отношений выбирают наименьшее, оно и определит разрешающую строку (пусть ею будет, например, p-строка);

4) на пересечении разрешающих столбца и строки находят разрешающий элемент, с которым и делают шаг жорданова исключения

.

Если разрешающим оказался элемент t-строки, то преобразованный свободный член этой строки станет положительным. В противном случае после сделанного шага вновь обращаются к t-строке. Если задача разрешима, то через некоторое число шагов в столбце свободных членов не останется отрицательных элементов.

Пример 3.1. Найти какой-нибудь опорный план задачи

$$f = x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 5 \quad (\max)$$

$$4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$$

Решение. Записав задачу в симплекс-таблицу и сделав два шага жордановых исключений (табл. 3.2 - 3.4), замечаем, что во второй строке таблицы 3.4 всё элементы, кроме свободного члена, - нули; получаем 0 = 2. Следовательно, система ограничительных уравнений несовместна. Задача неразрешима.

Таблица 3.2

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	2	4	-2	-2	-3
0=	3	2	-1	1	-1
0=	1	2	-1	5	-6
f=	5	-1	3	2	1

Таблица 3.3

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	0	0	-12	15
0=	2	0	-4	5
x_1=	1/2	-1/2	5/2	-3
f=	11/2	5/2	9/2	-2

Таблица 3.4

	1	$-x_2$	$-x_3$
$x_4=$	0	0	-4/5
$0=$	2	0	0
$x_1=$	1/2	-1/2	1/10
$f=$	11/2	5/2	29/10

Пример 3.2 Найти какой-либо опорный план задачи:

$$f = 3x_1 - x_2 + 5 \qquad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 &= -7 \\ 2x_1 - x_2 - x4 - x_5 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1{,}5}\right)$$

Решение. Задача записана в канонической форме, но два свободных члена отрицательны, поэтому, перед тем как записать задачу в форме таблицы, умножим первое и второе уравнения на - 1. В результате все свободные члены в исходной симплексной таблице 3.5 положительны.

Таблица 3.5

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
0=	4	-1	-1	1	1	0
0=	7	-1	2	1	0	1
0=	7	2	-1	0	1	1
$f=$	5	-3	1	0	0	0

А теперь будем перебрасывать нули из левого столбца на таблицы. Для первого шага жорданова исключения возьмем разрешающим, например, четвертый столбец (в нем есть положительные элементы!). Разрешающая строка определится по минимальному из отношений: 4/1 и 7/1. В данном случае min(4/1; 7/1)=4/1, что соответствует первой строке, которая и будет разрешающей.

Таблица 3.6

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
x_4	4	-1	-1	1	0
0=	7	-1	2	1	1
0=	3	3	0	-1	1
f=	5	-3	1	0	0

Сделав два шага жордановых исключений (таблицы 3.6, 3.7), приходим к таблице 3.8, в левом столбце которой уже нет нулей: базис выделен. Ему соответствует начальный опорный план: x1=0, x2=0, x3=2, x4=2, x5=5 или $\overline{x_0}$ =(0; 0; 2; 2; 5), f(x0) = 5.

Таблица 3.7

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_4=	4	-1	-1	1
0=	4	-4	2	2
x_5=	3	3	0	-1
f=	5	-3	1	0

Таблица 3.8

	1	$-x_1$	$-x_2$
x_4=	2	1	-2
x_3=	2	-2	1
x_5=	5	1	1
f=	5	-3	1

Мы нашли опорный план в базисе x_3, x_4, x_5. Если таблицу 3.8 преобразовывать с другими разрешающими элементами, то получится другой базис, а следовательно, и другой опорный план.

3.3 НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОПОРНОГО ПЛАНА

Начальный опорный план x_0 исследуется на оптимальность:

1. Если в f-строке нет отрицательных элементов (не считая свободного члена), - план оптимален.

Если в f-строке нет также и нулевых элементов, то оптимальный план единственный; если же среди элементов есть хотя бы один нулевой, то оптимальных планов бесконечное множество.

2. Если в f-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных, то целевая функция не ограничена в допустимой области ($f \to \infty$). Задача неразрешима.

3. Если в f-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в каждом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному. Для этого столбец с отрицательным элементом в f-строке берут за разрешающий (если в f-строке отрицательных элементов несколько, разрешающим выбирают столбец с наибольшим по абсолютной величине отрицательным элементом); определяют по минимальному симплексному отношению разрешающую строку и делают шаг Жорданова исключения. Полученный опорный план вновь исследуют на оптимальность.

Описанный процесс повторяется до тех пор, пока не будет найден оптимальный опорный план либо установлена неразрешимость задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ. Задачу минимизации можно формально заменить задачей максимизации функции ($-f$). Но можно этого не делать. Признаком оптимальности опорного плана задачи минимизации является отсутствие положительных элементов в f-строке симплекс таблицы, содержащей опорный план. Вся остальная процедура остается прежней.

4 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Из листового проката двух (одного) типов необходимо вырезать некоторое количество заготовок для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется деталей первого типа - 3 штуки, второго - 2, третьего (если это предусмотрено в варианте задания) - 1. Возможности заготовительного участка не ограничены. Размеры листов проката и типы заготовок указаны в вариантах заданий и на рисунке 4.1. При решении задачи разработать не менее двух вариантов раскроя для каждого из двух типов листового проката или не менее четырех, если прокат только одного типа.

Варианты заданий к задаче

Таблица 4.1

Вариант	Лист проката 1		Лист проката 2		Типы заготовок		
	a	b	a	b	Тип 1	Тип 2	Тип 3
1	4	13	5	11	А	Г	-
2	4	13	5	15	А	В	-
3	4	14	4	8	А	Е	-
4	4	11	4	7	А	Ж	-
5	4	15	4	9	А	З	-
6	4	13	5	10	Б	И	-
7	4	12	5	10	В	И	-
8	3	11	5	9	Г	И	-
9	4	14	5	9	Д	И	-
10	5	12	5	10	Е	И	-
11	4	16	4	8	Е	Ж	-
12	6	10	-	-	А	Б	В
13	4	13	-	-	А	Б	Г
14	3	14	-	-	А	Б	З

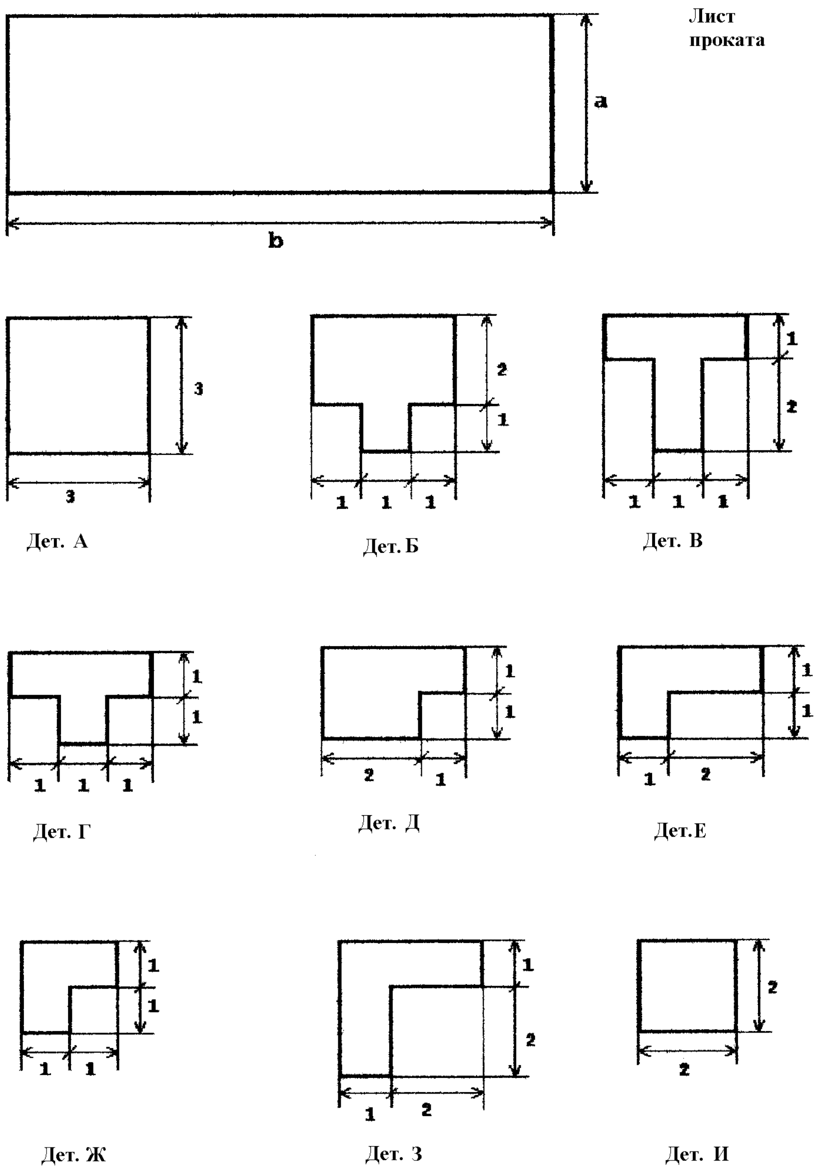


Рисунок 4.1 - Варианты заданий

5 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

<u>Основные положения</u>

Некоторые предприятия потребляют большое количество листового металлопроката. При разделении листов на заготовки образуются отходы, размеры которых зависят от того, как расположены заготовки на листе. В таких случаях актуальной является задача оптимального раскроя промышленного материала, которая формулируется следующим образом: каких размеров и в каких количествах следует поставлять заводу листовой прокат и как его раскраивать, чтобы обеспечить снижение отходов металла до минимума. Для решения этой задачи в общем случае должны быть установлены следующие исходные данные:

- количество n типов листов, которые могут быть поставлены предприятию, и их размеры;
- вес p_j одного листа j -го типа, $j = \overline{1, n}$;
- количество m типоразмеров заготовок, необходимых для производства деталей, и их размеры;
- количество L_i заготовок i-го наименования, которое необходимо изготовить за планируемый период, $i = \overline{1, m}$;
- минимальная транзитная норма C_m;
- суммарный T фонд рабочего времени заготовительного участка предприятия.

Кроме этого для каждого типа j листа необходимо установить допустимые схемы его раскроя k_j и для каждой такой схемы найти:

- l_{ik_j} - количество заготовок i-го наименования, которое можно получить при раскрое одного листа j -го типа k_j -м способом;
- t_{ik_j} - время, затрачиваемое на раскрой одного листа j-го типа k_j -м способом;
- c_{ik_j} - величина отхода материала, получаемою при раскрое одного листа j-го типа k_j -м способом.

С учетом введенных обозначений можно сказать, что для решении поставленной производственной задачи требуется найти количество x_{k_j}, листов j-го типа, раскраиваемых k_j -м способом для всех $j = \overline{1, n}$ и для всех возможных схем раскроя.

Искомые величины x_{k_j} должны удовлетворять следующим условиям:

а) полное обеспечение потребности в заготовках

$$\sum_i \sum_{k_j} l_{ik_j} x_{k_j} = L_i, \; i = \overline{1, m};$$

б) учет ограниченности и производственных возможностей заготовительного участка

$$\sum_j \sum_{k_j} t_{k_j} x_{k_j} \leq T;$$

в) требование соблюдения транзитных норм

$$\sum_j \rho_j x_{k_j} \geq c_m, \; j = \overline{1, n};$$

г) условие не отрицательности

$$x_{k_j} \geq 0, \forall j, \forall k_j.$$

При этом необходимо обеспечить минимум линейной функции

$$z = \sum_j \sum_{k_j} c_{k_j} x_{k_j}$$

выражающей суммарный отход материала. Получена задача линейного программирования, для решения которой необходимо воспользоваться симплекс-методом.

Методику решения задачи рассмотрим на следующем примере. Необходимо из листового проката вырезать некоторое количество заготовок двух типов А и Б для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется 2 детали типа А и 10 деталей типа Б. Возможности заготовительного участка не ограничены. Размеры листа и заготовок представлены на рисунке 5.1.

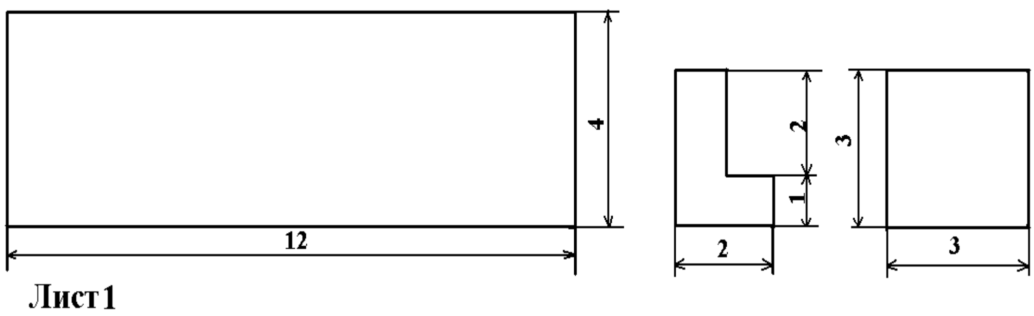


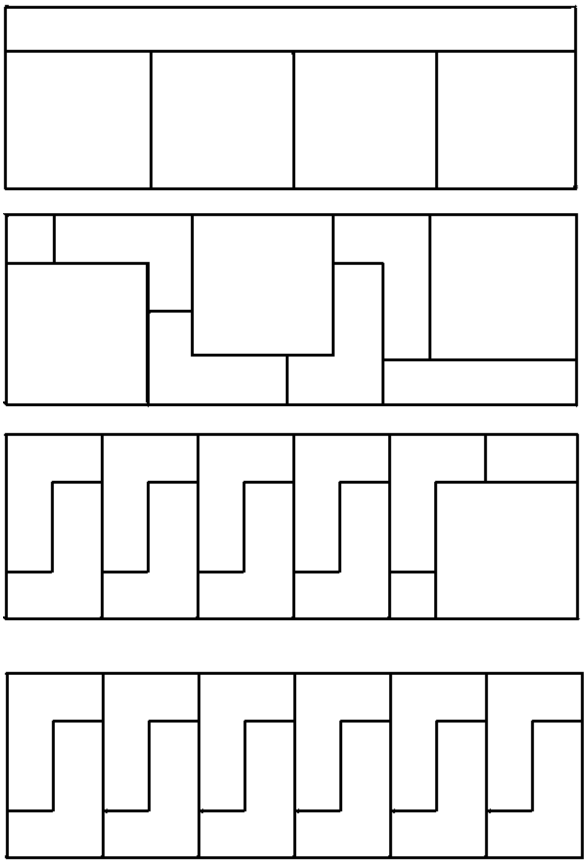
Рисунок 5.1 - Эскизы листа проката и заготовок

Выбираем возможные схемы раскроя листа. При этом следует иметь в виду, что в совокупности они должны обеспечивать получение заготовок всех требуемых видов, хотя конкретный вариант раскроя какого-либо листа может содержать заготовки, например, только одного вида. Не следует также допускать схем раскроя, когда размеры отхода превосходят размеры каких-либо заготовок.

По выбранным картам раскроя заполняем таблицу:

Таблица 5.1.

Листы	Варианты раскроя	Заготовки		Отходы в условных единицах
		А	Б	
1	1(x_1)	4	0	12
	2(x_2)	3	4	5
	3(x_3)	1	9	3
	4(x_4)	0	12	0



Способ раскроя 1

Способ раскроя 2

Способ раскроя 3

Способ раскроя 4

Рисунок 5.2 - Варианты раскроя листа проката

Вводим обозначения:

x_1 - количество листов, раскраиваемых способом 1; x_2, x_3, x_4 - способами 2, 3 и 4 соответственно.

Формализуем условия задачи:

$$z = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \min;$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180;$$

$$4x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Полученную задачу линейного программирования решаем описанным выше симплекс-методом.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	180	4	3	1	0
0=	900	0	4	9	12
f=	0	-12	-5	-3	0

6 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Разработать возможные схемы раскроя листа.
2. Сформулировать условия задачи
3. Определить целевую функцию
4. Решить задачу симплекс методом

7 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название и цель работы
2. Задание в соответствии с вариантом
3. Эскиз вариантов раскроя, выполненный на ЭВМ в соответствии с заданием
4. Начальный опорный план
5. Оптимальный опорный план

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование: теория, методы и приложения. Изд.2-е. М.: КРАСАНД, 2012. – 424 с.

1. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. – Мн.: Выш. шк., 2001. - 448с.

2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 1986. – 387с.