МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2 »

А. Д. Корзников

В. В. Павлов

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методическое пособие

Минск
БНТУ
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

А. Д. Корзников
В. В. Павлов

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методическое пособие
для студентов инженерно-технических
и экономических специальностей

Минск
БНТУ
2017

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
К66

Р е ц е н з е н т ы:
канд. физ.-мат. наук, доц. *В. В. Карпук*;
канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. А. Федосик*

Корзников, А. Д.

К66 Задачи математического программирования : методическое пособие для студентов инженерно-технических и экономических специальностей / А. Д. Корзников, В. В. Павлов. – Минск : БНТУ, 2017. – 47 с.

ISBN 978-985-550-523-6.

Издание предназначено студентам экономических и технических специальностей при изучении разделов «Математическое программирование», «Прикладная математика» и «Математические методы поиска оптимальных решений», а также будет полезно преподавателям, ведущим занятия по соответствующим разделам.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-550-523-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данном пособии рассматриваются задачи линейного программирования, постоянно встречающиеся в экономической практике. Задачи линейного программирования содержат, как правило, много переменных и ограничений и не допускают решений в виде формул. Решения могут быть получены только путем итераций, работа по реализаций которых может выполняться или вручную, или, чаще всего, на ЭВМ.

В первой главе рассматривается экономико-производственная задача, для которой строится математическая модель и приведен пример ее решения симплекс-методом и двойственным симплекс-методом.

Во второй – оригинальный простой алгоритм решения транспортной задачи в сетевой постановке, позволяющий получить оптимальное распределение продукта с указанием объемов и маршрутов поставки даже в случае, когда ограничения задачи являются несовместными.

В третьей главе приведен алгоритм и рассмотрен пример решения задачи о максимальном потоке, не связанным с графическим представлением сети.

К каждой главе подобраны контрольные задания для самостоятельного решения и решения с помощью ЭВМ.

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для решения конкретной прикладной задачи строится математическая модель, а именно: определяются целевая функция (критерий оптимальности) и система ограничений, которые являются линейными функциями относительно выбранных переменных. В системе ограничений могут быть неравенства вида «$\le, \ge$» и равенства. Для решения задачи полученная математическая модель приводится к каноническому виду, к левой части ограничений вида «$\le$» добавляются неотрицательные дополнительные переменные, а к ограничениям вида «$\ge$» – неотрицательные дополнительные переменные со знаком «–» и знак неравенства заменяется на знак равенства.

Если в полученной системе уравнений есть допустимое базисное решение (*случай 1*: все базисные компоненты плана неотрицательны), то, исключив базисные переменные из целевой функции, если они в ней есть, полученную каноническую задачу решают симплекс-методом.

Если есть базисное решение, но оно не является допустимым (*случай 2*: среди базисных переменных есть отрицательные) и после исключения базисных переменных из целевой функции в z-строке симплекс-таблицы нет отрицательных чисел (за исключением z_0), то задачу можно решать двойственным симплекс-методом.

В случае отсутствия базисного решения для использования симплекс-метода необходимо воспользоваться методом искусственного базиса. Заметим, что в *случае 2* для решения задачи также можно воспользоваться методом искусственного базиса, так как допустимое базисное решение отсутствует.

П р и м е р

Продукция может изготавливаться на любом из трех видов оборудования. Трудоемкость и себестоимость производства центнера продукции на каждом оборудовании даны в таблице.

Вид оборудования	I	II	III
Трудоемкость, н-ч	10	9	12
Себестоимость, у. е.	21	19	22

Сколько нужно изготовить продукции на каждом оборудовании, чтобы ее суммарная себестоимость была минимальной при условии, что трудовые ресурсы ограничены 660 н-ч, а общее количество произведенной продукции должно быть не менее 60 ц?

Р е ш е н и е

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j, $j = \overline{1, 3}$, количество продукции, в центнерах, выпускаемой на *j*-м оборудовании. Тогда целевая функция строится по суммарной себестоимости, а ограничения по трудовым ресурсам и общему количеству произведенной продукции

$$z = 21x_1 + 19x_2 + 22x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 12x_3 \le 660, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 60, \end{cases} \quad x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 3}.$$

Данную задачу можно решать как симплекс-методом, так и двойственным симплекс-методом. Рассмотрим оба метода.

Приведем задачу к *канонической*:

$$z = 21x_1 + 19x_2 + 22x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 12x_3 + x_4 = 660, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 60, \end{cases} \quad x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 5}.$$

Для полученной системы уравнений существует базисное решение: свободные $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и базисные $x_4 = 660$, $x_5 = -60$ переменные.

Однако это решение не является допустимым ($x_5 = -60 < 0$), но если записать *z*-строку симплекс-таблицы для этой задачи, то она не содержит отрицательных элементов, т. е. имеет место *случай 2*, и задача может быть решена *двойственным симплекс-методом*.

Умножим второе ограничение на –1 и заполним первоначальную симплекс-таблицу.

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Значение правой части
x_4 x_5	10 –1	0 –1	12 –1	1 0	0 1	660 –60
–z	21	19	22	0	0	0

Построенный начальный базисный план не является оптимальным, так как есть отрицательные значения базисных переменных. Вторая строка является разрешающей. Подсчитаем

$$\min\left\{\frac{-c_1}{a_{21}}, \frac{-c_2}{a_{22}}, \frac{-c_3}{a_{23}}\right\} = \min\left\{\frac{-21}{-1}, \frac{-19}{-1}, \frac{-22}{-1}\right\} = \frac{-c_2}{a_{22}} = 19,$$

следовательно, второй столбец будет разрешающим, а элемент $a_{21} = -1$ – разрешающим элементом. Переменная x_2 вводится в базис, а x_5 – выводится.

Методом Жордана–Гаусса переходим к следующей таблице.

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Значение правой части
x_4 x_2	1 1	0 1	3 1	1 0	9 –1	120 60
–z	2	0	3	0	19	–1140

Получим оптимальный план задачи, так как все базисные переменные плана неотрицательны:

$$\overline{X^0} = (0, 60, 0), \; Z_{\min} = 1140 \text{ н-ч.}$$

Вместе с тем для решения этой задачи можно воспользоваться *методом искусственного базиса*. Для этого во второе ограничение введем искусственную переменную x_6 и решим вспомогательную задачу минимизации искусственной целевой функции

$$w = x_6 \to \min .$$

$$z = 21x_1 + 19x_2 + 22x_3 \to \min,$$

$$w = x_6 \to \min.$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 12x_3 + x_4 = 660, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 60, \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Исключаем базисную переменную x_4 из целевой функции, если она в ней есть, и искусственную базисную переменную из искусственной целевой функции. Данные шагов алгоритма будем заносить в таблицы.

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Значение правой части
x_4	10	9	12	1	0	0	660
x_6	1	1	1	0	–1	1	60
$-z$	21	19	22	0	0	0	0
$-w$	–1	–1	–1	0	1	0	–60

В w-строке есть отрицательные значения, следовательно, начальный опорный план расширенной задачи не оптимален.

В качестве разрешающего столбца выберем второй и подсчитаем

$$\min\left\{\frac{660}{9}, \frac{60}{1}\right\} = 60 .$$

Значит, разрешающей строкой будет вторая, а разрешающим элементом $a_{22} = 1$. Методом Жордана–Гаусса переходим к следующей таблице.

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Значение правой части
x_4	1	0	3	1	9	120
x_2	1	1	1	0	–1	–60
$-z$	–2	0	3	0	19	–1140

Так как искусственная переменная x_6 ушла из базиса $w = 0$, то первый этап решения расширенной задачи симплекс-методом завершен. Мало того, мы получили оптимальный план задачи $\overline{X^0} = (0,\ 60,\ 0)$, трудовые ресурсы остались неизрасходованными в количестве 120 н-ч, $Z_{\min} = 1140$.

Задания для самостоятельного решения

1. В мастерской при изготовлении столов, шкафов и тумбочек применяются два вида древесины. На один стол расходуется 0,15 м^3 древесины I вида и 0,2 – II и т. д. (таблица).

Наименование	Столы	Шкафы	Тумбочки	Наличие древесины, м^3
Вид и количество древесины, м^3	I – 0,15 II – 0,2	I – 0,2 II – 0,1	I – 0,05 II – 0	I – 60 II – 40
Прибыль	12	15	3	

Количество выпущенных шкафов должно быть не менее 200. Выпуск столов и тумбочек не запланирован. Прибыль мастерской от производства одного стола составляет 12 у. е., шкафа – 15 у. е., тумбочки – 3 у. е. Сколько столов, шкафов и тумбочек должна изготовить мастерская, чтобы получить наибольшую прибыль?

2. Строительная организация планирует сооружение домов типа Д-1, Д-2, Д-3 с одно-, двух- и трехкомнатными квартирами. Данные о количестве квартир каждого типа в каждом из указанных типов домов и плановая себестоимость каждого дома, у. е., приведены в таблице.

Типы квартир	Тип дома			Годовой план ввода жилой площади
	Д-1	Д-2	Д-3	
1-комнатная	10	20	15	700
2-комнатная	50	60	30	2000
3-комнатная	35	10	5	600
Плановая себестоимость, тыс. у. е.	700	400	300	

Требуется составить годовой план строительства домов так, чтобы выполнить план с наименьшей себестоимостью.

3. На станках типа A и типа B изготавливают изделия трех видов. Для изготовления одного изделия одного вида используются в течение рабочего дня два станка типа A и два станка типа B и т. д. (таблица).

1-е изделие	1-й вид	2-й вид	3-й вид	Всего станков в цехе
Типы станков: A B	2 2	4 2	2 1	20 16
Прибыль от выпуска одного изделия	1 у. е.	2 у. е.	4 у. е.	

Количество выпущенных за рабочий день изделий 1-го и 2-го вида в сумме должно быть не менее четырех (выпуск наиболее выгодных изделий 3-го вида не запланирован).

Сколько нужно ежедневно выпускать изделий каждого вида, чтобы получить максимальную прибыль?

4. С помощью двух технологических способов можно выпускать два вида продукции при затратах двух видов ресурсов. Количество продуктов, выпускаемых при использовании каждого технологического способа в течение всего периода, а также количество затрачиваемых при этом ресурсов заданы в таблице.

Технологические способы	Продукты		Ресурсы	
	I	II	I	II
1	2	4	8	10
2	4	5	11	12

Продукцию нужно выпускать комплектами, причем в каждый комплект входит 5 ед. продукции I вида и 7 ед. II вида. Лимит ресурсов за плановый период составляет 150 ед. ресурсов I вида и 200 ед. II вида. Найти продолжительность использования технологических способов так, чтобы получить наибольшее количество комплектов продукции.

5. С помощью трех технологических способов выпускаются три вида продукции. При использовании I технологического способа в течение всего рассматриваемого периода выпускается одновременно 3 ед. продукции первого вида, 4 ед. – второго, 5 ед. – третьего вида, а затраты труда при этом составляют 20 человеко-

дней. Аналогичные данные для II и III технологических способов указаны в соответствующих строчках таблицы.

Технологические способы	Продукция			Затраты труда
	1-го вида	2-го вида	3-го вида	
I	3	4	5	20
II	2	3	1	12
III	1	6	3	8
Плановый выпуск продукции	15 ед.	20 ед.	18 ед.	

Найти продолжительность использования технологических способов так, чтобы выполнить или перевыполнить план при наименьших затратах труда.

6. Для изготовления Cr-Ni стали можно использовать два вида железной руды.

1 т руды	Содержание в сплаве		
	Fe	Cr	Ni
1-го вида	2 ед.	1 ед.	2 ед.
2-го вида	4 ед.	4,5 ед.	3 ед.

В сплаве должно содержаться не менее 20 ед. Fe, 15 ед. Cr и 10 ед. Ni.

Сколько руды каждого вида надо взять для изготовления наиболее дешевого сплава, удовлетворяющего указанным условиям, если 1 т руды 1-го вида стоит 4 у. е., а 1 т руды 2-го вида – 10 у. е.

7. Продукция X может изготовляться на любом из трех видов оборудования: A, B и C. Производительность оборудования и себестоимость производства продукции на каждом из видов оборудования представлены в таблице.

Характеристики	Вид оборудования		
	A	B	C
Производительность, т/ч	2	5	4
Себестоимость, у. е./т	9	8	11

Сколько продукции X должно быть произведено на каждом из видов оборудования, чтобы суммарная себестоимость продукции была минимальной, общее количество готовой продукции было не менее 700 т, а заказ был выполнен за время, не большее 400 ч?

8. Цех выпускает мебель трех видов. Нормы расхода материалов и рабочего времени на единицу продукции, себестоимость и оптовые цены даны в таблице.

Нормы расхода на единицу продукции	Тип мебели		
	1	2	3
Материалы, $м^3$	0,032	0,031	0,038
Трудоемкость, н-ч	10,2	7,5	5,8
Оптовая цена, у. е.	93	67	30
Себестоимость, у. е.	88	64	29,5
Плановый ассортимент, шт.	350	290	800

Запас материалов равен 90 $м^3$, фонд рабочего времени – 17 000 н-ч. Найти план производства, при котором суммарный доход максимален.

9. Сухогруз может принять на борт груз из пяти наименований суммарным весом не более 1 000 т и суммарным объемов не более 500 $м^3$. Пренебрегая целочисленностью, загрузить судно грузом минимального веса суммарной стоимостью не менее 16 000 у. е.

Характеристики	Наименование груза				
	1	2	3	4	5
Вес, т	50	100	70	90	60
Объем, $м^3$	45	30	25	45	40
Стоимость, тыс. у. е.	1,5	2	1,3	1,8	1,5

10. Цех выпускает мебель трёх типов. Норма расхода материалов и рабочего времени на единицу продукции, себестоимость и оптовые цены приведены в таблице.

Нормы расхода на единицу продукции	Тип мебели		
	1	2	3
Материалы, $м^3$	0,032	0,031	0,038
Трудоемкость, н-ч	10,2	7,5	5,8
Себестоимость, у. е.	88	64	28
Оптовая цена, у. е.	93	67	31
План по ассортименту, не менее, шт.	200	200	600

Запас материала равен 90 м^3, фонд рабочего времени – 17 000 н-ч, план по реализации – 76 000 у. е. Найти план, минимизирующий себестоимость.

11. Предприятие может выпускать три вида продукции: *A*, *B* и *C*. Цена, затраты на хранение, а также трудовые затраты на производство 1 т продукции каждого вида указаны в таблице.

Производство одной тонны продукции	Вид продукции		
	A	*B*	*C*
Цена, тыс. у. е.	4	3	2
Трудовые затраты, сотни н-ч	5	4	3
Затраты на хранение, дес. у. е.	6	3	2

Найти план выпуска продукции суммарной стоимостью не меньше 70 000 у. е. при суммарных трудовых затратах, не превосходящих 10 тыс. н-ч, минимизирующий суммарные затраты на хранение готовой продукции.

12. Прутки длиной 300 см следует разрезать на заготовки трех типов: *A, B* и *C*, длины которых равны 12, 9 и 17 см. По технологическим причинам возможно использование лишь трех способов раскроя прутков. Выход заготовок всех типов для этих способов раскроя указан в таблице.

Способы раскроя прутков	Типы заготовок		
	A	*B*	*C*
I	13	8	4
II	5	7	10
III	8	15	4

Имеется 20 прутков, из которых нужно изготовить 166 заготовок типа *A*, 194 – типа *B*, 128 – типа *C*. Составить план раскроя, при котором суммарная длина отходов минимальна.

13. Предприятие может выпускать продукцию трех видов: *A*, *B* и *C*. Затраты материала, цена продукции и прибыль на 1 т продукции каждого вида указаны в таблице.

Затраты на 1 т продукции	Вид продукции		
	A	*B*	*C*
Затраты материала	4	5	10
Цена изделия, тыс. у. е.	7	9	15
Прибыль от изделия, тыс. у. е.	2	2	4

Найти план выпуска изделий, максимизирующий суммарную прибыль, при суммарных затратах на материал, не превосходящих 115 тыс. у. е., и суммарной стоимости выпускаемых изделий не меньше 205 тыс. у. е.

14. В цехе могут изготовляться изделия I, II и III видов. Для изготовления каждого изделия используются последовательно оба вида оборудования *A* и *B*, имеющихся в цехе. Оборудование *A* может быть использовано в течение 270 ч, оборудование *B* – в течение 350 ч. Затраты времени, ч, на обработку каждого изделия на каждом из видов оборудования указаны в таблице.

Вид оборудования	Вид изделия		
	I	II	III
A	7	3	8
B	9	4	5

Найти план выпуска изделий, минимизирующий суммарное время недогрузки обоих видов оборудования.

15. Редакционно-издательский отдел (РИО) в данном месяце имеет лимит на бумагу 750 кг. Подготовлены к изданию учебные пособия наименований *A, B* и *C,* требующие расхода бумаги соответственно 50, 60 и 90 кг на 100 экземпляров. Трудоемкость изготовления 100 экземпляров этих пособий соответственно 80, 60 и 90 н-ч. Месячный трудовой ресурс РИО равен 940 н-ч. Цена одного экземпляра учебного пособия *A* равна 0,9 у. е., *B* – 1 у. е., *C* – 2 у. е.

Найти месячный план выпуска литературы, максимизирующий ее суммарную стоимость при условии полного использования трудового ресурса РИО.

2. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Транспортная задача является математической моделью широкого круга задач, которые чаще других встречаются в практических приложениях линейного программирования. Ее классическая формулировка состоит в следующем.

Имеется m источников однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов и n пунктов его потребления (или стоков). Заданы объемы продукта a_i у каждого источника (или его мощность) и размеры спроса b_i (мощность) каждого стока. Известны также затраты c_{ij}, связанные с перемещением единицы продукта из источника i в сток j. Кроме того, объем перемещаемого продукта из источника i в сток j не может превышать величины d_{ij} (пропускной способности коммуникации). Требуется составить план перемещения продукта из источников в стоки, наиболее экономным путем обеспечивающий максимальное удовлетворение спроса всех стоков (пунктов потребления), т. е. указать объемы x_{ij}, $0 \le x_{ij} \le d_{ij}$, перемещаемого продукта из каждого источника i в каждый сток j, при которых общие затраты, связанные с этим перемещением, будут минимальными.

Таким образом, исходными данными для транспортной задачи являются:

векторы $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – мощности источников и стоков соответственно;

матрица затрат $C = \left\| c_{ij} \right\|_{m \times n}$;

матрица пропускных способностей коммуникаций $D = \left\| d_{ij} \right\|_{m \times n}$.

Построим математическую модель сформулированной задачи. План перемещения продукта обозначим через $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m \times n}$. Тогда суммарные затраты , связанные с этим перемещением из всех источников во все стоки, выражаются суммой

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} . \qquad (2.1)$$

Если суммарная мощность источников $\sum_{i=1}^{m} a_i$ равна суммарной мощности стоков $\sum_{j=1}^{n} b_j$, то транспортная задача называется *замкнутой*. Тогда условия полного удовлетворения спроса (мощности) каждого стока имеют вид

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.2)$$

Весь продукт из каждого источника должен быть перемещен в стоки. Формально это означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{2.3}$$

Кроме того, объемы переносимого продукта – неотрицательные числа, которые не могут превышать пропускных способностей соответствующих коммуникаций, т. е. должны выполняться условия

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.4}$$

Таким образом, формально транспортная задача сводится к минимизации целевой функции (2.1), при условии, что переменные удовлетворяют ограничениям (2.2)–(2.4).

Очевидно, что для любой матрицы $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m\times n}$, удовлетворяющей условиям (2.2)–(2.4), имеют место неравенства

$$x_{ij} \le \min\left(a_i,\ b_j\right),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Поэтому если

$$d_{ij} \ge \min\left(a_i,\ b_j\right)$$

для всех $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то мы имеем классическую транспортную модель. Условимся, что если $d_{ij} \ge \min\left(a_i,\ b_j\right)$, то будем считать пропускную способность этой коммуникации равной любому числу, большему чем $\min\left(a_i,\ b_j\right)$.

Следует отметить, что во многих прикладных задачах суммарная мощность источников может превосходить суммарную мощность стоков:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0 \text{ и наоборот } a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i > 0\,.$$

Такая задача называется *открытой транспортной моделью.* Открытую модель можно свести к замкнутой.

В первом случае вводится фиктивный сток $n+1$ с мощностью b_{n+1}. Размеры остатка продукта $x_{i,n+1}$ у каждого источника i можно регулировать в зависимости от введенного штрафа за единицу оставшегося у i-го источника продукта. Часто полагают $c_{i,n+1}=0$, $i=1, 2, \ldots, m$. Пропускные способности $d_{i,n+1}$ коммуникаций, ведущих в фиктивный сток, не ограничены, т. е. равны любому числу, большему чем $\min\left(a_i, b_{n+1}\right)$, $i=1, 2, \ldots, m$.

Во втором случае вводится фиктивный источник $m+1$ с мощностью a_{m+1}. Размер неудовлетворенной мощности $x_{m+1, j}$ j-го стока может регулироваться величиной ущерба $c_{m+1, j}$. Если ущерб для всех стоков одинаков, то полагают $c_{m+1, j}=0$, $j=1, 2, \ldots, n$. Пропускные способности $d_{m+1, j}$, $j=1, 2, \ldots, n$, не ограничены, т. е. равны любому числу, большему чем величина $\min\left(a_{m+1}, b_j\right)$, $j=1, 2, \ldots, n$, соответственно.

В силу вышесказанного в дальнейшем будем рассматривать замкнутую транспортную модель, т. е. полагая, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2.5}$$

В случае когда ограничения на пропускные способности отсутствуют ($d_{ij} \geq \min\left(a_i, b_j\right)$ для любых $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$), задача решается *методом потенциалов*. В противном случае можно использовать его модификацию, однако она неудобна для программной реализации, и даже на стадии построения первоначального опорного плана требуется использование метода искусственного базиса. Поэтому для ее решения целесообразным является использование двойственного метода, основанного на сетевой постановке задачи.

Вначале рассмотрим транспортную задачу без ограничений на пропускные способности коммуникаций (классическую транспортную задачу) с вектором мощностей источников $a=(6,\ 3,\ 3)$, стоков $b=(4,\ 2,\ 4,\ 2)$ и матрицей

$$C=\begin{bmatrix}1&4&2&5\\2&1&4&1\\3&2&1&3\end{bmatrix}.$$

Процесс решения начинается с предварительного этапа – построения первоначального опорного плана методом «северо-западного угла» или методом минимального элемента, который использован в данном примере.

$$\overline{X}=\begin{bmatrix}4^{(1)}&0&1^{(5)}&1^{(6)}\\0&2^{(2)}&0&1^{(4)}\\0&0&3^{(3)}&0\end{bmatrix}\begin{array}{cccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)&(6)\\6&2&2&2&2&1\\3&3&1&1&&\\3&3&3&&&\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}4&2&4&2&\\&2&4&2&(1)\\&&4&2&(2)\\&&1&2&(3)\\&&1&1&(4)\\&&&1&(5)\\&&&&(6)\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}C=\begin{bmatrix}1&4&2&5\\2&1&4&1\\3&2&1&3\end{bmatrix}&\begin{array}{c}\\(4)\\(3)\end{array}\\\begin{array}{cccc}(1)&(2)&(5)&(6)\end{array}&\end{array}.$$

Цифры, стоящие в скобках около строк и столбцов матрицы C, обозначают номер шага, на котором соответствующие строки и столбцы вычеркиваются. Цифры в скобках над элементами матрицы X обозначают номер шага, на котором определяются ее соответствующие элементы, а над столбцами вектора $\bar{a}$ и около строк вектора $\bar{b}$ – номера шагов, на которых они принимают указанные значения. Поскольку после 6-го шага в первой строке нет ни одного невычеркнутого элемента, она может быть вычеркнута (правило вычеркивания). То есть положительные компоненты матрицы X не образуют цикл, их число равно 6 ($m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$). Таким образом, в результате предварительного этапа получен исходный опорный план транспортной задачи, множество базисных компонент

$$B(X) = \{(1,1),\ (1,3),\ (1,4), (2,2), (2,4), (3,3)\},$$

$O(X)$ – все остальные компоненты плана X.

Итерация 1. Определяем потенциалы, отвечающие исходному опорному плану путем решения системы уравнений

$$u_1 + \upsilon_1 = 1;\ u_2 + \upsilon_2 = 1;$$
$$u_1 + \upsilon_3 = 2; u_2 + \upsilon_4 = 1; u_1 + \upsilon_4 = 5; u_3 + \upsilon_3 = 1.$$

Полагая $u_1 = 0$, последовательно вычисляем $\upsilon_1 = 1$, $\upsilon_3 = 2$, $\upsilon_4 = 5$, $u_2 = 1 - 5 = -4$, $\upsilon_2 = 1 - (-4) = 5$, $u_3 = 1 - 2 = -1$.

Вычисляем величины Δ_{ij}, $(i, j) \in O(X)$:

$$\Delta_{12} = 4 - 0 - 5 = -1;\ \Delta_{21} = 2 - (-4) - 1 = 5;\ \Delta_{23} = 4 - (-4) - 2 = 6;$$

$$\Delta_{31} = 3 - (-1) - 1 = 3;\ \Delta_{32} = 2 - (-1) - 5 = -2;\ \Delta_{34} = 3 - (-1) - 5 = -1.$$

План не является оптимальным, так как Δ_{12}, Δ_{32}, $\Delta_{34} < 0$,

$$\min(\Delta_{12}, \Delta_{32}, \Delta_{34}) = \Delta_{32} = -2.$$

Улучшение плана осуществляется за счет увеличения компоненты x_{32}, добавление ее к базисным компонентам порождает единственный цикл x_{32}, x_{22}, x_{24}, x_{14}, x_{13}, x_{33}. Определяем

$$\delta_1 = \min(x_{22}, x_{14}, x_{33}) = 1.$$

Увеличиваем нечетные компоненты цикла (помеченные знаком «+») и уменьшаем четные (помеченные знаком «–») на величину $\delta_1 = 1$ и получаем новый опорный план (пустые клетки соответствуют нулевым компонентам плана).

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1^{(+)} & 1^{(-)} \\ 0 & 2^{(-)} & 0 & 1^{(+)} \\ 0 & 0^{(+)} & 3^{(-)} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X =$$

Итерация 2. Множество базисных компонент

$$B(X) = \{(1,1),\ (1,3),\ (2,2), (2,4), (3,2), (3,3)\},$$

$O(X)$ – все остальные компоненты плана.

Определяем потенциалы для полученного опорного плана:

$$u_1 + \upsilon_1 = 1;\ u_1 + \upsilon_3 = 2;\ u_2 + \upsilon_2 = 1;\ u_2 + \upsilon_4 = 1;$$
$$u_3 + \upsilon_2 = 2;\ u_3 + \upsilon_3 = 1.$$

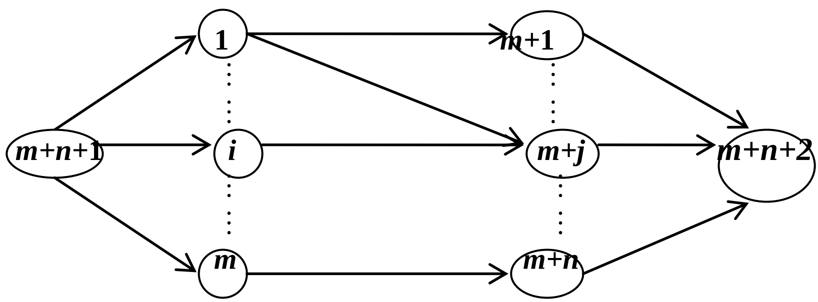
Полагая $u_1 = 0$, последовательно вычисляем $\upsilon_1 = 1, \upsilon_3 = 2$, $\upsilon_3 = -1$, $\upsilon_2 = 3$, $u_2 = -2$, $\upsilon_4 = 3$. Вычисляем величины Δ_{ij}, $(i, j) \in O(X)$:

$$\Delta_{12} = 4-0-3=1; \quad \Delta_{14} = 5-3-0=2; \quad \Delta_{21} = 2-(-2)-1=3;$$
$$\Delta_{23} = 4-(-2)-2=4; \quad \Delta_{31} = 3-(-1)-1=3; \quad \Delta_{34} = 3-(-1)-3=1.$$

Поскольку все величины неотрицательны, то план является решением нашей задачи.

Рассмотрим теперь общую транспортную задачу с ограниченными пропускными способностями в сетевой постановке.

На плоскости отмечаются (кружками) источники (с номерами 1, 2, …, m) и стоки (с номерами $m+1$, $m+2$, $m+n$), а также отмечаются фиктивный источник и сток с номерами $n+m+1$ и $n+m+2$ соответственно (рисунок).



Если принять пропускную способность коммуникации $m+n+1, i$, равной a_i, коммуникации $m+j$, $m+n+2$, равной b_j, а стоимости переноса по ним единицы продукта, равными 0, то задача может быть сформулирована следующим образом: построить максимальный поток продукта из фиктивного источника $m+n+1$ в фиктивный сток $m+n+2$, стоимость которого минимальна. Понятно, что величина потока $x_{kl} > 0$ по любой коммуникации k, l не может превышать ее пропускной способности d_{kl}. Суммарный объем продукта, перемещаемого из каждого источника i, равен величине продукта, перемещаемого в i из фиктивного источника $m+n+1$, а суммарный объем продукта, перемещаемого в каждый сток *j*, равен величине продукта, перемещаемого из *j* в фиктивный сток $m+n+2$.

Введем в рассмотрение векторы модифицированных мощностей

$$\overline{a}^*=\left(a_1^*,...,a_{n+m}^*\right)=\left(a_1,...,a_m,\ b_1,...,b_n\right),$$

$$\overline{b}^*=\left(b_1^*,...,b_{n+m}^*\right)=\left(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n\right),$$

матрицы модифицированных стоимостей $C^*=\left\|c_{ij}^*\right\|$ и пропускных способностей $D^*=\left\|d_{ij}^*\right\|$ порядка $(m+n+1)\times(m+n+2)$, определенных следующим образом:

$$c_{ij}^*=\begin{cases}0, & i=m+n+1, \quad j=\overline{1,m},\\ 0, & i=\overline{m+1,m+n}, \ j=m+n+2,\\ c_{ij}, & i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{m+1,m+n},\\ \infty - \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

$$d_{ij}^*=\begin{cases}a_j, & i=m+n+1, \quad j=\overline{1,m},\\ b_i, & i=\overline{m+1,m+n}, \ j=m+n+2,\\ d_{ij}, & i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{m+1,m+n},\\ 0 - \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Опишем алгоритм решения транспортной задачи. Не уменьшая общности, предположим, что $d_{ij}=\min\left(a_i,b_j\right)$, если $d_{ij}>\min\left(a_i,b_j\right)$ для всех $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Общая итерация. Осуществляем тернарные операции над элементами матрицы модифицированных стоимостей $\overline{C}^* = C^* = \left\| c_{ij}^* \right\|$, последовательно по всем $k = 1, 2, \ldots, n + m + 2$; полагая

$$\bar{c}_{ij}^* := \begin{cases} \bar{c}_{ij}^*, & \text{если} \quad \bar{c}_{ij}^* \le \bar{c}_{ik}^* + \bar{c}_{kj}^*, \\ \bar{c}_{ik}^* + \bar{c}_{kj}^*, & \text{если} \quad \bar{c}_{ij}^* > \bar{c}_{ik}^* + \bar{c}_{kj}^*, \end{cases} \tag{2.5}$$

для всех $i \ne j \ne k, \quad i = \overline{1, n + m + 2}, \quad j = \overline{1, n + m + 2}.$

Одновременно с выполнением операций (2.5) изменяем элементы вспомогательной матрицы $R^* = \left\| r_{ij}^* \right\|$ порядка $(m + n + 2) \times$ $\times (m + n + 2)$ (первоначально полагаем $r_{ij}^* = j,\ i, \quad j = \overline{1, n + m + 2}$):

$$r_{ij}^* := \begin{cases} r_{ij}^*, & \text{если} \quad \bar{c}_{ij}^* \le \bar{c}_{ik}^* + \bar{c}_{kj}^*, \\ r_{ik}^*, & \text{если} \quad \bar{c}_{ij}^* > \bar{c}_{ik}^* + \bar{c}_{kj}^*. \end{cases}$$

Если $\bar{c}_{m+n+1,\ m+n+2}^* = \infty$ – задача решена. В противном случае с помощью вспомогательной матрицы R^* определяем множество индексов

$$l = m + n + 1, \quad i_1,\ i_2, \ldots,\ l_k, \quad m + n + 2 = p,$$

где

$$i_1 = r_{m+n+1,\ m+n+2}, \quad i_2 = r_{i_1,\ m+n+2}, \quad i_3 = r_{i_2,\ m+n+2} \ldots, \ p = r_{l_k p},$$

и множество

$$L = \{(l, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_k, p)\}.$$

Находим $\delta = \min\limits_{(i,j)\in L}\left(a_i, d_{ij}, b_j\right)$ и вычисляем:

$$x_{ij}^* := \begin{cases} x_{ij}^* + \delta, & (i,j)\in L, \\ x_{ij}^* - \delta, & (j,i)\in L, \\ x_{ij}^* - \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$d_{ij}^* := \begin{cases} d_{ij}^* - \delta, & (i,j)\in L, \\ x_{ij}^* + \delta, & (j,i)\in L, \\ d_{ij}^* - \text{в остальных} \quad \text{случаях}; \end{cases}$$

$$a_l^* := a_l^* - \delta,\ b_p^* := b_p^* - \delta, \quad a_p^* := a_p^* + \delta, \quad b_l^* : = b_l^* + \delta_j;$$

$$c_{ij}^* = \begin{cases} \infty, & j = \overline{1, n+m}, \quad \text{если} \quad a_i^* = 0, \\ \infty, & i = \overline{1, n+m}, \quad \text{если} \quad b_j^* = 0, \\ c_{ij}^* - \text{в остальных} \quad \text{случаях}. \end{cases}$$

Переходим к общей итерации.

После окончания работы алгоритма находим матрицу $X = \left\| x_{ij} \right\|_{m\times n}$, где $x_{ij} = x_{i,m+j}^*$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, которая является решением задачи. Если одно из ограничений не выполнено, то это означает, что исходная задача не имеет допустимых решений. Тем не менее полученный план является оптимальным планом перемещения максимально возможного количества продукта из источников в стоки при данных ограничениях.

Проиллюстрируем работу алгоритма на рассмотренном выше примере: $\overline{a} = (6, 3, 3)$, $\overline{b} = (4, 2, 4, 2)$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формируем матрицы модифицированных стоимостей и пропускных способностей:

$$C = \begin{bmatrix} - & - & - & 1 & 4 & 2 & 5 & - & - \\ - & - & - & 2 & 1 & 4 & 1 & - & - \\ - & - & - & 3 & 2 & 1 & 3 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прочерки вместо элементов матрицы означают сколь угодно большое число (∞).

После осуществления общей итерации получим

$$\overline{C^*} = \begin{bmatrix} - & - & - & - & 4 & 2 & 5 & 0 & - \\ - & - & - & 2 & 1 & 4 & 1 & - & - \\ - & - & - & 3 & 2 & 1 & 3 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix},$$

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Так как $C^*_{89} = 1$, с помощью матрицы R^2 находим $r^*_{89} = 1,\ r^*_{19} = 4,\ r^*_{49} = 9,\quad L = \{(8,\ 1), (1, 4),\ (4,\ 9)\}$ и изменяем матрицы $X^*,\ C^*,\ D^*$:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C^*} = \begin{bmatrix} - & - & - & - & 4 & 2 & 5 & 0 & - \\ - & - & - & 2 & 1 & 4 & 1 & - & - \\ - & - & - & 3 & 2 & 1 & 3 & - & - \\ -1 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & - & - \end{bmatrix},$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

После осуществления над этими матрицами еще семи операций получаем матрицы $\overline{C^*}$, R^*:

$$\overline{C^*} = \begin{bmatrix} - & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 5 & 0 & 7 \\ -1 & - & -1 & 2 & 3 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & - & 3 & 4 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ -3 & -1 & -3 & - & 1 & 3 & 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & - & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & - & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 2 & 3 & - & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 5 & - & 7 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & - \end{bmatrix},$$

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 8 & 7 & 7 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 5 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 6 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Так как $C^*{}_{89} = 7$, с помощью матрицы R^* определяем множество индексов

$$r^*{}_{89} = 1,\ r_{19} = 5,\ r_{59} = 2,\ r_{29} = 6,\ r_{69} = 9,$$

т. е.

$$L = \{(8,1),\ (1,5),\ (5,2), (2,6), (6,9)\}.$$

Находим $\delta = 1$ и вычисляем

$$x^*_{81} = 6, \quad x^*_{15} = 1,$$
$$x_{51} = -1, \quad x_{52} = 1,$$
$$x_{25} = 0, \qquad x_{26} = 1,$$
$$x_{62} = -1, \quad x_{69} = 2.$$

Новые матрицы X^*, C^*, D^*:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^* = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & 5 & 0 & - \\ - & - & - & 2 & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & 3 & - & - & 3 & 0 & - \\ -1 & - & -3 & - & - & - & - & - & - \\ -4 & - & -2 & - & - & - & - & - & - \\ -2 & -4 & -1 & - & - & - & - & - & - \\ - & -1 & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix},$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

После осуществления тернарных операций над матрицей $\overline{C^*}$ получим $C^*_{89} = \infty$, т. е. задача решена, оптимальное решение

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

при значении целевой функции $z_{\min} = 23$.

Задачи для самостоятельного решения

Варианты

1. $\bar{a} = (35, 25, 45)$, $\bar{b} = (30,\ 25, 10, 20)$.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 8 & 2 \\ 7 & 11 & 8 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 10 \\ 10 & 5 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 20 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $X = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 0 & 4 \\ 10 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$, $z = 490$.

2. $\overline{a}=(70, 20, 50)$, $\overline{b}=(40, 30, 30, 25)$.

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 11 & 5 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 10 & 20 & 20 & 25 \\ 20 & 10 & 10 & 15 \\ 15 & 5 & 5 & 30 \end{bmatrix}.$$

Ответ. Задача не имеет решения. Максимальный объем перемещаемого продукта 120 ед., план $X=\begin{bmatrix} 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 5 & 5 & 0 \\ 15 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, $z=695$.

3. $\overline{a}=(35, 30, 40)$, $\overline{b}=(30, 45, 15, 30)$.

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 20 & 10 \\ 15 & 10 & 20 & 5 \\ 15 & 35 & 10 & 20 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 15 & 10 \\ 15 & 10 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & 0 & 15 \end{bmatrix}$, $z=620$.

4. $\overline{a}=(20, 50, 35)$, $\overline{b}=(30, 10, 40, 10)$.

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 10 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 15 & 5 \\ 15 & 20 & 5 & 15 \\ 15 & 15 & 25 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 & 0 \\ 10 & 10 & 5 & 10 \\ 15 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$, $z=435$.

5. $\overline{a}=(40, 25, 35)$, $\overline{b}=(20, 25, 40, 20)$.

$$C=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & 5 \\ 8 & 12 & 10 & 7 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 10 & 5 & 20 & 10 \\ 10 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & 15 & 15 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 10 \\ 5 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 5 \end{bmatrix}$, $z=730$.

6. $\overline{a}=(30, 70, 40)$, $\overline{b}=(35, 10, 55, 45)$.

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 & 5 \\ 20 & 30 & 10 & 15 \\ 10 & 20 & 35 & 30 \end{bmatrix}.$$

Ответ. Задача не имеет решения. Максимальный объем перемещаемого продукта 125 ед., план $X=\begin{bmatrix} 10 & 0 & 15 & 5 \\ 20 & 10 & 10 & 15 \\ 5 & 0 & 30 & 5 \end{bmatrix}$, $z=675$.

7. $\overline{a}=(30, 65, 25)$, $\overline{b}=(30, 10, 15, 45)$.

$$C=\begin{bmatrix} 6 & 11 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 11 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 10 & 10 & 5 & 10 \\ 20 & 30 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 & 30 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 & 10 \\ 20 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$, $z=690$.

8. $\overline{a}=\left(25,45,30\right)$, $\overline{b}=\left(20,\ 40,10,\ 25\right)$.

$$C=\begin{bmatrix}4 & 5 & 9 & 3\\ 5 & 2 & 5 & 6\\ 8 & 9 & 5 & 4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}10 & 10 & 15 & 10\\ 10 & 10 & 20 & 10\\ 20 & 25 & 15 & 10\end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix}10 & 10 & 0 & 5\\ 10 & 10 & 10 & 10\\ 0 & 20 & 0 & 10\end{bmatrix}$, $z=505$.

9. $\overline{a}=\left(60,80,10\right)$, $\overline{b}=\left(30,\ 55,15,\ 30\right)$.

$$C=\begin{bmatrix}8 & 8 & 9 & 5\\ 7 & 2 & 3 & 8\\ 5 & 8 & 6 & 7\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}10 & 10 & 30 & 20\\ 25 & 15 & 20 & 20\\ 10 & 30 & 20 & 10\end{bmatrix}.$$

Ответ. Задача не имеет решения. Максимальный объем перемещаемого продукта 110 ед., план $X=\begin{bmatrix}5 & 10 & 0 & 20\\ 25 & 15 & 15 & 10\\ 0 & 10 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $z=630$.

10. $\overline{a}=\left(45,25,60\right)$, $\overline{b}=\left(20,\ 20,35,\ 25\right)$.

$$C=\begin{bmatrix}5 & 9 & 4 & 8\\ 9 & 2 & 7 & 5\\ 5 & 7 & 6 & 4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}15 & 10 & 20 & 10\\ 20 & 10 & 10 & 5\\ 25 & 10 & 10 & 15\end{bmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{bmatrix}15 & 0 & 20 & 5\\ 0 & 10 & 5 & 5\\ 5 & 10 & 10 & 15\end{bmatrix}$, $z=445$.

3. ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ В СЕТИ

Тернарной операцией над матрицей $\left\|d_{ij}\right\|_{n\times n}$ по индексу k называется операция $d_{ij} = \max(d_{ij}, \min(d_{ik}, d_{kj}))$ для всех $i \neq j \neq k$.

Рассмотрим вспомогательную матрицу $R = \left\|r_{ij}\right\|_{n\times n}$, элементы которой $r_{ij} = j, i = \overline{1,n}$. Одновременно с выполнением тернарной операции элементы матрицы R изменяются по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, \text{ если } d_{ij} \geq \min(d_{ik}, d_{kj}), \\ r_{ik}, \text{ если } d_{ij} < \min(d_{ik}, d_{kj}). \end{cases}$$

Эти операции являются основой метода построения максимального потока в многополюсной сети. Опишем **алгоритм решения задачи**.

Подготовительный этап. Для начальной потоковой матрицы $X = \left\|x_{ij}\right\|_{n\times n}$ (как правило, на начало работы алгоритма $x_{ij} = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$) формируем модифицированную матрицу пропускных способностей $D^* = \left\|d_{ij}{}^*\right\|_{n\times n}$, полагая

$$d_{ij}{}^* = d_{ij} - x_{ij}, \qquad i, j = \overline{1,n};$$

l, p – индексы источника и стока соответственно.

Общая итерация. Осуществляем тернарные операции над матрицей $D^* = \left\|d_{ij}{}^*\right\|_{n\times n}$ и $R = \left\|r_{ij}\right\|_{n\times n}$ последовательно по всем индексам k = 1, 2, …, n. Если в полученной в результате матрице $D^* = \left\|d_{ij}{}^*\right\|_{n\times n}$ $d_{ep}{}^* = 0$, алгоритм заканчивает работу. В противном случае переходим к шагу 1.

Шаг 1. $d_{ep}^{*} = d_{lp} > 0$. С помощью вспомогательной матрицы $R = \left\| r_{ij} \right\|_{n \times n}$ находим путь

$$L_{lp} = \left\{ (l, i_1), (i_1, i_2), ..., (i_k, p) \right\},$$

вдоль которого можно увеличить поток на максимально возможную величину δ_{lp}. Здесь $i_{1`} = r_{lp}$, $i_{2`} = r_{i_1 p}$, $i_{3`} = r_{i_2 p}$, ..., $r_{i_k p} = p$. Далее полагаем

$$x_{ij} := \begin{cases} x_{ij} + \delta_{lp}, \; x_{ij} - \delta_{lp}, \; (i, \; j) \in L_{lp}, \\ x_{ij} - \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$d_{ij} := \begin{cases} d_{ij} - \delta_{lp}, \; d_{ij} + \delta_{lp}, \; (i, \; j) \in L_{lp}, \\ d_{ij} - \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$D^{*} = D.$$

Переходим к общей итерации. Проиллюстрируем работу алгоритма на следующем примере.

П р и м е р

Найти максимальный поток из вершины *1* в вершину *7* в сети, заданной матрицей пропускных способностей дуг

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 15 & 20 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 8 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 15 & 8 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 0 & 5 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаем $X = \left\| x_{ij} \right\|_{7\times 7} = \left\| 0 \right\|$, $D^* = D$.

Итерация 1. Получаем

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 & 15 & 15 & 10 & 15 \\ 15 & 0 & 10 & 15 & 20 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 10 & 0 & 15 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 10 & 15 & 0 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 \\ 15 & 15 & 10 & 15 & 15 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^* = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Так как $d_{17} = 15$, с помощью матрицы R^* находим увеличивающий путь:

$$r_{17}^* = 5,$$

$$r_{57}^* = 2,$$

$$r_{27}^* = 4,$$

$$r_{47}^* = 7,$$

$$L_{17} = \{(1, 5), (5, 2), (2, 4), (2, 7)\}.$$

Находим матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 35 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 8 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 30 & 8 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 30 & 5 & 0 & 5 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ -15 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D^* = D.$$

Итерация 2.

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 30 & 0 & 10 & 10 & 35 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 30 & 30 & 10 & 0 & 30 & 10 & 10 \\ 30 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 \\ 30 & 30 & 10 & 30 & 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$d_{17}^* = 15, \; L_{17} = \{(1, 2), (2, 5), (5, 7)\}.$$

Находим матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 8 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 30 & 8 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 30 & 10 & 0 & 5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 15 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D^* = D.$$

Итерация 3.

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 30 & 0 & 10 & 10 & 30 & 10 & 6 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 10 & 10 & 6 \\ 30 & 30 & 10 & 0 & 30 & 10 & 6 \\ 30 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 & 6 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 & 6 \\ 30 & 30 & 10 & 30 & 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$d_{17}^* = 5, \; L_{17} = \{(1, 3), (3, 6), (6, 7)\}.$$

Находим матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 8 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 30 & 8 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 30 & 10 & 0 & 5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 15 & 10 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 15 & 11 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 15 & 10 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ -15 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D^* = D.$$

Итерация 4.

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 30 & 0 & 10 & 10 & 30 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 10 & 10 & 5 \\ 30 & 30 & 10 & 0 & 30 & 10 & 5 \\ 30 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 15 & 10 & 10 & 0 & 5 \\ 30 & 30 & 11 & 30 & 30 & 11 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$d_{17}^* = 5, \; L_{17} = \{(1, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 7)\}.$$

Находим матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 5 & 25 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 8 & 0 & 5 & 0 \\ 10 & 25 & 8 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 30 & 15 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 10 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 20 & 11 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & -15 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 10 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ -15 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D^* = D.$$

Итерация 5.

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 5 & 25 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 8 & 0 & 5 & 0 \\ 10 & 25 & 8 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 30 & 15 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 10 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 20 & 11 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_{17}^* = 0.$$

Алгоритм закончил работу. Потоковая матрица

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 10 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ -15 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если элемент x_{ij} матрицы X отрицателен, то это означает, что поток величины $\left|x_{ij}\right|$ переносится из вершины j в вершину i.

Задачи для самостоятельного решения

Найти максимальный поток из вершины *1* в вершину *10* в сетях, заданных матрицами пропускных способностей.

Варианты

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 10 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 5 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 15 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 8 & 0 & 0 & 4 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 & 0 & 0 & 4 & 11 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 9 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 11 & 0 & 7 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & 12 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 7 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 7 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 0 & 0 & 13 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 13 & 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 10 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 & 10 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 9 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 13 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$
4.\ \begin{pmatrix}
0 & 20 & 15 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
20 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\
15 & 5 & 0 & 11 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 11 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 8 & 0 \\
0 & 7 & 3 & 0 & 0 & 4 & 9 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 12 & 4 & 0 & 0 & 10 & 12 & 0 \\
0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 5 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 5 & 0 & 9 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 2 & 0 & 9 & 0 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 15 & 20 & 0
\end{pmatrix}.
$$

$$
5.\ \begin{pmatrix}
0 & 20 & 25 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
20 & 0 & 7 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
25 & 7 & 0 & 8 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 8 & 0 & 6 & 10 & 0 & 0 & 13 & 0 \\
0 & 15 & 0 & 6 & 0 & 9 & 0 & 7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 9 & 10 & 9 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 10 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 10 & 0 & 3 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 & 17 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 15 & 17 & 0
\end{pmatrix}.
$$

6. $$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 16 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 9 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 9 & 0 & 3 & 11 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 8 & 0 & 9 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 9 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 15 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 10 & 15 & 0 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 12 & 0 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. $$\begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 9 & 0 & 0 & 7 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 & 0 & 4 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 8 & 4 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 15 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 15 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 9 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 25 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$8.\ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 19 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 10 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 10 & 0 & 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & 0 & 0 & 15 & 0 & 10 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 15 & 0 & 0 & 12 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 12 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 12 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 20 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$9.\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 19 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 10 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 10 & 0 & 9 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 9 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 10 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 12 & 10 & 0 & 0 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 12 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 90 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$10.\ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 13 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 10 & 0 & 12 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 12 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 9 & 9 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 25 & 0 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, А.В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод. – Минск : Вышэйшая школа, 2000.

2. Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию : учебное пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск : БГЭУ, 2001. – 448 с.

3. Гольштейн, Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М.: Наука, 1969.

Учебное издание

КОРЗНИКОВ Александр Дмитриевич
ПАВЛОВ Валерий Валентинович

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методическое пособие
для студентов инженерно-технических
и экономических специальностей

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *А. Е. Дарвиной*

Подписано в печать 17.02.2017. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,18. Тираж 100. Заказ 575.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.