

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОВЯЗКИХ ТЕЛ

Доктора физ.-мат. наук, профессора **ЧИГАРЕВ А. В.<sup>1)</sup>**, **ЧИГАРЕВ Ю. В.<sup>2)</sup>**,  
**ПРОНКЕВИЧ С. А.<sup>1)</sup>**

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет,

<sup>2)</sup>Белорусский аграрный технический университет

Существенно нелинейные динамические системы при определенных условиях обнаруживают свойство хаотизации, состоящее в том, что при детерминированных начальных и граничных условиях система с некоторого момента времени начинает вести себя случайным образом. Явления детерминированного хаоса изучаются, как правило, для систем с сосредоточенными параметрами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Значительно в меньшей степени исследованы системы с распределенными параметрами, описываемые уравнениями в частных производных. Требования к снижению материалоемкости конструкций требуют исследования их поведения при учете физической нелинейности для различных материалов и изучения сценариев перехода системы к состояниям детерминированного хаоса. Для этого применяются различные методы, одним из которых является корреляционный, позволяющий численно оценить явления расщепления корреляций. Переход от распределенной системы к сосредоточенной осуществляется с помощью метода Бубнова – Галеркина и его обобщений, что позволяет в случае тел определенной геометрии использовать разложение по собственным функциям. Нахождение собственных форм и частот колебаний существенно зависит от геометрии пластины и наложенных связей, что в каждом неконкретном случае представляет самостоятельную задачу.

Рассматривается вязкоупругое тело, описываемое моделью Кельвина – Фойтха, совершающее колебания при заданных детерминиро-

ванных граничных и начальных условиях. Требуется найти критерии на физические параметры тела, при которых возможен переход в хаотический режим.

Рассмотрим вязкоупругое тело объемом  $V$ , в котором уравнения, определяющие связь между напряженным и деформированным состояниями, имеют вид

$$\sigma_{ij} = \left( \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \epsilon_{kk} \delta_{ij} + \left( \lambda_3 + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial t} \right) e_{ij}, \quad (1)$$

где  $\lambda_1, \lambda_3$  – коэффициенты Ламе;  $\lambda_2, \lambda_4$  – то же вязкости.

Уравнение движения имеет вид [1]

$$\sigma_{jk} (\delta_{ik} + u_{ik}) n_j - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

На поверхности  $S$  тела граничные условия запишем в виде

$$\left[ \sigma_{jk} (\delta_{ik} + u_{ik}) \right] n_j = P_i. \quad (3)$$

Компоненты тензора деформаций  $e_{ij}$  выразим через перемещения по формулам Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji} + u_{ki} u_{kj}). \quad (4)$$

В (1)–(4) принято:  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $e_{ij}$  – относительные деформации;  $u_i$  – перемещения;  $\lambda_1, \lambda_3$  – коэффициенты упругости;  $\lambda_2, \lambda_4$  – коэффициенты вязкости;  $\rho$  – плотность материала;  $n_j$  – нормаль к поверхности тела;  $P_i$  – поверхностные силы;  $t$  – время.

Краевая задача (1)–(4) является несамосопряженной. Воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. Выделим линейную и нелинейную части в уравнении (1), учитывая (4):

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2} \left( \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left( \lambda_3 + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right). \quad (5)$$

Линейная часть напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}$  связана с деформациями и их скоростями законом

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \left( \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left( \left( \lambda_3 + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right). \quad (6)$$

Подставив (5) в (2) и (3), получим уравнения движения

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{jk} \delta_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} F_{ij} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

и граничные условия в виде

$$\left[ \tilde{\sigma}_{jk} \delta_{jk} + F_{ij} \right] n_j = P_i, \quad (8)$$

где

$$F_{ij} = \left[ \frac{1}{2} \left( \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left( \lambda_3 + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) \right] \delta_{ik} + \left\{ \left[ \tilde{\sigma}_{i,k} + \frac{1}{2} \left( \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)^2 \right] \delta_{jk} + \frac{1}{2} \left( \lambda_3 + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) \right\} u_{ik} \quad (9)$$

Левые части уравнений (7) и (8) содержат объемные и поверхностные силы, работу которых на возможных перемещениях приравняем нулю:

$$\int_V \left\{ \left[ \sigma_{jk} \delta_{ik} + F_{ij} \right] n_j - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right\} \delta u_m dV + \int_V \left\{ P_i - \left[ \tilde{\sigma}_{jk} \delta_{ik} + F_{ij} \right] n_j \right\} \delta u_m dS = 0. \quad (10)$$

Решение (10) ищем в виде

$$u_n = f_r(t) \varphi_{rn}(x_i), \quad (11)$$

где  $f_r(t)$  – функция времени;  $\varphi_{rn}(x_1, x_2, x_3)$  – собственные векторы, образующие полную систему функций, удовлетворяющих условию ортогональности:

$$\int_V \rho \varphi_{im} \varphi_{in} dV = \delta_{mn}. \quad (12)$$

Продельвая выкладки, аналогичные [1], приходим к системе дифференциальных уравнений для координатных функций  $f_r(t)$  ( $r = 1, 2, 3$ ), которая в одномерном случае имеет вид:

$$\ddot{f} + \gamma \dot{f} + (1 + \alpha f^2) \omega_0^2 f = \varepsilon \Phi, \quad (13)$$

$$r = 1; \quad f_1(t) = f(t),$$

где  $\Phi$  – внешнее возмущение;  $\gamma$  – коэффициент вязкости;  $\omega_0$  – собственная частота;  $\alpha$  – коэффициент нелинейности;  $\varepsilon$  – малый параметр.

Считаем, что  $\varepsilon \ll 1$  и  $\alpha f^2 \ll 1$ .

В случае пренебрежимо малого затухания уравнение (13) приводится к уравнению движения для осциллятора Дуффинга

$$\ddot{f} + (1 + \alpha f^2) \omega_0^2 f = \varepsilon \Phi. \quad (14)$$

В (14) выберем малое возмущение в правой части в виде  $\delta$ -функций Дирака [2], длящихся бесконечно малое время и следующих с периодом  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ,  $\varepsilon$  – малый параметр:

$$\Phi(t) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (15)$$

В интервале между двумя соседними  $\delta$ -толчками решение имеет вид

$$f = A \cos \left[ \left( 1 + \frac{3}{\Omega} \alpha A^2 \right) \omega_0 t + \psi \right]. \quad (16)$$

В конечных разностях изменения амплитуды и фазы колебаний представим в виде:

$$A_{n+1} = A_n(1 + 0,5 \varepsilon \sin 2\psi_n);$$

$$\psi_{n+1} = \left\{ \psi_n + 2S_n \cos \psi_n \sin \psi_n + \right.$$

$$\left. + \varepsilon(1 - \sin^2 \psi_n) + \frac{2\pi\omega_n}{\Omega} \right\}, \quad (17)$$

где

$$S_n = 0,3 \varepsilon \omega T A^2. \quad (18)$$

Фигурные скобки в (17) означают дробную часть аргумента. В случае  $S_n \gg 1$ , как показано в [2, 3], колебания тела, описываемые уравнениями типа (14), будут носить стохастический перемешивающийся характер, т. е. для рядом стоящих значений фаз  $\psi_n$  можно получить значения  $\psi_{n+1}$ , заметно отличающиеся друг от друга. Это означает, что изменение фаз колебаний тела происходит не регулярным, а случайным образом. Согласно [3] данная колебательная система обладает всеми свойствами стохастичности: перемешиванием, эргодичностью и положительной колмогоровской энтропией.

Прежде чем переходить к вероятностному исследованию устойчивости уравнения (14) после наступления хаотизации, рассмотрим еще две детерминированные модели, обобщающие (14). Предположим, что внешнее воздействие зависит от состояния системы, а именно амплитуда функции  $\Phi(t)$  зависит от  $f^m(t)$ , где  $m = 2, 3$ . Тогда уравнение (14) может быть записано в виде

$$\ddot{f} + f \left[ \omega_0^2 - \varepsilon f \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] - \alpha f^3 = 0. \quad (19)$$

В дальнейшем считаем  $T = 2\pi$ , что соответствует периодическому воздействию внешних импульсов в моменты времени  $t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n, n + 1, \dots$ ). В то же время (19) можно рассматривать как уравнение, описывающее колебание упругого тела вследствие изменений жесткости в моменты времени  $t_i$ .

Для (19) уравнение для амплитуд и фаз типа (17), (18) запишется в виде:

- при  $m = 2$

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \rho_n^{3/2} \sin \varphi_n;$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + 2\pi \left( \omega_0 - \frac{N}{3} \right) -$$

$$- \frac{3\pi}{4\omega_0} \alpha \rho_n - \frac{\varepsilon}{4\omega_0} \sqrt{\rho_n} \cos \varphi_n; \quad (20)$$

$$\varphi_n = \psi_n \Omega_n t_{n+1} + k_n (2\pi/3), \rho_n = A_n^2;$$

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n - \frac{3\alpha}{4\omega_0} A_n (A_{n+1} - A_n);$$

- при  $m = 3$

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\varepsilon}{4\omega_0} \rho_n^2 \sin 4\varphi_n;$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + 2\pi \left( \omega_0 - \frac{N}{3} \right) -$$

$$- \frac{3\pi}{4\omega_0} \alpha \rho_n - \frac{\varepsilon}{4\omega_0} \sqrt{\rho_n} \cos \varphi_n; \quad (21)$$

$$\varphi_n = \psi_n + \Omega_n t_{n+1} + k_n \left( \frac{\pi}{2} \right).$$

Вычисляя корреляционные функции для моделей (20), (21)  $\langle \varphi_n, \varphi_{n+k} \rangle = R(k)$  и исследуя их при  $k \rightarrow \infty$ , устанавливаем условия, при которых наступает стохатизация колебаний. Учет вязкости материала обеспечивает конечный рост амплитуды (как в случае линейного, так и нелинейного резонанса) и устойчивость колебаний. Отметим, что для моделей (20), (21) упругая нелинейность без учета вязкости может при определенных условиях на параметры системы приводить к конечному росту амплитуд на резонансных частотах и обеспечивать устойчивость.

На рис. 1 интервал  $[-\delta, \delta]$  определяет область реального изменения параметров  $\left[ \delta = \frac{\varepsilon}{12\pi\omega_0} \right]$ , причем выполняются условия резонанса  $N = 3\omega_0$  для  $m = 2$  при  $\alpha \neq 0$ :  $1 - C > 0$ ;  $2 - C < 0$ ;  $3 - C = 0$ , где  $C$  – инвариант колебаний. Из рис. 1 в этом случае следует устойчивость процесса. При  $\alpha = 0$  амплитуда колебаний неограниченно возрастает (кривые 1', 2', 3'), что свидетельствует о том, что учет нелинейности при  $\alpha \neq 0$

в предыдущем случае играл стабилизирующую роль.

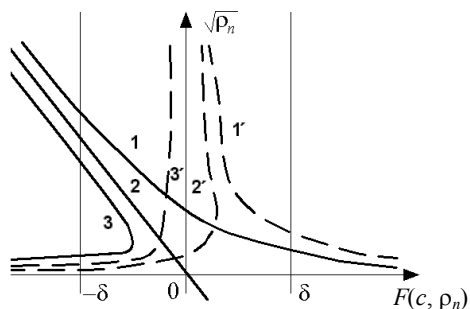


Рис. 1. График изменения амплитуды колебаний при значении параметров:  $m = 2$ ;  $N = 3\omega_0$

Для случая  $m = 3$ ,  $N = 4\omega_0$  из рис. 2 следует, что колебания могут быть устойчивыми независимо от  $\alpha$ , но зависимыми от знака  $\epsilon$ .

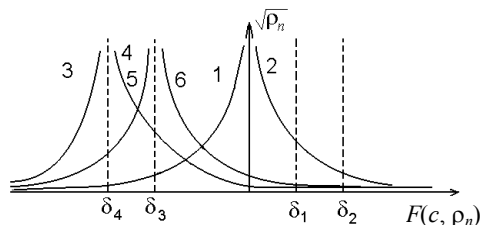


Рис. 2. График изменения амплитуды колебаний при:  $m = 3$ ;  $N = 4\omega_0$

На рис. 2:  $\delta_1 = \frac{\epsilon}{16\pi\omega_0}$ ;  $\delta_2 = \frac{\epsilon}{8\pi\omega_0}$ ;  $\epsilon > 0$  – кривые 1, 2 при  $\alpha = 0$ , кривые 3, 4 при  $\alpha \neq 0$ ;  $\delta_3 = \frac{\epsilon}{8\pi\omega_0}$ ;  $\delta_4 = \frac{\epsilon}{4\pi\omega_0}$  – кривые 5, 6 при  $\alpha \neq 0$ ,  $\epsilon < 0$  (движение неустойчиво).

Вернемся к уравнению (14) и рассмотрим его устойчивость в хаотическом режиме. Запишем (14) в переменных «действие – угол» [2]:

$$\dot{i} = -\epsilon \frac{\partial H_1(I, \theta, t)}{\partial \theta}; \quad (22)$$

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \epsilon \frac{\partial H_1(I, \theta, t)}{\partial I}, \quad (23)$$

где

$$H_1 = \frac{f^2 \omega}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (24)$$

Так как  $\epsilon \ll 1$ , то членом  $\epsilon \frac{\partial H_1(I, \theta, t)}{\partial \theta}$  можно пренебречь, потому что он имеет меньший

порядок по сравнению с нелинейностью в  $\omega(I)$ . Введем функцию плотности вероятности  $W(I, \theta, t)$  и запишем уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (L_0 + \epsilon \delta L)W, \quad (25)$$

где

$$L_0 = -\omega \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$\delta L = \left( \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial I} - \frac{\partial H_1}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Уравнение (25) представим в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left\{ -\dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon \frac{\partial}{\partial I} \right\} W. \quad (26)$$

Обозначим  $\frac{\partial H_1(I, \theta, t)}{\partial \theta} = R(I, \theta, t)$ . Разложим функции  $W$  и  $R$  в ряды Фурье по формулам:

$$W(I, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n(I, t) \exp in\theta; \quad (27)$$

$$R(I, \theta, t) = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} R_{n,k}(I) \exp i(n\psi + k). \quad (28)$$

Уравнение (26) с учетом (27), (28) запишем в виде

$$\frac{\partial W_n}{\partial t} + inW_n \dot{\theta} + \epsilon \frac{\partial}{\partial I} \left[ \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} R_{n,k}(I) W_{n-k} \right] = 0. \quad (29)$$

Для начального распределения  $W_n(I, 0) = W_0(I, 0) \delta_{n,0}$  ( $\delta_{n,0}$  – символ Кронекера) уравнение (29) примет вид

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = -\frac{\partial(cIW_0)}{\partial I} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial I^2} (DI^2W_0), \quad (30)$$

где  $c = 0,5D = 8\epsilon^2 \pi \Omega$ .

Уравнение (30) представляет собой уравнение типа Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) для функций плотности распределения вероятности  $W_0$  от переменных действие –  $I$ , которые служат интегралами движения невозмущенной системы (рис. 3).

Согласно уравнению (30) [2] стохастическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{i} = 2I \sqrt{\frac{c}{N_0}} v(t), \quad (31)$$

где  $\langle v \rangle = 0$ ;  $\langle v(t)v(t+\tau) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t)$ ;  $v(t)$  – внешнее возмущение в виде «белого шума»;  $N_0/2$  – спектральная плотность.

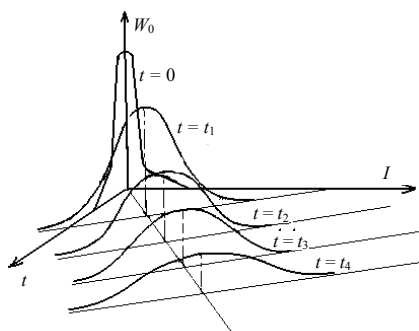


Рис. 3. Изменение функции распределения  $W_0$  согласно уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова

В случае единичной спектральной плотности в старых переменных случайный процесс будет описываться стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\dot{f} = 0,5f \sqrt{2c} v_0(t). \quad (32)$$

Соответствующее (32) уравнение ФПК запишется в виде [4]

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{cf W_0}{4} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial f^2} (cf^2 W_0). \quad (33)$$

Решение (33) для стационарного случая будет

$$W_{0c} = \frac{M}{cf^2} \exp(\ln \sqrt{f}), \quad (34)$$

где  $M$  определяется из условия нормировки

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{cf^2} \exp(\ln \sqrt{f}) df. \quad (35)$$

Среднеквадратическое отклонение от равновесных форм колебательного движения (13) определяется равенством

$$E(f^2) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 W_{0c} df. \quad (36)$$

Тогда согласно [5] решение уравнения (13)  $f^*(t) = 0$  назовем устойчивым в среднем квадратичном, если для любого  $\mu > 0$  найдется такое  $\Delta(\mu) > 0$ , что при выполнении условия  $|f_0| < \Delta(\mu)$  для любого  $t > t_0$  справедливо неравенство

$$E[f^2] < \mu. \quad (37)$$

Критерий устойчивости (37) накладывает ограничения на величину интенсивности колебаний, т. е. кинетическую энергию.

### ВЫВОДЫ

1. Проблема возникновения детерминированного хаоса в нелинейных вязкоупругих средах может быть сведена методом Бубнова – Галеркина к исследованию уравнений типа Дуффинга.

2. В случае малой вязкости получены условия перехода колебаний в стохастический режим.

3. Для моделей типа параметрических нелинейностей может играть при определенных условиях стабилизирующую роль, а при других условиях возможны неустойчивые решения.

4. Расплывание плотности вероятности во времени (дисперсия зависит от времени) свидетельствует о возможности неустойчивых режимов в хаотичном режиме.

5. Получены условия устойчивости колебаний тела в среднем квадратичном решении.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Гузь, А. Н.** Устойчивость упругих тел при конечных деформациях / А. Н. Гузь. – Киев: Наук. думка, 1973. – 272 с.
2. **Заславский, Г. М.** Статистическая необратимость в нелинейных системах / Г. М. Заславский. – М.: Наука, 1970. – 144 с.
3. **Zaslavski, G. M.** Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics / G. M. Zaslavski // Oxford: Oxford University Press, 2005 ISBN 0198526040.
4. **Чигарев, А. В.** Стохастическая неустойчивость лучей в неоднородных средах / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев // Акустический журнал. – 1978. – Т. 24. – 765 с.
5. **Хасьминский, Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

Поступила 10.10.2011