УДК 621.311

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Янушкевич К.С.
Научный руководитель – м.т.н., старший преподаватель Волков А.А.

Для расчета режима электрической сети необходимо составить и решить систему уравнений. При большом числе уравнений (~ 100 и более) прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) становятся труднореализуемыми на ЭВМ, прежде всего из-за сложности хранения и обработки матриц большой размерности. Поэтому появляется необходимость использования итерационных методов – методов последовательных приближений, в которых при вычислении последующего приближения решения используются предыдущие, уже известные приближенные решения.

Пусть задана СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

или в матричной форме

$A \cdot X = B$,

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Необходимо определить неизвестные x_1, x_2 и x_3. Для этого подготовим систему к решению методом простой итерации:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \left(0 \cdot x_1^{(k)} + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2^{(k)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot x_1^{(k)} + 0 \cdot x_2^{(k)} + \frac{a_{23}}{a_{22}} \cdot x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3}{a_{33}} - \left(\frac{a_{31}}{a_{33}} \cdot x_1^{(k)} + \frac{a_{32}}{a_{33}} \cdot x_2^{(k)} + 0 \cdot x_3^{(k)}\right)$$

или в матричной форме

$$X^{(k+1)} = H \cdot X^{(k)} + G.$$

По методу Якоби находим матрицы коэффициентов приведённой системы уравнений. Для этого представим матрицу A в виде:

$$A = L + D + R,$$

где D - диагональная, L и R – левая и правая строго треугольные (с нулевой диагональю) матрицы

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В случае симметричной относительно главной диагонали матрицы A

$$R = L^T.$$

Тогда

$$L \cdot X^{(k)} + D \cdot X^{(k+1)} + R \cdot X^{(k)} = B$$

Или

$$D \cdot X^{(k+1)} = -(L + R) \cdot X^{(k)} + B,$$

$X^{(k+1)} = -D^{-1} \cdot (L + R) \cdot X^{(k)} + D^{-1} \cdot B.$

Получаем

$$H = -D^{-1} \cdot (L + R) \text{ и } G = D^{-1} \cdot B.$$

Необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций при любом начальном векторе $X^{(0)}$ к решению X^* системы является требование, чтобы все собственные значения λ матрицы H были по модулю меньше 1.

Собственные значения матрицы H можно найти по формуле

det(H-E· λ)=0,

где E – единичная матрица такой же размерности, что и матрица H.

Следствием этого условия является: для сходимости итерационного процесса по методу простой итерации необходимо и достаточно чтобы все корни z уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdot z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \cdot z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdot z \end{vmatrix} = 0$$

по модулю были бы меньше 1.

Достаточным условием сходимости метода простой итерации является диагональное преобладание в матрице A (каждый диагональный элемент должен быть больше суммы модулей недиагональных элементов соответствующей строки или столбца).

Рассмотрим решение системы уравнений узловых напряжений методом простой итерации

$$Y \cdot U_\Delta = J.$$

Пусть известны матрица узловых проводимостей, См и матрица задающих токов, кА:

$$Yy = \begin{pmatrix} 0.371 & -0.179 & -0.093 & 0 & 0 \\ -0.179 & 0.511 & -0.125 & -0.111 & 0 \\ -0.093 & -0.125 & 0.334 & 0 & -0.116 \\ 0 & -0.111 & 0 & 0.225 & -0.114 \\ 0 & 0 & -0.116 & -0.114 & 0.23 \end{pmatrix} \quad Jy = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.316 \\ -0.632 \\ -0.297 \\ 0.421 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить падения напряжения в узлах относительно балансирующего.

Определяем матрицу H и ее собственные значения:

$$H := -D^{-1} \cdot (L + R) = \begin{pmatrix} 0 & 0.481 & 0.249 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0 & 0.245 & 0.218 & 0 \\ 0.277 & 0.374 & 0 & 0 & 0.348 \\ 0 & 0.494 & 0 & 0 & 0.506 \\ 0 & 0 & 0.506 & 0.494 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^T = \begin{pmatrix} 0.325 \\ -0.794 \\ -0.418 \\ 0.902 \\ -0.015 \end{pmatrix}.$$

Все собственные значения матрицы H по модулю меньше 1. Значит необходимое и достаточное условие выполняется. Матрицы D и L+R положительно определенные, т.к. их определитель положителен

$$D = \begin{pmatrix} 0.371 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.511 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.334 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.23 \end{pmatrix} \qquad |D| = 3.271 \times 10^{-3}$$

$$L + R = \begin{pmatrix} 0 & -0.179 & -0.093 & 0 & 0 \\ -0.179 & 0 & -0.125 & -0.111 & 0 \\ -0.093 & -0.125 & 0 & 0 & -0.116 \\ 0 & -0.111 & 0 & 0 & -0.114 \\ 0 & 0 & -0.116 & -0.114 & 0 \end{pmatrix} \qquad |L + R| = 4.827 \times 10^{-6}$$

Организация итерационного процесса:

$k := 1..100$

$U\Delta^{\langle k+1\rangle} := G + H \cdot U\Delta^{\langle k\rangle}$

Выполним расчеты по методу ускоренной итерации:
Находим матрицы коэффициентов приведенной системы уравнений
$L \cdot X^{(k+1)} + D \cdot X^{(k+1)} + R \cdot X^{(k)} = B$
или

$$(L + D) \cdot X^{(k+1)} = -R \cdot X^{(k)} + B,$$

$X^{(k+1)} = -(L + D)^{-1} \cdot R \cdot X^{(k)} + (L + D)^{-1} \cdot B.$
Получаем

$$H = -(L + D)^{-1} \cdot R \text{ и } G = (L + D)^{-1} \cdot B.$$

Организация итерационного процесса:

$k := 2..100$

$U\Delta 1^{\langle k\rangle} := (L + D)^{-1} \cdot B - (L + D)^{-1} \cdot R \cdot U\Delta 1^{\langle k-1\rangle}$

На рисунке 1 представлены результаты расчета падения напряжения в узле 1 относительно балансирующего по методам простой и ускоренной итерации.

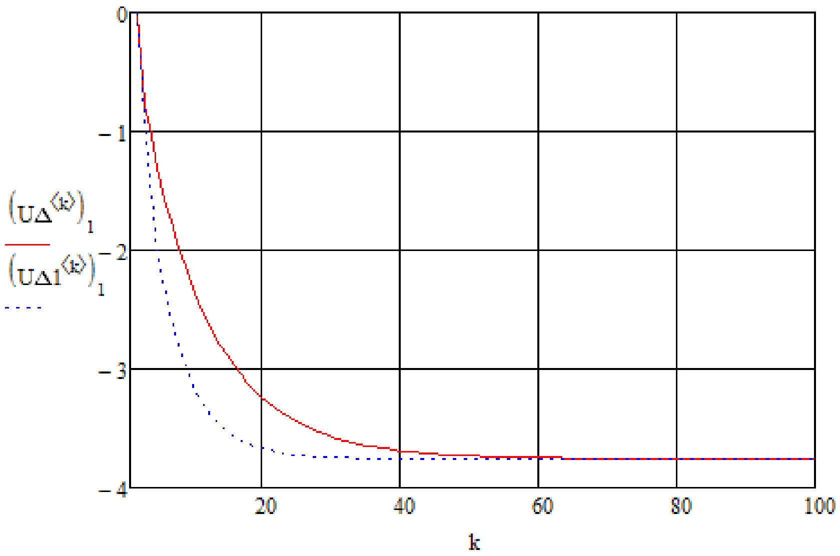

Рисунок 1 – Сравнительная сходимость по методам простой и ускоренной итерации

Для рассмотренного примера по методу простой итерации результат с точностью 0,001 получили за 86 итераций, а по методу ускоренной итерации за 43.

Главное достоинство итерационных методов – применимость их к плохо обусловленным системам и системам высоких порядков, их самоисправляемость и простота реализации на компьютере. Только в начале расчетов необходимо задаться начальным приближением к искомому решению.

Литература

1. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие/В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. — 3-е изд. стер. - М.: Высш. шк., 2008. — 480 с.

2. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. - 3-е изд., стереотип. - СПб.: Лань, 2002. - 733 с.

3. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные метометоды. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 400 с.