УДК 621.311

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Тараканова А.И.
Научный руководитель – м.т.н., старший преподаватель Волков А.А.

Для расчета режима электрической сети необходимо составить и решить систему уравнений. Метод Ньютона является наиболее распространённым методом решения системы нелинейных уравнений узловых напряжений. Основным преимуществом является его быстрота и надёжность процесса сходимости. Основным недостатком является то, что он требует большого объёма вычислений и промежуточной информации на каждом итерационном шаге.

Метод Ньютона сводится последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученных путём линеаризации системы нелинейных уравнений [1].

Для *к*-го приближения вектора неизвестных $x^{(k)} = (\,x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \dots x_n^{(k)})^{\text{T}}$ будем искать $(k+1)$-е приближение в виде

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)},$$

где вектор приращения $\Delta x^{(k)} = (\Delta x_1^{(k)} \Delta x_2^{(k)} \dots \Delta x_n^{(k)})^{\text{T}}$подлежит определению.

Для нахождения этих приращений разложим функцию $F_1(x^{(k+1)})$ в ряд Тейлора в окрестностях точки $x^{(k)}$ до производных первого порядка включительно и приравняем это разложение нулю: $F_1\left(x^{(k+1)}\right) = 0$, получим:

$$F_1\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}\right) = F_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) + \frac{\partial F_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1} \text{Ч} \Delta x_1^{(k)} +$$
$$+ \frac{\partial F_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_2} \text{Ч} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial F_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n} \text{Ч} \Delta x_n^{(k)} \approx 0.$$

Осуществляя те же процедуры для остальных уравнений системы, получим следующую СЛАУ относительно вектора неизвестных $\Delta x^{(k)} = \Delta x_1^{(k)} \Delta x_2^{(k)} \dots \Delta x_n^{(k)}$ [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1} \text{Ч} \Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial F_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_2} \text{Ч} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \dfrac{\partial F_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n} = -F_1\left(x^{(k)}\right), \\ \dfrac{\partial F_2\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1} \text{Ч} \Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial F_2\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_2} \text{Ч} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \dfrac{\partial F_2\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n} = -F_1\left(x^{(k)}\right), \\ \dots \\ \dfrac{\partial F_n\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1} \text{Ч} \Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial F_n\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_2} \text{Ч} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \dfrac{\partial F_n\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n} = -F_1\left(x^{(k)}\right). \end{cases}$$

Для решения этой СЛАУ необходимо и достаточно, чтобы матрица этой системы

$$J\left(x^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial F_1\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n} \\ \dots \\ \dfrac{\partial F_n\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_1} \dots \dfrac{\partial F_n\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

была невырожденной, т.е. существовала обратная матрица$\left(J\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1}$. Матрицу J называют матрицей Якоби.

В матрично-векторной форме:$J\left(x^{(k)}\right) \text{Ч} \Delta x^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right)$, откуда
$\Delta x^{(k)} = -J^{-1}\left(x^{(k)}\right) \text{Ч} F\left(x^{(k)}\right)$.

Соотношение для решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона:
$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}\left(x^{(k)}\right) \text{Ч} F\left(x^{(k)}\right)$.

Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия:

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \leq \varepsilon,$$

где ε – заданная точность, а вектор $x \approx x^{(k+1)}$.

Метод Ньютона второго порядка является более сложным за счёт вычисления вторых частных производных, однако, количество итераций будет меньше чем при методе Ньютона (методе простой итерации).

Реализация метода. Пусть задано нелинейное уравнение $f(x) = 0$ и известно начальное приближение $x^{(0)}$. Нелинейную функцию $f(x)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности начального приближения, т.е. при $x = x^{(0)}$.

$$f(x)_{x=x^{(0)}} = f(x^{(0)}) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x^{(0)}} * \delta x + \left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x^{(0)}} * \delta x^2 = 0,$$

где $\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right] = G$ - матрица Гессе – матрица частных производных второго порядка.

Откуда

$$0 = f(x^{(0)}) + f'(x)|_{x=x^{(0)}} * \left(x^{(0)} - x\right) + f''(x)|_{x=x^{(0)}} * \left(x^{(0)} - x\right),$$

$$\partial x^{(0)} = -\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)}) + f''(x^{(0)})}.$$

Для k-того приближения:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)}) + f''(x^{(k-1)})}.$$

Для получения расчёта режима необходимо организовать итерационный процесс, который закончится, когда достигается заданная точность расчёта:

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \leq \varepsilon.$$

Проведем расчеты режима простейшей электрической сети постоянного тока (рисунок 1) при задании нагрузок в мощностях в среде Mathcad.

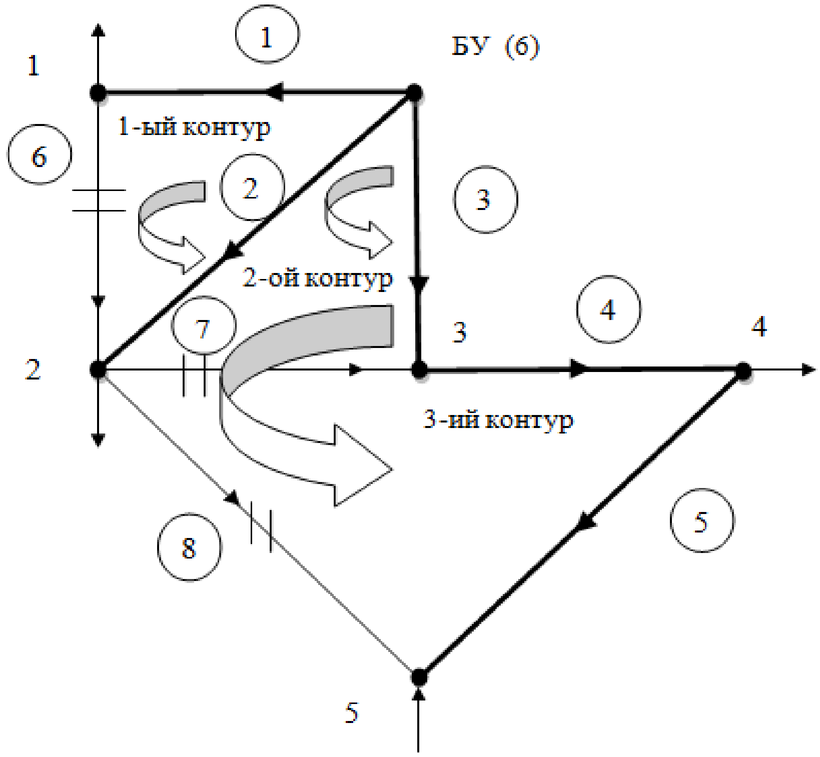

Рисунок 1 – Схема электрической сети

Принимаем номинальное напряжение электрической сети равным 110 кВ, а напряжением в балансирующем узле (БУ) 115 кВ.

Задаем нагрузки в узлах электрической сети и список ребер, для дальнейшего формирования первой матрицы соединений, определения матрицы сопротивлений ветвей и матрицы узловых проводимостей:

$$P := \begin{pmatrix} -40 \\ -32 \\ 0 \\ -53 \\ 60 \end{pmatrix} \qquad R := \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 40 & 29 & 39 & 44 & 57 & 46 & 34 & 51 \end{pmatrix} \qquad M\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В списке ребер третья строка несет информацию о протяженности ветвей. Удельное сопротивление ветвей принято 0,2 Ом/км.

Реализовываем метод Ньютона второго порядка с помощью пользовательских функций в среде Mathcad. Данные функции используем для определения вектор-функции небаланса, матрицы Якоби и матрицы Гессе.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ntonVT}(X,e) := \ & k \leftarrow \mathrm{rows}(X) \\
& \text{for } j \in 1..k \\
& \quad Mf_{1,j+1} \leftarrow X_j \\
& Mf_{1,k+2} \leftarrow \max(W(X)) \\
& \text{for } i \in 2..80 \\
& \quad fU \leftarrow -J(X)^{-1} \cdot W(X) \\
& \quad D \leftarrow \frac{1}{2} \cdot G(X) \cdot (fU)^2 \\
& \quad fU2 \leftarrow -J(X + fU)^{-1} \cdot (W(X) + D) \\
& \quad Z \leftarrow X + fU2 \\
& \quad b \leftarrow \max\left(\overrightarrow{|fU2|}\right) \\
& \quad X \leftarrow Z \\
& \quad \text{for } j \in 1..k \\
& \quad\quad Mf_{i,j+1} \leftarrow X_j \\
& \quad Mf_{i,1} \leftarrow i - 1 \\
& \quad Mf_{i,k+2} \leftarrow \max(W(X) + D) \\
& \quad Mf_{i,k+3} \leftarrow b \\
& \quad \text{break if } b < e \\
& Mf
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W(U) := \ & \text{for } i \in 1..\mathrm{rows}(P) \\
& \quad W_i \leftarrow 0 \\
& \quad \text{for } j \in 1..\mathrm{rows}(P) \\
& \quad\quad W_i \leftarrow W_i + Yy_{i,j} \cdot U_j \\
& \quad W_i \leftarrow W_i - Ubu \cdot \sum_{j=1}^{\mathrm{rows}(P)} Yy_{i,j} - \frac{P_i}{U_i} \\
& \text{return } W
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J(U) := \ & \text{for } i \in 1..\mathrm{rows}(P) \\
& \quad \text{for } j \in 1..\mathrm{rows}(P) \\
& \quad\quad J_{i,j} \leftarrow \left(Yy_{i,j}\right) \text{ if } i \ne j \\
& \quad\quad J_{i,j} \leftarrow Yy_{i,j} - \frac{(-P)_i}{\left(U_i\right)^2} \text{ if } i = j \\
& \text{return } J
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(U) := \ & \text{for } i \in 1..\mathrm{rows}(P) \\
& \quad \text{for } j \in 1..\mathrm{rows}(P) \\
& \quad\quad G_{i,j} \leftarrow 0 \text{ if } i \ne j \\
& \quad\quad G_{i,j} \leftarrow \frac{-2 \cdot (-P)_i}{\left(U_i\right)^3} \text{ if } i = j \\
& \text{return } G
\end{aligned}
$$

Для того чтобы исключить зацикливание итерационного процесса максимальное число итераций ограничено 80.

В таблицах 1 и 2 представлены результаты расчета по методу Ньютона и по методу Ньютона второго порядка – значения напряжений в узлах, максимальный небаланс токов в узлах и наибольшее изменение напряжения на итерационном шаге.

Для получения решения необходимо обратиться к составленным функциям и записать выражение вида:

$$NVT := ntonVT(U0, 0.01)$$

В этом выражении после названия функции указываются начальные приближения напряжения в узлах и требуемая точность расчета.

Таблица 1 – Результаты расчета по методу Ньютона

Номер итерации	Напряжение в узле, кВ					Максимальный небаланс, кА	$\Delta U_{нб}$, кВ
	1	2	3	4	5		
0	110	110	110	110	110	0,482	0
1	112,979	113,909	113,838	112,435	115,99	$3{,}547\cdot10^{-4}$	5,99
2	112,979	113,911	113,84	112,441	116,001	$1{,}084\cdot10^{-9}$	0,012
3	112,979	113,911	113,84	112,441	116,001	0	$4{,}228\cdot10^{-8}$

Таблица 2 – Результаты расчета по методу Ньютона второго порядка

Номер итерации	Напряжение в узле, кВ					Максимальный небаланс, кА	$\Delta U_{нб}$, кВ
	1	2	3	4	5		
0	110	110	110	110	110	0,482	0
1	112,978	113,911	113,84	112,44	116	$1{,}455\cdot10^{-3}$	6
2	112,979	113,911	113,84	112,441	116,001	$7{,}248\cdot10^{-11}$	$1{,}373\cdot10^{-3}$

Проводим серию вычислений, изменяя точность расчётов. Результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Сравнительные результаты расчета

Коэффициент утяжеления	Количество итераций								
	метод Ньютона			метод Ньютона второго порядка			метод касательных		
	точность расчета, кВ			точность расчета, кВ			точность расчета, кВ		
	0,1	0,01	0,001	0,1	0,01	0,001	0,1	0,01	0,001
1	2	3	3	2	2	3	2	3	3
5	3	3	3	2	3	3	3	4	5
7	3	4	4	3	3	3	4	6	8
8	4	4	5	3	4	4	6	9	12
8,5	5	5	6	3	4	4	11	18	25
8,62	итерационный процесс разошелся								

По результатам проведенных расчётов можно отметить, что метод Ньютона второго порядка дает результат решения нелинейных алгебраических уравнений быстрее, чем метод Ньютона (метод простой итерации) или его модификация – метод касательных. Скорость сходимости итерационных методов зависит от близости начальных данных к решению задачи и от точности расчета.

Литература

1. Численные методы. В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. - М.:Физматгиз, 2004. - 400 с.

2. Численные методы на базе MathCAD. С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 464 с.