

СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО РЕКУРРЕНТНОГО ФИЛЬТРА ПРИ КОМПЛЕКСИРОВАННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Артемов В.М., Наумов А.О., Кохан Л.Л.
Институт прикладной физики НАН Беларуси
Минск, Республика Беларусь

Введение

Повышение точности фильтрации и надежности при отказах датчиков достигается комплексированием результатов измерений одних и тех же параметров совокупностью измерителей, которые могут быть построены на различных физических принципах. Существующие методы [1] для своей реализации требуют знания моделей и априорных статистических характеристик, которые в ряде случаев недоступны. Для решения задачи в условиях неопределенности применяется метод наименьших квадратов [2]. Однако для увеличения точности фильтрации в этом случае совместно применяют адаптивную фильтрацию, использующую дополнительную информацию из текущих измерений [3, 4].

Вызывает интерес решение общей задачи синтеза адаптивных рекуррентных фильтров с нахождением их структуры, что можно осуществить с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов (РМНК) [5].

1. Исходные положения

Предполагается, что фильтрации подлежит случайная скалярная последовательность x_k , где $k = 0, 1, 2, \dots$ есть дискретное время. Измерения осуществляются посредством N датчиков, совокупность сигналов на выходах которых можно представить N -мерным вектором $x_k \cdot \mathbf{1}$, $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$. Вектор сигналов датчиков представляется в виде $x_k H \mathbf{1}$, где $N \times N$ матрица H с элементами $h_{i,j}$ ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$) отображает характеристики датчиков и связей между ними. Наблюдения осуществляются со случайными ошибками в виде аддитивных шумов с нулевым математическим ожиданием $\mathbf{v}_k = [v_{1,k}, \dots, v_{N,k}]^T$, в результате чего вектор наблюдений $\mathbf{z}_k = [z_{1,k}, \dots, z_{N,k}]^T$ имеет вид

$$\mathbf{z}_k = H \mathbf{1} x_k + \mathbf{v}_k. \quad (1)$$

Считается, что модель формирования полезного сигнала x_k и его характеристики априори неизвестны. Кроме того, неизвестной полагается и ковариационная матрица шумов \mathbf{v}_k .

Адаптивная фильтрация должна обеспечить текущие рекуррентные оценки скалярного полезного сигнала x_k по результатам измерений (1). Для этого используется РМНК, в основе которого лежит выбор подходящего функционала

потерь. Одним из возможных вариантов функционала J_k может быть следующий:

$$J_k(\hat{x}_k, \hat{a}_k) = (\mathbf{z}_k - H \mathbf{1} \hat{x}_k)^T (\mathbf{z}_k - H \mathbf{1} \hat{x}_k) + (\hat{x}_k - \hat{a}_k \hat{x}_{k-1})^2 + \alpha (\hat{a}_k - \hat{a}_{k-1})^2. \quad (2)$$

В выражении (2) первое слагаемое задает невязкой решения, второе определяет согласование оценки \hat{x}_k с оценкой на предыдущем шаге \hat{x}_{k-1} и неизвестным сглаживающим коэффициентом \hat{a}_k , подлежащим оценке наряду с \hat{x}_k . Третье слагаемое обеспечивает сглаживание оценки этого коэффициента с размерным эмпирическим коэффициентом регуляризации α , дающим возможность получения стабильного решения.

2. Уравнения адаптивного фильтра

Оптимальные текущие оценки \hat{x}_k и \hat{a}_k находятся из условия минимума критерия (2):

$$\hat{x}_k = \frac{\hat{a}_k}{1 + h_0^2} \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{1 + h_0^2} \mathbf{b}^T \mathbf{z}_k; \quad (3)$$

$$\hat{a}_k = \frac{\alpha(1 + h_0^2)}{\alpha(1 + h_0^2) + h_0^2 \hat{x}_{k-1}^2} \hat{a}_{k-1} + \frac{\hat{x}_{k-1}}{\alpha(1 + h_0^2) + h_0^2 \hat{x}_{k-1}^2} \mathbf{b}^T \mathbf{z}_k. \quad (4)$$

где $h_0^2 = \mathbf{1}^T H^T H \mathbf{1}$; $\mathbf{b} = H \mathbf{1}$.

В результате сомножитель $\mathbf{b}^T \mathbf{z}_k$ будет скалярным комплексированным входным воздействием фильтра.

Уравнения (3) и (4) являются рекуррентными, в которых значения \hat{x}_{k-1} и \hat{a}_{k-1} определены на предыдущем шаге решения. Они отображают адаптивный характер фильтрации, поскольку их параметры не зависят от априорных сведений о модели полезного сигнала и характеристик шумов, а определяются на основе текущих измерений \mathbf{z}_k . Учет комплексирования происходит посредством коэффициента h_0^2 и вектора \mathbf{b} , связанных с параметрами матрицы датчиков.

3. Сравнение адаптивного фильтра с фильтром Калмана

Пусть формирование полезного сигнала x_k осуществляется посредством модели в виде стохастического конечно-разностного уравнения первого порядка:

$$x_k = a_x x_{k-1} + w_k, \quad (5)$$

где постоянный параметр модели $0 < a_x < 1$, а w_k есть дискретный белый шум с нулевым математическим ожиданием и постоянной диспер-

сией σ_w^2 . Можно показать, что в установившемся режиме параметры модели (5) связаны с дисперсией сигнала x_k [6] соотношением $\sigma_w^2 = \sigma_x^2(1 - a_x^2)$. Параметр a_x связан с длительностью корреляции τ_x , соотношением $a_x = \tau_x / (\tau_x + 1)$. Дисперсия σ_v^2 шума наблюдений в каждом канале фильтра определяется исходя из отношения сигнала к шумам $q = \sigma_x / \sigma_v$ при заданных значениях q и σ_x .

Ниже приводятся результаты оценки точности фильтрации в установившемся режиме при следующих параметрах: $H = I$, $\alpha = 1$; $\sigma_x^2 = 400$; $\tau_x = 10, 20, 50$; $q = 3, 5, 10$. Усреднение проводилось по данным 10^3 испытаний.

На рис. 1 приведен фрагмент реализации результатов фильтрации входного сигнала (штрихпунктирная линия), фильтром Калмана (штриховая линия) и адаптивным фильтром наименьших квадратов (сплошная линия).

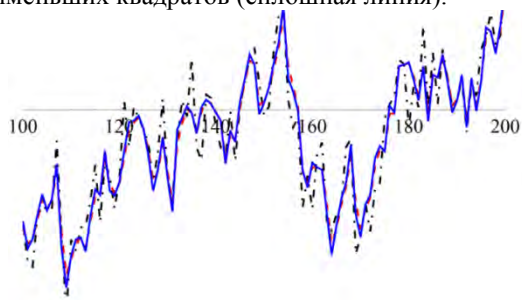


Рис. 1. Фрагмент реализации результатов фильтрации при $\tau_x = 50$, $q = 5$

На рис. 2,а сплошными линиями показана зависимость относительной величины среднеквадратического отклонения (СКО) ошибки фильтрации $\epsilon = \sigma_e / \sigma_x$ от числа каналов N измерений входного сигнала при различных значениях длительности корреляции τ_x при $q = 5$, а на рис. 2,б – зависимость ϵ от N при различных значениях q и $\tau_x = 50$.

На рис. 2 штриховыми линиями показаны результаты для фильтра Калмана, которые могут служить нижней границей ошибок. Увеличение ошибки фильтрации адаптивного фильтра по сравнению с этим случаем вызвано неучетом априорной информации.

Заключение

Полученные результаты позволяют утверждать, что адаптивные фильтры наименьших квадратов при комплексированных измерениях могут быть использованы при отсутствии априорной информации о моделях полезных сигналов и шумов наблюдений. В этом смысле данные фильтры универсальны по

сравнению с фильтром Калмана и могут иметь широкое применение. Нахождение параметров адаптивного фильтра наименьших квадратов менее трудоемко, чем у фильтра Калмана, что упрощает их реализацию в реальном масштабе времени.

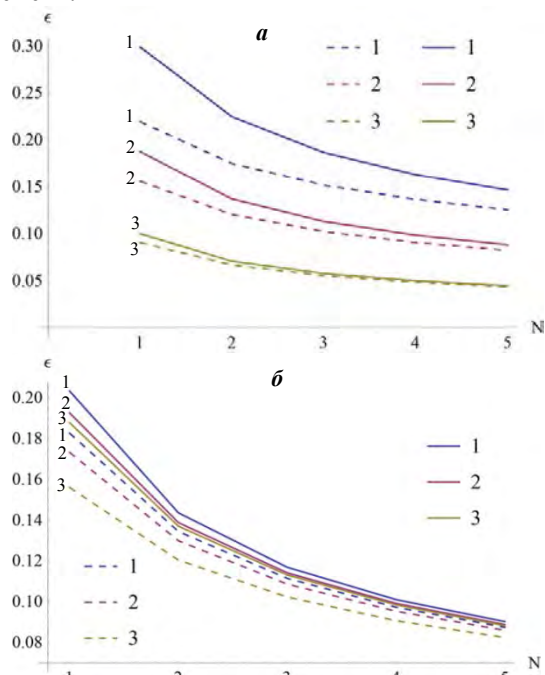


Рис. 2. Относительные значения СКО ошибок фильтрации: а) при различных длительностях корреляции: 1) $\tau_x = 10$, 2) $\tau_x = 20$, 3) $\tau_x = 50$ и $q = 5$; б) при различных отношениях сигнала к шумам: 1) $q = 3$, 2) $q = 5$, 3) $q = 10$ и $\tau_x = 50$

1. Справочник по теории автоматического управления / под. ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 711 с.
2. Степанов, А.О. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации // СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – Ч.1. Введение в теорию оценивания. – 496 с.
3. Maurice, G.B. A Fast Least-Squares Algorithms for Linearly Constrained Adaptive Filtering // IEEE Trans. Signal Processing. – 1996. – Vol. 44, № 5. – P. 1168–1174.
4. Адаптивные фильтры / под. ред. П.Н. Гранта, К.Ф. Коуэна. – М.: Мир, 1988. – 388 с.
5. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки изображений. – М.: Физматгиз, 1962. – 349 с.
4. Артемьев В.М., Наумов А.О., Кохан Л.Л. Оптимальная линейная совмещенная фильтрация случайных последовательностей на основе рекуррентного метода наименьших квадратов // Информатика. – 2015. – № 1. – С. 8–16.