Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №5, с. 35–43 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0044*

И.Н. МЕЛЕШКО, П.Г. ЛАСЫЙ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В работе построена и обоснована вычислительная схема решения задачи Коши для сингулярного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с интегралом по отрезку действительной оси, понимаемым в смысле главного значения по Коши. Попутно исследуется и приближенно решается интегральное уравнение с логарифмическим ядром специального вида. Получены равномерные оценки погрешностей приближенных формул. Порядки погрешностей приближенных решений пропорциональны порядку погрешности приближения для производной плотности сингулярного интеграла в интегро-дифференциальном уравнении.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, приближенное решение, квадратурная формула, логарифмическое ядро, уравнение Прандтля.

УДК: 517.968 : 519.6

Abstract. In this paper we construct and theoretically justify a computational scheme for solving the Cauchy problem for a singular integro-differential equation of the first-order, where the integral over a segment of the real axis is understood in the sense of the Cauchy principal value. In addition, we study and solve approximately the integral equation with a special logarithmic kernel. We obtain uniform estimates for errors of approximate formulas. Orders of errors of approximate solutions are proved to be proportional to the order of the approximation error for the derivative of the density of the singular integral in the integro-differential equation.

Keywords: integro-differential equation, approximate solution, quadrature formula, logarithmic kernel, Prandtl equation.

Многие задачи теории аналитических функций, гидродинамики, теории упругости, теории фильтрации, теории теплопроводности и ряда других разделов механики, физики и математической физики приводят к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши. Известно, что указанные уравнения точно решаются лишь в редких частных случаях. Для их приближенного решения разработан ряд интересных методов (см., например, [1], [2] и библиографию в них).

Одним из наиболее эффективных методов приближенного решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений является приведение таких уравнений к системе линейных алгебраических уравнений путем замены интеграла подходящей квадратурной суммой. Для практической реализации такого метода важное значение имеет доказательство разрешимости системы и ее устойчивость. Вопрос о решении этой проблемы представляет значительные трудности и во многих случаях до сих пор остается открытым.

Поступила 09.12.2009, окончательный вариант 07.04.2010

Специальные приближенные формулы для интегралов типа Коши [3] дают возможность конструировать сравнительно простые и вместе с тем эффективные вычислительные схемы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с интегралами Гильберта и сингулярными интегралами Коши по отрезку действительной оси, а для их обоснования использовать теорию разностных схем.

В данной статье предлагается одна вычислительная схема для уравнения

$$u'(x) - \lambda q(x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f(x), \quad x\in[-1,1], \quad u(x_0)=0, \quad x_0\in[-1,1]. \tag{1}$$

Здесь $u(x)$ — искомая функция, $q(x)$ и $f(x)$ — заданные на отрезке $[-1,1]$ функции, λ — числовой параметр.

К уравнению (1) приводят некоторые важные задачи гидродинамики (см., например, [4], [5] и библиографию в [1]). Ниже будет установлена связь этого уравнения с известным интегро-дифференциальным уравнением Прандтля, играющим важную роль в теории крыла конечного размаха, контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды.

Непосредственным интегрированием уравнение (1) приводится к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода. Однако ядро такого уравнения имеет сложное выражение. Если же к интегралу, входящему в уравнение, применить интегрирование по частям, то получим интегральное уравнение с логарифмическим ядром относительно производной искомого решения. К уравнениям с такими особенностями применима теория Фредгольма.

1. Интегральное уравнение для производной искомого решения. После применения формулы интегрирования по частям к интегралу в интегро-дифференциальном уравнении (1), получим интегральное уравнение

$$u'(x) - \lambda q(x)\int_{-1}^{1} H(x,t)u'(t)dt = f(x), \quad x\in[-1,1], \tag{2}$$

ядро которого

$$H(x,t) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1-xt+\sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{|t-x|} \tag{3}$$

является функцией симметричной и неотрицательной для всех x и t из промежутка $[-1,1]$. Заметим также, что

$$\int_{-1}^{1} H(x,t)dt = \sqrt{1-x^2}, \quad x\in[-1,1]. \tag{4}$$

Действительно,

$$\int_{-1}^{1} H(x,t)dt = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = H(x,t)|_{-1}^{1} = 0,$$

откуда и следует (4).

Введем линейный оператор $K(u) = \lambda q(x)\int\limits_{-1}^{1} H(x,t)u(t)dt$. Тогда интегральное уравнение (2) приводится к функциональному уравнению

$$u' - K(u') = f \tag{5}$$

в пространстве $C[-1,1]$ непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций. Если $q(x)\sqrt{1-x^2}$ и $f(x)$ непрерывны на $[-1,1]$, то $\|K(u')\|_C \le |\lambda| \max\limits_{x\in[-1,1]} \Big(|q(x)| \int\limits_{-1}^{1} H(x,t)dt\Big)\|u'\|_C$. Отсюда с учетом (4) получаем неравенство $\|K(u')\|_C \le |\lambda| \max\limits_{x\in[-1,1]} \big(\sqrt{1-x^2}|q(x)|\big)\|u'\|_C$, которое согласно теории метода последовательных приближений ([6], с. 213–224) позволяет сделать следующее заключение.

Теорема 1. *Пусть функции* $q(x)\sqrt{1-x^2}, f(x)$ *непрерывны на* $[-1,1]$ *и выполняется условие*

$$|\lambda| r < 1, \quad r = \max_{x\in[-1,1]} \big(|q(x)|\sqrt{1-x^2}\big).$$

Тогда функциональное уравнение (5)*, а вместе с ним и интегральное уравнение* (2) *имеет единственное решение в пространстве* $C[-1,1]$.

Замечание 1. Известно (см., например, [7]), что

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_m(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin(m\arccos x), \quad m = 0,1,\dots,$$

где $T_m(t) = \cos(m\arccos t)$ — многочлен Чебышева первого рода. Но так как

$$\int_{-1}^{1} T'_m(t)H(x,t)dt = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_m(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad T'_m(x) = m\frac{\sin(m\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = mU_{m-1}(x),$$

$U_m(x)$ — многочлен Чебышева второго рода, то

$$\int_{-1}^{1} U_{m-1}(t)H(x,t)dt = \frac{\sqrt{1-x^2}}{m}U_{m-1}(x), \quad m = 1,2,\dots\ .$$

Из последних соотношений следует, что собственным числам $\lambda_m = m$, $m = 1,2,\dots$, интегрального уравнения (2) при $q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ отвечают собственные функции $U_{m-1}(x)$.

Вернемся к исходному интегро-дифференциальному уравнению (1). Очевидно, что если $q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то это уравнение имеет те же собственные числа $\lambda_m = m$ и отвечающие им собственные функции $U_{m-1}(x)$.

2. Квадратурная формула с неотрицательными коэффициентами. При построении вычислительной схемы решения интегрального уравнения (2) главную роль играет способ аппроксимации интеграла квадратурной суммой.

Зададимся на отрезке $[-1,1]$ системой точек

$$x_k = kh, \quad k = -n,\dots,-1,0,1,\dots,n; \quad h = \frac{2}{2n+1}$$

и аппроксимацию функции $u'(x)$ на этом отрезке определим формулой

$$u'(x) \approx \widetilde{u}'(x) = \sum_{k=-n}^{n}\Theta_k(x)u'(x_k), \tag{6}$$

в которой $\Theta_k(x) = 1$, если $x \in [x_k - h/2, x_k + h/2]$ и $\Theta_k(x) = 0$, если $x \notin [x_k - h/2, x_k + h/2]$. В результате получается квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} H(x,t)u'(t)dt = \sum_{k=-n}^{n} A_k(x)u'(x_k) + E_n(x), \tag{7}$$

где коэффициенты

$$A_k(x) = \int_{x_k-h/2}^{x_k+h/2} H(x,t)dt, \tag{8}$$

а $E_n(x)$ — остаточный член. Очевидно, что все $A_k(x)$ неотрицательны для любого $x \in [-1,1]$, а с помощью (4) легко находится сумма

$$\sum_{k=-n}^{n} A_k(x) = \int_{-1}^{1} H(x,t)dt = \sqrt{1-x^2}. \tag{9}$$

Вычислив интеграл в равенстве (8), находим

$$A_k(x) = (x_k + h/2 - x)\, H\,(x, x_k + h/2) - (x_k - h/2 - x)\, H\,(x, x_k - h/2) + \\ + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\left(\arcsin\,(x_k + h/2) - \arcsin\,(x_k - h/2)\right).$$

Оценим остаток квадратурной формулы (7). Если функция $u'(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$, то остаток приближенной формулы (6) можно оценить неравенством

$$|u'(x) - \widetilde{u}'(x)| \le \omega(u', h), \quad x \in [-1,1], \tag{10}$$

где $\omega(u', h)$ — модуль непрерывности этой функции. Если же $u'(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[-1,1]$, то с помощью формулы Тейлора легко устанавливается, что

$$|u'(x) - \widetilde{u}'(x)| \le \frac{M}{2}h, \quad M = \max_{x\in[-1,1]} u''(x), \quad x \in [-1,1]. \tag{11}$$

Остаточный член квадратурной формулы (7) равен

$$E_n(x) = \int_{-1}^{1} (u'(t) - \widetilde{u}'(t))H(x,t)dt.$$

Оценивая его по модулю с учетом соотношения (4), получаем неравенство

$$|E_n(x)| \le \sqrt{1-x^2} \max_{x\in[-1,1]} |u'(x) - \widetilde{u}'(x)|, \quad x \in [-1,1]. \tag{12}$$

Из неравенств (10)–(12) вытекает

Теорема 2. *Если функция $u'(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$, то*

$$|E_n(x)| \le \sqrt{1-x^2}\, \omega(u', h), \quad x \in [-1,1].$$

Если же $u'(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$|E_n(x)| \le \sqrt{1-x^2}\, \frac{M}{2}h, \quad x \in [-1,1].$$

3. Вычислительная схема решения уравнения (2). Подставив вместо интеграла в уравнении (2) его представление квадратурной формулой (7), приходим к равенству

$$u'(x) - \lambda q(x) \sum_{k=-n}^{n} A_k(x) u'(x_k) = f(x) + \lambda q(x) E_n(x), \quad x \in [-1,1]. \tag{13}$$

Это соотношение в узлах квадратурной формулы (7) дает систему уравнений

$$u'(x_j) - \lambda q(x_j) \sum_{k=-n}^{n} A_k(x_j) u'(x_k) = f(x_j) + \lambda q(x_j) E_n(x_j), \quad j = -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Отбросив в правых частях (14) вторые слагаемые, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$u'_j - \lambda q(x_j) \sum_{k=-n}^{n} A_k(x_j) u'_k = f(x_j), \quad j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \tag{15}$$

в которой u'_k — приближенные значения для $u'(x_k)$, $k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$.

Исследуем систему уравнений (15) методами теории разностных схем ([8], с. 114).

Теорема 3. *Если выполняется условие*

$$1 - |\lambda| r > 0, \tag{16}$$

то система уравнений (15) *однозначно разрешима, устойчива и имеет место оценка*

$$\max_j |u'(x_j) - u'_j| \leq \frac{|\lambda| r}{1 - |\lambda| r} \varepsilon, \tag{17}$$

где ε *— такая положительная величина, что* $|u'(x) - \widetilde{u}'(x)| \leq \varepsilon$ *на отрезке* $[-1, 1]$*, а число* r *определено в теореме* 1.

Доказательство. Сравнивая системы уравнений (14) и (15) с учетом неравенства (12), находим, что аппроксимация интегрального уравнения (2) системой линейных алгебраических уравнений (15) определяется неравенством

$$|\lambda q(x) E_n(x)| \leq |\lambda| r \varepsilon. \tag{18}$$

Проверим устойчивость. Пусть u'_s — одна из тех компонент решения системы (15), которая по модулю не меньше каждой из остальных: $|u'_s| = \max_m |u'_m|$. Из уравнения с номером s системы (15) при условии (16) следует

$$\left| u'_s - \lambda q(x_s) \sum_{k=-n}^{n} A_k(x_s) u'_k \right| \geq |u'_s| - |\lambda| |q(x_s)| \sum_{k=-n}^{n} A_k(x_s) |u'_s|.$$

Принимая во внимание соотношение (9), получаем неравенство $(1 - |\lambda| r)|u'_s| \leq |f(x_s)|$. Тогда

$$\max_j |u'_j| = |u'_s| \leq \frac{1}{1 - |\lambda| r} |f(x_s)|. \tag{19}$$

Из последнего неравенства, в частности, при $f(x_j) = 0$ $(j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n)$ следует, что система (15) не имеет нетривиальных решений, и, следовательно, однозначно разрешима при любой правой части. Неравенство (19) также означает устойчивость этой системы. Тогда из теории линейных разностных схем ([8], с. 114) и неравенств (18), (19) следует справедливость неравенства (17). □

Отбрасывая в равенстве (13) слагаемое $\lambda q(x) E_n(x)$ и заменяя функционалы $u'(x_k)$ их приближенными значениями u'_k, получаем приближенное решение уравнения (2)

$$\widetilde{u}'(x) = f(x) + \lambda q(x) \sum_{k=-n}^{n} A_k(x) u'_k. \tag{20}$$

Исследуем погрешность приближенного решения (20). Из (13) и (20) следует

$$u'(x) - \widetilde{u}'(x) = \lambda q(x) \sum_{k=-n}^{n} A_k(x)(u'(x_k) - u'_k) + \lambda q(x) E_n(x).$$

Оценим эту разность по модулю:

$$|u'(x) - \widetilde{u}'(x)| \leq |\lambda|\,|q(x)| \sum_{k=-n}^{n} |A_k(x)|\,|u'(x_k) - u'_k| + |\lambda|\,|q(x)|\,|E_n(x)|.$$

Последнее неравенство, равенство (9), а также неравенства (12), (17) позволяют записать общую оценку равномерной погрешности приближенного решения (20)

$$|u'(x) - \widetilde{u}'(x)| \leq \frac{|\lambda|r}{1-|\lambda|r}\varepsilon \tag{21}$$

и легко доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть функции* $q(x)\sqrt{1-x^2}$ *и* $f(x)$ *непрерывны на отрезке* $[-1,1]$ *и выполняется условие* (16). *Тогда*

$$|u'(x) - \widetilde{u}'(x)| \leq \frac{|\lambda|r}{1-|\lambda|r}\omega(u', h), \quad x \in [-1,1]. \tag{22}$$

Если при этом M *— такая положительная величина, что* $|u''(x)| \leq M$ *для всех* $x \in [-1,1]$, *то*

$$|u'(x) - \widetilde{u}'(x)| \leq \frac{|\lambda|r}{2(1-|\lambda|r)}Mh, \quad x \in [-1,1]. \tag{23}$$

Доказательство. Если $q(x)\sqrt{1-x^2}$ и $f(x)$ — непрерывные на отрезке $[-1,1]$ функции, то решение $u'(x)$ интегрального уравнения (2) также будет непрерывной функцией на этом отрезке и неравенство (22) вытекает из (10) и (21).

Неравенство (23) следует из (11) и (21). □

Замечание 2. Если функции $q(x)$ и $f(x)$ дифференцируемы на отрезке $[-1,1]$, то величину M можно выразить через известные величины. Действительно, из уравнения (2) следует, что при выполнении условия (16) на отрезке $[-1,1]$

$$|u'(x)| \leq \frac{f}{1-|\lambda|r}, \quad f = \max_{x\in[-1,1]} |f'(x)|.$$

Продифференцировав уравнение (2), получим соотношение

$$u''(x) - \lambda q'(x)\int_{-1}^{1} H(x,t)u'(t)dt - \lambda q(x)\int_{-1}^{1} H(x,t)u''(t)dt = f'(x), \quad x \in [-1,1],$$

с помощью которого легко получается оценка

$$|u''(x)| \leq \frac{f'(1-|\lambda|r) + |\lambda|r'f}{(1-|\lambda|r)^2}, \quad x \in [-1,1], \tag{24}$$

где f' и r' такие, что $|f'(x)| \leq f'$, $|q'(x)|\sqrt{1-x^2} \leq r'$ для $x \in [-1,1]$. Теперь величину M в (23) можно оценить с помощью неравенства (24).

4. Приближенное решение уравнения (1). Проинтегрировав приближенное представление (20) решения интегрального уравнения (2) при условии $u(x_0) = 0$, получим приближенное решение интегро-дифференциального уравнения (1) в виде

$$\widetilde{u}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \lambda \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_{x_0}^{x} q(t)A_k(t)dt\right)u'_k. \tag{25}$$

Оценим погрешность этого приближенного решения. Интегрируя равенство (13), запишем точное представление решения уравнения (1):

$$u(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+\lambda\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)A_k(t)dt\right)u'(x_k)+\lambda\int_{x_0}^{x} q(t)E_n(t)dt. \tag{26}$$

Сравнивая равенства (25) и (26) по модулю, находим

$$|u(x)-\widetilde{u}(x)|\le|\lambda|\int_{-1}^{1}\left|q(t)\sum_{k=-n}^{n}A_k(t)\right|dt\,|u'(x_k)-u'_k|+|\lambda|\int_{-1}^{1}|q(t)|\,|E_n(t)|dt.$$

Из последнего неравенства и неравенств (12), (17) вытекает общая оценка погрешности приближенного решения (25)

$$|u(x)-\widetilde{u}(x)|\le\frac{2|\lambda|r}{1-|\lambda|r}\varepsilon,\quad x\in[-1,1]. \tag{27}$$

Неравенства (10), (11) и (27) позволяют записать оценки погрешности приближенного решения (25), аналогичные оценкам (22), (23).

Теорема 5. *Если функции* $q(x)\sqrt{1-x^2}$ *и* $f(x)$ *непрерывны на отрезке* $[-1,1]$ *и выполняется условие* (16), *то*

$$|u(x)-\widetilde{u}(x)|\le\frac{2|\lambda|r}{1-|\lambda|r}\omega(u',h),\quad x\in[-1,1].$$

Если же при этом $|u''(x)|\le M$ *для всех* $x\in[-1,1]$, *то*

$$|u(x)-\widetilde{u}(x)|\le\frac{|\lambda|r}{1-|\lambda|r}Mh,\quad x\in[-1,1].$$

Замечание 3. Интересно отметить, что порядки погрешностей приближенных решений уравнений (1) и (2) пропорциональны порядку погрешности приближения для производной плотности сингулярного интеграла Коши в уравнении (1).

5. Приведение интегро-дифференциального уравнения Прандтля к интегральному уравнению (2). Упомянутое уравнение Прандтля имеет вид ([9], с. 81)

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt=f(x),\quad -1<x<1, \tag{28}$$

где $B(x)$ и $f(x)$ — известные функции, $\Gamma(x)$ — искомая функция. Будем считать, что $B(x)$ нигде, за возможным исключением концов отрезка $[-1,1]$, в нуль не обращается. Кроме того, предполагается, что

$$\Gamma(\pm1)=0 \tag{29}$$

(здесь придерживаемся обозначений и некоторых предположений, принятых в ([9], с. 81–82).

Обозначая

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt=\varphi(x) \tag{30}$$

и применяя формулу обращения сингулярного интеграла с ядром Коши ([10], с. 444–446), получаем соотношение

$$\Gamma'(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\varphi(t)}{t-x}dt+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

где C — произвольная постоянная. Тогда

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^{x} \Gamma'(t)dt + \int_{-1}^{1} \varphi(t)H(x,t)dt + C\left(\arcsin x + \frac{\pi}{2}\right) + C_1. \tag{31}$$

Здесь $H(x,t)$ — ядро (3) интегрального уравнения (2), C_1 — произвольная постоянная. С помощью условия (29) находим $C = C_1 = 0$.

Подставив (30) и (31) в уравнение (28), получим интегральное уравнение вида (2) относительно функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x) - q(x)\int_{-1}^{1} \varphi(t)H(x,t)dt = f(x), \quad q(x) = -\frac{1}{B(x)}.$$

Таким образом, интегро-дифференциальное уравнение Прандтля и интегро-дифференциальное уравнение (1) приводятся к интегральному уравнению (2) с логарифмическим ядром специального вида.

6. Пример. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u'(x) - \frac{\sqrt{2}}{1+x^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad u(-1) = 0. \tag{32}$$

Его точное решение

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}.$$

С помощью формулы (25) находим

$$\widetilde{u}(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4} + \sqrt{2}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{-1}^{x} \frac{A_k(t)}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt\right)u'_k.$$

Как показывают расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры Mathematica 5, уже при сравнительно небольших значениях n достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения уравнения (32). Например, при n, равных 10 и 40, максимальная абсолютная погрешность составляет $8.1 \cdot 10^{-4}$ и $3.8 \cdot 10^{-5}$ соответственно.

Литература

[1] Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1994).

[2] Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1995).

[3] Мелешко И.Н. *Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения* (ВУЗ-ЮНИТИ, Минск, 1999).

[4] Пыхтеев Г.Н. *Общая и основная краевые задачи плоских струйных установившихся течений и соответствующие им нелинейные уравнения*, ПМТФ, №1, 32–44 (1966).

[5] Пыхтеев Г.Н. *Некоторые методы решения одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости*, ПМТФ, №2, 72–86 (1966).

[6] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1977).

[7] Пыхтеев Г.Н. *Точные методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру*, Aplikace mat. **10** (4), 351–373 (1965).

[8] Годунов С.К., Рябенький В.С. *Разностные схемы* (Наука, М., 1977).

[9] Каландия А.И. *Математические методы двумерной теории упругости* (Наука, М., 1973).

[10] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).

И.Н. Мелешко

профессор, кафедра высшей математики № 2,
Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, д. 65, г. Минск, 220013, Республика Беларусь,

`e-mail:` inmeleshko@tut.by

П.Г. Ласый

доцент, кафедра высшей математики № 2,
Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, д. 65, г. Минск, 220013, Республика Беларусь,

`e-mail:` pglasy@yandex.ru

I.N. Meleshko

Professor, Chair of Higher Mathematics № 2,
Belarussian National Technical University,
65 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220013 Republic of Belarus,

`e-mail:` inmeleshko@tut.by

P.G. Lasy

Associate Professor, Chair of Higher Mathematics № 2,
Belarussian National Technical University,
65 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220013 Republic of Belarus,

`e-mail:` pglasy@yandex.ru