УДК 621.311

СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ МАТРИЦЫ УЗЛОВЫХ ПРОВОДИМОСТЕЙ

Крапивина Т.С.
Научный руководитель – м.т.н., старший преподаватель Волков А.А.

Расчет установившегося режима (УР) является базовой задачей при выполнении анализа режимов работы электрических систем.

Математическая модель УР электрических систем представляется совокупностью уравнений, которые формируются на основе схем замещения и физических законов Ома, Кирхгофа. На практике математическая модель, представленная уравнениями законов Ома и Кирхгофа в явном виде, как правило, не используется. В настоящее время наиболее распространенной формой уравнений УР является система уравнений узловых напряжений (УУН) [1]. При задании нагрузок в токах система УУН является линейной системой алгебраических уравнений (СЛАУ), а при задании в мощностях – нелинейной.

Важным моментом, определяющим возможность получения решения линейной системы уравнений и достоверность этого решения, является хорошая обусловленность матрицы ее коэффициентов. Если матрица плохо обусловлена, то определитель стремится к нулю, соответственно система может иметь бесконечное множество решений или же может не иметь решение и не отвечать физической сущности задачи, а в некоторых случаях при применении итерационных методов может вообще не давать решений – итерационный процесс расходится.

Для решения СЛАУ применяются точные и итерационные методы, основанные на многократном уточнении $x^{(0)}$ - приближенно заданного решения задачи (верхним индексом в скобках здесь обозначается номер итерации).

Пусть необходимо решить систему уравнений узловых напряжений:

$$\begin{cases} y_{11} \cdot U_{\Delta 1} + y_{12} \cdot U_{\Delta 2} + y_{13} \cdot U_{\Delta 3} = J_1 \\ y_{21} \cdot U_{\Delta 1} + y_{22} \cdot U_{\Delta 2} + y_{23} \cdot U_{\Delta 3} = J_2 \\ y_{31} \cdot U_{\Delta 1} + y_{32} \cdot U_{\Delta 2} + y_{33} \cdot U_{\Delta 3} = J_3 \end{cases} \tag{1}$$

или в матричной форме:

$$Y \cdot U_{\Delta} = J, \tag{2}$$

где Y – матрица узловых проводимостей;

U_{Δ} - искомая матрица-столбец падений напряжения в узлах относительно балансирующего, кВ;

J - матрица-столбец задающих токов в узлах (токи нагрузки задаются со знаком “минус”), кА.

Подготовленная система к решению методом простой итерации в матричной форме имеет вид:

$$U_{\Delta}{}^{(k+1)} = H \cdot U_{\Delta}{}^{(k)} + G, \tag{3}$$

где $H = -D^{-1} \cdot (L + R)$ и $G = D^{-1} \cdot J$.

В свою очередь

$$Y = L + D + R, \tag{4}$$

где D – диагональная, L и R – левая и правая строго треугольные (с нулевой диагональю) матрицы. В случае симметричной относительно главной диагонали матрицы Y получаем $R = L^T$.

При решении СЛАУ итерационными методами возникают следующие вопросы:

1) сходится ли итерационный процесс, то есть можно ли в результате расчета получить решение?

2) если сходимость есть, то какова ее скорость?

3) какова погрешность найденного решения?

Ответить на эти вопросы можно проведя анализ норм, собственных чисел и обусловленности матриц, используемых в итерационном процессе [2].

Существую следующие нормы:

1) m-норма (в MathCAD функция normi(H)):

$$\|H\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |h_{i,j}|; \tag{5}$$

2) *l*-норма (в MathCAD функция norm1(H)):

$$\|H\|_l = \max_j \sum_{j=1}^{n} |h_{i,j}|; \tag{6}$$

3) Евклидова норма (в MathCAD функция norme(H)):

$$\|H\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |h_{i,j}|^2}. \tag{7}$$

Метод простых итераций, реализующийся в процессе последовательных приближений (3), сходится к единственному решению исходной системы $Y \cdot U_\Delta = J$ при любом начальном приближении $X^{(0)}$ со скоростью не медленнее геометрической прогрессии, если какая-либо каноническая норма матрицы H меньше единицы. Канонической называется норма, которая не меньше любого элемента матрицы.

Сходящийся процесс обладает свойством самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное.

Условия сходимости выполняются, если в матрице Y диагональные элементы преобладают, т.е. выполняется:

$|y_{ii}| \geq |y_{i1}| + |y_{i2}| + \cdots + |y_{ii-1}| + |y_{ii+1}| + \cdots + |y_{in}|$

и хотя бы для одного i неравенство строгое. Иначе, модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов (свободные члены не рассматриваются).

Чем меньше величина нормы H, тем быстрее сходимость метода.

Необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций при любом начальном векторе $X^{(0)}$к решению X^* системы является требование, чтобы все собственные значения λ матрицы H были по модулю меньше 1.

Собственные значения матрицы H можно найти по формуле:

$$\det(H - E \cdot \lambda) = 0, \tag{8}$$

где E – единичная матрица такой же размерности, что и матрица H.

В MathCAD собственные значения находятся через функцию eigenvals(H).

При det Y ≈0 небольшие погрешности в коэффициентах могут привести к большим погрешностям в решении (плохо обусловленная задача). При det Y = 0 решение задачи не существует или оно не единственно.

Обусловленность задачи характеризуется числом обусловленности – чем оно больше, тем хуже обусловленность системы:

$$V(Y) = \|Y\| \cdot \|Y^{-1}\|, \tag{9}$$

где $\|Y\|$ – норма матрицы, $\|Y^{-1}\|$ – норма обратной матрицы.

Число обусловленности связано с нормой матрицы и вычисляется по-разному для каждой из норм condi (Y) - число обусловленности в норме m; cond1(Y) - число обусловленности в норме L1; conde(Y) - число обусловленности в евклидовой норме.

Матрицы с числом обусловленности близким к единице называются хорошо обусловленными (погрешности исходных данных переносятся на решение без заметного увеличения).

Матрицы (с большим числом обусловленности (~ 10^3 и выше) называются плохо обусловленными (при решении плохо обусловленных систем возможно сильное увеличение ошибки в решении по сравнению с погрешностью исходных данных).

Рассмотрим СЛАУ вида (2), для которой известны:

$$Yy := \begin{pmatrix} 0.371 & -0.179 & -0.093 & 0 & 0 \\ -0.179 & 0.511 & -0.125 & -0.111 & 0 \\ -0.093 & -0.125 & 0.334 & 0 & -0.116 \\ 0 & -0.111 & 0 & 0.225 & -0.114 \\ 0 & 0 & -0.116 & -0.114 & 0.23 \end{pmatrix} \qquad J := \begin{pmatrix} 0 \\ -0.3 \\ -0.6 \\ -0.282 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Определяем матрицу H, а также ее нормы, собственные значения и число обусловленности матрицы $\mathbf{Y_y}$:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0.482 & 0.251 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0 & 0.245 & 0.217 & 0 \\ 0.278 & 0.374 & 0 & 0 & 0.347 \\ 0 & 0.493 & 0 & 0 & 0.507 \\ 0 & 0 & 0.504 & 0.496 & 0 \end{pmatrix} \qquad eigenvals(H) = \begin{pmatrix} 0.903 \\ -0.794 \\ -0.42 \\ 0.326 \\ -0.016 \end{pmatrix}$$

$$normi(H) = 1 \quad norm1(H) = 1.35 \quad norme(H) = 1.365$$

$$condi(Yy) = 37.438 \quad cond1(Yy) = 37.438 \quad conde(Yy) = 31.188$$

Достаточное условие сходимости итерационного процесса не выполняется – нормы матрицы H больше 1. Необходимое и достаточное условие сходимости итерационного процесса выполняется – все собственные значения матрицы H по модулю меньше 1. Итерационный процесс сходится.

При перестановке уравнение в системе местами (строк в матрицах $\mathbf{Y_y}$, J, U_Δ) условия сходимости итерационного процесса не выполняются, итерационный процесс расходится.

$$Yym = \begin{pmatrix} -0.179 & 0.511 & -0.125 & -0.111 & 0 \\ 0.371 & -0.179 & -0.093 & 0 & 0 \\ -0.093 & -0.125 & 0.334 & 0 & -0.116 \\ 0 & -0.111 & 0 & 0.225 & -0.114 \\ 0 & 0 & -0.116 & -0.114 & 0.23 \end{pmatrix} \qquad Jm = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0 \\ -0.6 \\ -0.282 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1.61 & 1.991 & -1.066 & -0.485 & -0.082 \\ 2.122 & 0.373 & -0.698 & -0.62 & 0.376 \\ 0.278 & 0.374 & 0 & 0 & 0.347 \\ 0 & 0.493 & 0 & 0 & 0.507 \\ 0 & 0 & 0.504 & 0.496 & 0 \end{pmatrix} \qquad eigenvals(H) = \begin{pmatrix} 2.851 \\ 0.842 \\ -0.861 + 0.076i \\ -0.861 - 0.076i \\ 0.011 \end{pmatrix}$$

$$normi(H) = 5.234 \quad norm1(H) = 4.011 \quad norme(H) = 3.864$$

$$condi(Yy) = 37.438 \quad cond1(Yy) = 37.438 \quad conde(Yy) = 31.188$$

Рассматривая матрицу узловых сопротивлений можно отметить, что элементы, находящиеся на главной диагонали, являются положительными числами, остальные элементы – либо нули, либо числа отрицательные. При замене строк в данной матрице можно наблюдать:

1) при попадании на главную диагональ значения «0» дальнейший расчет невозможен. Матрицу H посчитать нельзя, т.к. получается деление на ноль, что не допустимо;

2) при попадании на главную диагональ отрицательного значения режим расходится. Определитель матрицу узловых сопротивлений получается отрицательным, если сравнивать

его с оценкой Адамара, то он не удовлетворяет условию. Значения U^{Δ} стремительно растут, достигая значений $\approx 10^{65}$ и выше, что свидетельствует о том, что итерационный процесс расходится и рассчитать УР невозможно.

Литература

1. Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М., Неуймин В.Г. Вычислительные модели потокораспределения электрических систем. - М.: Наука, 2008. - 256 с.

2. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. - 3-е изд. стер. - М.: Высш. шк., 2008. - 480 с.