

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра физики

# ОБЩАЯ ФИЗИКА: ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Пособие для студентов специальностей

- 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
- 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»,
- 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»
- 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
по образованию в области строительства и архитектуры*

Минск  
БНТУ  
2017

УДК 537.31(075.6)

ББК 22.33я7

О-28

А в т о р ы :

*А. К. Есман, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук, П. Г. Кужир,  
А. И. Бибик, Е. В. Журавкевич, А. А. Иванов, Г. Л. Зыков,  
В. А. Потащиз, И. А. Климович, В. С. Позняк, С. В. Попко*

Р е ц е н з е н т ы :

кафедра «Общая физика» Белорусского государственного  
университета (зав. каф. *А. И. Слободянюк*);  
зав. каф. «Защита информации» Белорусского государственного  
университета информатики и радиоэлектроники,  
профессор *Л. М. Лыньков*

**Общая физика** : электричество и магнетизм : пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» / А. К. Есман [и др.]. – Минск : БНТУ, 2017. – 299 с.

ISBN 978-985-550-788-9.

В издании представлены материалы для проведения лекционных занятий по разделу «Электричество и магнетизм» для студентов инженерно-технического профиля.

УДК 537.31(075.6)

ББК 22.33я7

ISBN 978-985-550-788-9

© Белорусский национальный  
технический университет, 2017

## 16. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 16.1. Закон Кулона

Эксперименты показали, что сила электрического взаимодействия сложным образом зависит от формы наэлектризованных тел и характера распределения заряда на этих телах. Поэтому не существует единой формулы, описывающей взаимодействие зарядов для любого произвольного случая. Только для точечных зарядов закон взаимодействия имеет достаточно простую форму.

Понятие точечного заряда является такой же удобной абстракцией, как и материальная точка в механике. *Точечность зарядов* означает, что линейные размеры тел, на которых сосредоточены эти заряды, пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием, на котором рассматривается электростатическое взаимодействие.

Основной закон электростатики был установлен экспериментально Ш. Кулоном в 1785 г. Для определения силы взаимодействия зарядов Кулон использовал крутильные весы, состоящие из легкого стеклянного коромысла, которое заканчивалось металлическим шариком и противовесом. До этого шарика он дотрагивался наэлектризованным стержнем также с шариком на конце. Заряд распределялся между шариками, и они отталкивались друг от друга. Коромысло закручивало нить до тех пор, пока сила упругости не уравновешивала силу электрического взаимодействия. На основании проведенных экспериментов Кулон установил, что сила электрического взаимодействия точечных зарядов в вакууме зависит от расстояния между взаимодействующими зарядами и от величин этих зарядов:

$$F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \quad (16.1)$$

Следовательно, закон Кулона можно сформулировать так: сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, прямо пропорциональна произведению модулей этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и направлена вдоль прямой, соединяющей их.

Коэффициент пропорциональности  $k$  в формуле (16.1) зависит от выбора системы единиц. В СИ за единицу заряда принят кулон (Кл). **Кулон** – это заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника при постоянной силе тока 1 А.

По определению два неподвижных точечных заряда по 1 Кл, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга, взаимодействуют в вакууме с силой, равной  $9 \cdot 10^9$  Н.

В СИ коэффициент пропорциональности  $k$  связан с электрической постоянной  $\epsilon_0$  соотношением

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Так как

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}, \text{ то } k = 8,987552 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Тогда закон Кулона примет вид

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

или в векторном виде

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r},$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r},$$

где  $\vec{F}_{12}$  – сила, действующая на заряд  $q_1$  со стороны заряда  $q_2$ ;

$\vec{r}_{12}$  – радиус-вектор, соединяющий заряд  $q_2$  с зарядом  $q_1$ ;

$r = |\vec{r}_{12}|$  (рис. 16.1, а);

$\vec{F}_{21}$  – сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ ;

$\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$  – радиус-вектор, соединяющий заряд  $q_1$  с зарядом  $q_2$  (рис. 16.1, б).

Силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  называются кулоновскими силами.

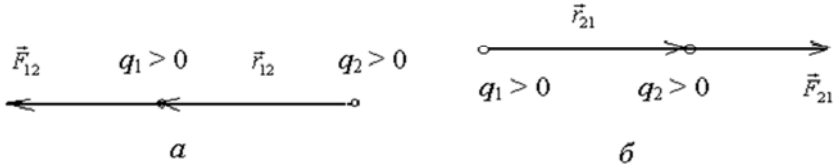


Рис. 16.1. Иллюстрация направления действия кулоновской силы: *а* – направление силы Кулона, действующей на первый заряд со стороны второго; *б* – направление силы Кулона, действующей на второй заряд со стороны первого

Оказывается, что закон Кулона справедлив не только для точечных зарядов, но и для заряженных шаров, если заряды этих шаров равномерно распределены по их поверхностям или объемам, причем радиусы этих шаров могут быть соизмеримы с расстоянием  $r$  между их центрами.

Сравним силу гравитационного и электрического взаимодействия между двумя электронами.

$$F_{\text{грав}} = G \frac{m^2}{r^2}, \quad F_{\text{кул}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг – масса покоя электрона.

Тогда

$$\frac{F_{\text{кул}}}{F_{\text{грав}}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m^2} \approx 4 \cdot 10^{42}.$$

Таким образом, рассматривая явления, протекающие в электрически заряженных системах (атомах, молекулах атомных ядрах), можно полностью пренебречь гравитационными силами, так как по сравнению с электрическими силами эти силы малы по величине. И только для космических тел (планет, звезд), обладающих огромными массами, гравитационные силы начинают играть ведущую роль.

## 16.2. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции для напряженности электростатических полей

Закон Кулона позволяет определить силу взаимодействия между электрическими зарядами, но не объясняет, как взаимодействие передается от одного заряженного тела к другому. опыты показывают, что это взаимодействие наблюдается и тогда, когда заряженные тела находятся в вакууме. Следовательно, для электрического взаимодействия не нужна среда. Взаимодействие между электрическими зарядами, согласно М. Фарадею, объясняется тем, что вокруг каждого электрического заряда существует электрическое поле.

*Электрическое поле* – одна из форм существования материи, посредством которой взаимодействуют заряженные тела. Электрическое поле создается как неподвижными, так и движущимися зарядами. *Электростатическим* называется электрическое поле, создаваемое неподвижными зарядами. Рассмотрим основные характеристики электростатического поля.

Электрическое поле проявляет себя тем, что оказывает силовое воздействие на заряды, помещенные в данное поле. Для исследования электростатического поля используется положительный пробный заряд  $q_{\text{пр}}$ . Пробный заряд должен быть точечным, чтобы величиной своего поля не исказить исследуемое поле.

Пусть электростатическое поле создается зарядом  $q$ , которое по закону Кулона будет действовать на пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  с силой

$$\vec{F} = k \frac{qq_{\text{пр}}}{r^3} \vec{r},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от заряда  $q$  к заряду  $q_{\text{пр}}$ .

Тогда

$$\frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (16.2)$$

Из формулы (16.2) видно, что отношение  $\frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}$  зависит только от величины заряда  $q$  и радиус-вектора  $\vec{r}$ , определяющих поле

в данной точке пространства, и не зависит от величины пробного заряда, вносимого в поле.

Отношение  $\frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}$  является силовой характеристикой поля и называется напряженностью электростатического поля.

**Напряженность электростатического поля  $\vec{E}$**  – векторная величина, численно равная отношению силы, действующей на пробный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}. \quad (16.3)$$

Из формул (16.2) и (16.3) следует, что вектор напряженности поля точечного заряда  $q$  определяется выражением

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r},$$

или в скалярном виде

$$E = k \frac{|q|}{r^2}.$$

Если поле создается системой неподвижных точечных зарядов  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ , то результирующая сила  $\vec{F}$ , действующая на пробный заряд  $q_{\text{пр}}$  в любой точке рассматриваемого поля, равна векторной сумме сил  $\vec{F}_i$ , приложенных к заряду  $q_{\text{пр}}$  со стороны каждого из зарядов  $q_i$ , то есть

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

так как кулоновская сила взаимодействия не зависит от присутствия других заряженных тел.

Поскольку  $\vec{F} = q_{\text{пр}}\vec{E}$ ,  $\vec{F}_i = q_{\text{пр}}\vec{E}_i$ , где  $\vec{E}$  – вектор напряженности результирующего поля,  $\vec{E}_i$  – вектор напряженности поля, создаваемого зарядом  $q_i$ , приходим к выводу, что для напряженности электростатического поля, созданного системой из  $N$  неподвижных зарядов, справедлив **принцип суперпозиции электростатических полей: вектор напряженности электростатического поля системы неподвижных зарядов равен векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом системы в отдельности**

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i,$$

где  $N$  – число дискретных зарядов в системе;

$\vec{E}_i$  – вектор напряженности поля  $i$ -го заряда.

Если электрический заряд распределен непрерывно в каком-либо объеме  $V$ , то следует ввести объемную плотность электрических зарядов  $\rho$ . Подобно плотности вещества, плотность электрического заряда определяется как количество заряда, приходящегося на единицу объема. Заряд, находящийся в элементе объема  $dV$  и равный  $dq = \rho dV$ , можно считать точечным. Он создает в какой-либо точке пространства электрическое поле  $d\vec{E}$ . Результирующий вектор напряженности электрического поля в данной точке будет равен геометрической сумме всех  $d\vec{E}$  или интегралу по объему

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E}, \quad (16.4)$$

где интегрирование производится по всем непрерывно распределенным источникам полей.

Если заряд непрерывно распределен по поверхности, то вводят поверхностную плотность заряда  $\sigma = \frac{dq}{dS}$ . Следовательно, на элементе поверхности сосредоточен заряд  $dq = \sigma dS$ , который можно



считать точечным. Этот заряд создает поле  $d\vec{E}$ . Результирующий вектор напряженности электрического поля в какой-либо точке равен интегралу по поверхности

$$\vec{E} = \int_S d\vec{E}. \quad (16.5)$$

где  $S$  – площадь поверхности, на которой находится заряд.

Формулы (16.4) и (16.5) представляют принцип суперпозиции электрических полей для зарядов, распределенных по объему и поверхности.

Изображать электростатическое поле с помощью векторов напряженности  $\vec{E}$  неудобно, поскольку векторы  $\vec{E}$  будут накладываться друг на друга и получится весьма запутанная картина. Более наглядным методом изображения электростатических полей является использование силовых линий.

**Силовой линией (линией напряженности)** называется линия, касательная к которой в каждой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$ . Силовые линии не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор  $\vec{E}$  имеет только одно определенное направление. За положительное направление силовой линии условилось считать направление самого вектора  $\vec{E}$ . При таком соглашении можно сказать, что электрические силовые линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных.

На рис. 16.2 изображены картины плоских сечений электростатических полей положительного (рис. 16.2, *a*) и отрицательного (рис. 16.2, *б*) точечных зарядов, а также двух одинаковых по модулю одноименных (рис. 16.2, *в*) и двух одинаковых по модулю разноименных зарядов (рис. 16.2, *г*).

Густота силовых линий выбирается так, чтобы количество линий, проходящих через поверхность единичной площадки, ориентированной перпендикулярно к линиям, было численно равно модулю вектора напряженности в данной точке поля.

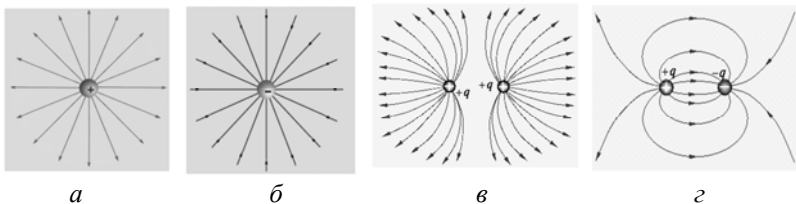


Рис. 16.2. Картины плоских сечений электростатических полей:  
*a* – положительного точечного заряда; *б* – отрицательного точечного заряда;  
*в* – двух одинаковых по модулю положительных зарядов; *г* – двух одинаковых по модулю разноименных зарядов

Для точечного заряда густота линий (модуль вектора  $\vec{E}$ ) численно равна  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$ . Тогда полное число силовых линий, пересекающих сферическую поверхность произвольного радиуса  $r$ , в центре которой расположен заряд  $q$ , будет равно произведению густоты линий на площадь поверхности сферы  $4\pi r^2$ :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (16.6)$$

Результат говорит о том, что число силовых линий электростатического поля точечного заряда на произвольном расстоянии  $r$  от него одинаково и не зависит от  $r$ . Следовательно, силовые линии, начавшись на положительном заряде, уходят в бесконечность и, приходя из бесконечности, заканчиваются на отрицательном заряде.

Данное свойство силовых линий вектора  $\vec{E}$  является общим для всех электростатических полей, создаваемых любой системой неподвижных зарядов: **линии напряженности могут начинаться или заканчиваться только на зарядах либо уходить в бесконечность.**

**Однородным** называется электростатическое поле, в котором вектор напряженности  $\vec{E}$  в любой точке поля одинаков по величине и направлению.

Однородное поле изображается параллельными линиями, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга, направление

которых совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$ . Таково поле плоского конденсатора бесконечной длины (рис. 16.3)

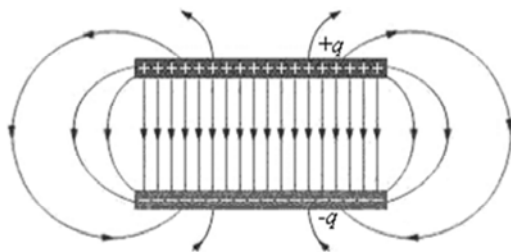


Рис. 16.3. Силовые линии плоского конденсатора

### 16.3. Поток вектора напряженности для электрического поля в вакууме. Теорема Гаусса

Рассмотрим поверхность, ограниченную контуром и помещенную в однородное электростатическое поле  $\vec{E}$ . Выбор поверхности и ее ориентация в пространстве определяется единичным вектором нормали  $\vec{n}$ , проведенным к данной поверхности. Тогда ориентированную элементарную площадь поверхности  $d\vec{S}$  можно представить как

$$d\vec{S} = \vec{n}dS .$$

Элементарным потоком вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  через элементарную площадку называется скалярное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}$

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} = EdS \cos \alpha ,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором нормали  $\vec{n}$  к поверхности и вектором напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  (рис. 16.4).

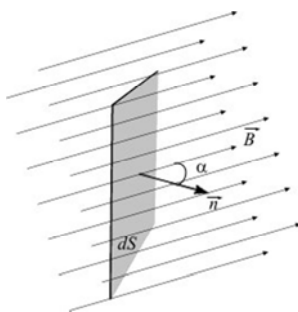


Рис. 16.4. Определение ориентации элемента поверхности  $dS$  в электростатическом поле

Выбор направления вектора  $\vec{n}$  условный, так как его можно направить в любую сторону. Единицей потока вектора напряженности электростатического поля является В·м.

Для произвольной замкнутой поверхности  $S$  поток вектора  $\vec{E}$  сквозь эту поверхность равен

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS,$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности  $S$ .

Поток  $\Phi_E$  является алгебраической величиной, он зависит как от конфигурации поля  $\vec{E}$ , так и от выбора направления  $\vec{n}$ . Для замкнутой поверхности за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, то есть нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью. Поэтому пересечения линий напряженности с замкнутой поверхностью, которые выходят из поверхности, следует брать со знаком плюс (угол  $\alpha$  – острый) и со знаком минус, если линии  $\vec{E}$  входят внутрь (угол  $\alpha$  – тупой).

Из рис. 16.5 видно, если линии  $\vec{E}$  проходят внутри замкнутой поверхности непрерывно, каждая линия, пересекая поверхность, входит внутрь и выходит наружу одинаковое число раз. В итоге поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность будет равным нулю.

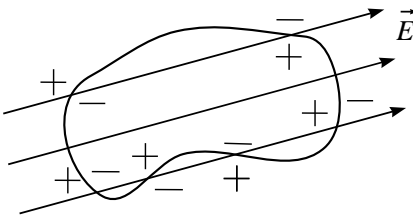


Рис. 16.5. Определение потока вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность

Таким образом, полный поток  $\Phi_E$  через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = N_{\text{вых}} - N_{\text{вх}},$$

где  $N_{\text{вых}}$  и  $N_{\text{вх}}$  – число силовых линий, выходящих и входящих в замкнутую поверхность, соответственно.

Возьмем положительный заряд  $q$  и окружим его замкнутой поверхностью  $S$  произвольной формы (рис. 16.6).

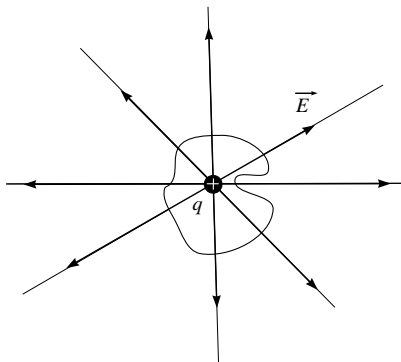


Рис. 16.6. Картина линий напряженности положительного точечного заряда

Согласно формуле (16.6) поток

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (16.7)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда.

Пусть внутри замкнутой поверхности находится  $N$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . В силу принципа суперпозиции вектор напряженности результирующего поля

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i,$$

поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left( \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}. \quad (16.8)$$

Каждый из интегралов в выражении (16.7), согласно (16.8), равен  $\frac{q_i}{\epsilon_0}$ . Следовательно,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (16.9)$$

Соотношение (16.9) выражает суть **теоремы Гаусса**: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ .

## 16.4. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженности электростатических полей

Расчет электростатических полей, основанный на принципе суперпозиции, достаточно сложен, хотя с его помощью можно рассчитать поле любой системы зарядов. В ряде случаев значительно более простым оказывается метод, основанный на применении теоремы Гаусса. Особенно удобен этот метод для симметричного расположения зарядов. Рассмотрим несколько примеров.

### Пример 1. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Заряд равномерно сосредоточен в тонком поверхностном слое тела с поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

где  $dS$  – бесконечно малый участок поверхности, на котором сосредоточен заряд  $dq$ . Линии напряженности представляют собой перпендикулярные к плоскости прямые линии, густота которых, вследствие равномерного распределения заряда, всюду одинакова. На участке поверхности  $\Delta S$  (рис. 16.7) сосредоточен заряд  $\Delta q = \sigma \Delta S$ .

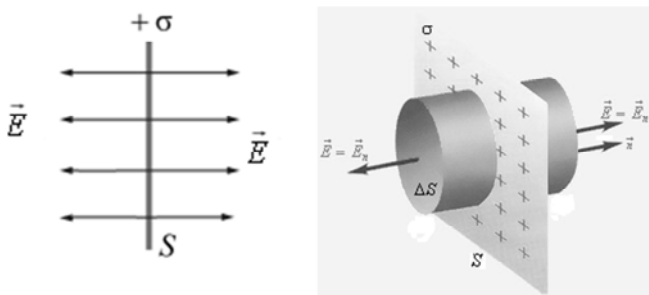


Рис. 16.7. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Выберем поверхность интегрирования в теореме Гаусса в виде цилиндра, основания  $S_1$  которого симметричны относительно заряженной плоскости. Тогда полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания и боковую поверхность

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 2 \int_{S_1} E dS \cos(\vec{E} \hat{n}) + \int_{S_2} E dS \cos(\vec{E} \hat{n}) = 2ES_1 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0},$$

где  $S_1$  – площадь основания;

$S_2$  – площадь боковой поверхности.

Второй интеграл (по боковой поверхности) будет равен нулю,

так как  $\cos(\vec{E} \hat{n}) = 0$ .

Таким образом,

$$2ES_1 = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0}.$$

Откуда находим

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (16.10)$$

где  $\sigma$  – модуль поверхностной плотности заряда.

Формула (16.10) позволяет вычислить напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости. Из полученной формулы (16.10) следует, что модуль напряженности электростатического поля **равномерно заряженной плоскости не зависит от расстояния и на любых расстояниях одинаков. Следовательно, поле равномерно заряженной плоскости однородно.**

**Пример 2. Поле двух разноименно равномерно заряженных бесконечных плоскостей.**

Две параллельные бесконечные плоскости заряжены равномерно с одинаковой поверхностной плотностью  $+\sigma$  и  $-\sigma$  (рис. 16.8).

Каждая из плоскостей создает однородное поле, напряженность которого определяется формулой (16.10). Из рис. 16.8 видно, что вне плоскостей результирующая напряженность поля равна нулю.

В пространстве между плоскостями напряженности поля имеют одинаковые направления, следовательно, их геометрическая сумма является их арифметической суммой:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

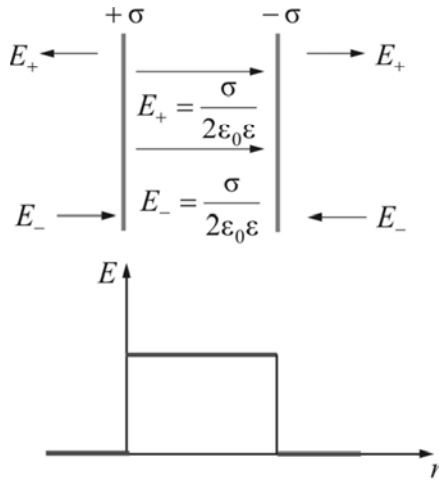


Рис. 16.8. Поле разноименно равномерно заряженных плоскостей

**Электростатическое поле двух разноименно равномерно заряженных плоскостей однородно и сосредоточено в зазоре между плоскостями.**

**Пример 3. Поле сферы, равномерно заряженной по поверхности.**

Предположим, что заряд  $q$  равномерно распределен по сферической поверхности радиуса  $R$ . Электрическое поле центрально симметрично относительно центра сферы. Вектор напряженности поля имеет только радиальную составляющую. Поэтому за гауссову поверхность  $S$  следует взять сферу радиуса  $r$ . Тогда

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E dS \cos(\hat{E} \hat{n}) = E \int_0^{4\pi r^2} dS = E 4\pi r^2. \quad (16.11)$$

Вследствие центральной симметрии электрического поля угол между  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$  равен нулю.

Если  $r \geq R$ , то заряд, охватываемый поверхностью сферы  $S$ , будет равен  $q$  и, учитывая (16.11), по теореме Гаусса будем иметь

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



Откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (16.12)$$

где  $r$  – расстояние от центра заряженной сферы до точки пространства, в которой вычисляется напряженность поля.

График зависимости напряженности  $E$  от расстояния  $r$  для равномерно заряженной сферы изображен на рис. 16.9. Если  $r < R$ , то заряд, охватываемый сферой, равен нулю и внутри заряженной сферы поля нет, то есть  $E = 0$ .

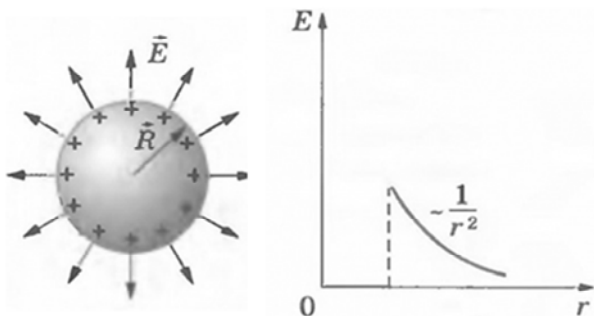


Рис. 16.9. График зависимости  $E$  от  $r$  для однородно заряженной сферы

#### Пример 4. Поле объемно заряженного шара.

Шар радиуса  $R$  имеет заряд  $q$  и заряжен равномерно с объемной плотностью  $\rho = \frac{dq}{dV}$ . В этом случае также имеет место центральная симметрия, то есть центр шара является центром симметрии поля. Поэтому для гауссовой поверхности  $S$  в виде сферы радиуса  $r$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E4\pi r^2. \quad (16.13)$$

Если  $r \geq R$ , то заряд, охватываемый сферой, будет равен  $q$  и тогда, используя (16.13) и теорему Гаусса, получим

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Если  $r < R$ , то заряд, охватываемый сферой радиуса  $r$ , будет равен  $\rho \frac{4}{3}\pi r^3$ . Учитывая, что  $\rho = q \frac{4}{3}\pi R^3$ , из (16.12) для напряженности поля внутри шара получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r.$$

График зависимости  $E$  от  $r$  для этого примера показан на рис. 16.10.

Из рис. 16.10 видно, что напряженность поля внутри объемно заряженного шара растет с увеличением расстояния от его центра линейно.

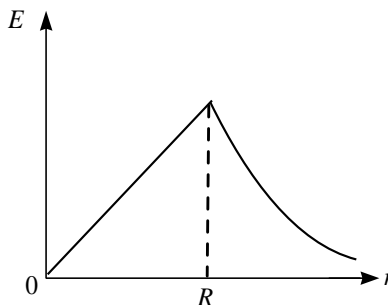


Рис 16.10. График зависимости  $E$  от  $r$  для объемно заряженного шара

## 16.5. Работа при перемещении заряда в электростатическом поле.

### Потенциал электростатического поля.

#### Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

Вычислим работу по перемещению точечного заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле, созданном зарядом  $q$ . Положение точек 1 и 2 определяется радиус-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , а мгновенное положение заряда  $q_0$  – радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 16.11).

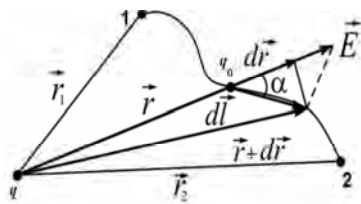


Рис. 16.11. Перемещение точечного заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 в поле заряда  $q$

При перемещении заряда  $q_0$  в любой точке траектории на него действует сила Кулона

$$\vec{F} = k \frac{q_0 q}{r^3} \vec{r}.$$

Элементарная работа этой силы при перемещении заряда  $q_0$  на элементарном перемещении  $d\vec{l}$ :

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = k \frac{q_0 q}{r^3} \vec{r} d\vec{l} = k \frac{q_0 q}{r^3} r dl \cos \alpha.$$

Из рис. 16.11 видно, что проекция  $d\vec{l}$  на направление силы равна  $dl \cos \alpha = dr$ . Тогда элементарная работа

$$dA = k \frac{q_0 q}{r^2} d\vec{r}.$$

Работа при перемещении заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = k q_0 q \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = k q_0 q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (16.14)$$

Из формулы (16.14) следует, что работа сил поля по перемещению точечного заряда  $q_0$  из одной точки электростатического поля в другую не зависит от формы траектории, а зависит от начального и конечного положения заряда  $q_0$ . Поэтому при перемещении заряда  $q_0$  по замкнутой траектории работа сил электростатического поля будет равна нулю. Следовательно, электростатическое поле является потенциальным, а сила Кулона – консервативной.

Доказанное справедливо для электрического поля любой системы неподвижных точечных зарядов. Это непосредственно следует из принципа суперпозиции электрических полей и из известного в механике принципа независимости действия сил.

Из механики известно, что работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии

$$A = -(W_{p_2} - W_{p_1}). \quad (16.15)$$

Сравнивая соотношения (16.14) и (16.15) можно записать выражение для потенциальной энергии точечного заряда в электростатическом поле

$$W_p = k \frac{q_0 q}{r}.$$

В одной и той же точке электростатического поля разные заряды  $q_0$ , вносимые в поле, будут обладать различной потенциальной энергией  $W_p$ . При этом отношение  $\frac{W_p}{q_0} = k \frac{q}{r}$  не зависит от величины заряда  $q_0$ , вносимого в поле, а определяется только зарядом  $q$ , создающим поле, и расстоянием  $r$  от него. Это отношение называется потенциалом. Потенциал является энергетической скалярной характеристикой электростатического поля.

**Потенциалом  $\phi$  электростатического поля** называется скалярная величина, численно равная потенциальной энергии пробного точечного электрического заряда, помещенного в рассматриваемую точку поля, к величине этого заряда  $q_0$

$$\phi = \frac{W_p}{q_0}. \quad (16.16)$$

Единицей измерения потенциала является вольт (В):  $1\text{В} = 1\text{Дж}/1\text{Кл}$ .

При малом перемещении  $d\vec{r}$  точечного заряда  $q_0$  работа, выполняемая силами электростатического поля, совершается за счет убыли потенциальной энергии  $W_p$  заряда в рассматриваемом поле:

$$dA = q_0 \vec{E} d\vec{r} = -dW_p.$$

Для системы из  $N$  точечных зарядов

$$dW_p = -q_0 \sum_{i=1}^N \vec{E}_i d\vec{r} = -q_0 \sum_{i=1}^N \vec{E}_i d\vec{r}_i, \quad (16.17)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор заряда  $q_0$ ;

$\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{R}_i$ ,  $\vec{R}_i$  – радиус-вектор точки, в которой находится заряд  $q_i$  (рис. 16.12). Используя выражение для напряженности поля точечного заряда и формулу (16.17), запишем

$$dW_p = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i d\vec{r}_i = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} dr_i.$$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$W_p = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} + C, \quad (16.18)$$

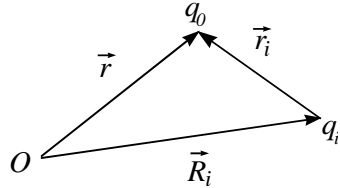


Рис. 16.12. Векторы, определяющие положение заряда  $q_0$  относительно заряда  $q_i$

где  $C$  – произвольная постоянная интегрирования. Ее значение зависит от выбора начала отсчета потенциальной энергии заряда  $q_0$  в электростатическом поле. На бесконечности ( $\vec{r}_i \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия заряда  $q_0$  равна нулю, тогда в (16.18) постоянная  $C = 0$ :

$$W_p = q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

Подставляя полученное выражение в (16.16), получаем

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i},$$

где  $\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$  – потенциал поля точечного  $i$ -го заряда.

Таким образом, для потенциала справедлив принцип суперпозиции: потенциал электростатического поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом системы в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i.$$

На основании (16.15) и (16.16) можно записать выражение для работы, совершаемой силами электростатического поля по перемещению точечного заряда  $q_0$  из точки поля с потенциалом  $\varphi_1$  в точку с потенциалом  $\varphi_2$ :

$$A = -q_0(\varphi_2 - \varphi_1) = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (16.19)$$

или для бесконечно малого перемещения

$$dA = -q_0 d\varphi.$$

Из выражения (16.19) вытекает **физический смысл разности потенциалов: разность потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) между двумя точками электростатического поля численно равна работе, которую совершают силы электростатического поля по перемещению единичного точечного заряда из одной точки поля в другую.**

На бесконечности потенциал принимается равным нулю ( $\varphi_\infty = 0$ ). Тогда из (16.19) следует, что

$$A_{1\infty} = q_0(\varphi_1 - \varphi_\infty) = q_0(\varphi_1 - 0) = q_0\varphi_1. \quad (16.20)$$

Выражение (16.20) позволяет дать еще одно определение потенциала: **потенциал  $\varphi$  электростатического поля численно равен работе, которую совершает поле при перемещении единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность**

$$\varphi = \frac{A_{1\infty}}{q_0}.$$

Работа по перемещению заряда в электростатическом поле с одной стороны может быть вычислена по формуле (16.19), с другой стороны эта работа равна

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l}.$$

С учетом того, что

$$\vec{F} = q_0 \vec{E},$$

получаем

$$q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 q_0 \vec{E} d\vec{l}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (16.21)$$

Формула (16.21) устанавливает связь разности потенциалов  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  между двумя точками электростатического поля с вектором напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ .

Одним из понятий векторного анализа полей является понятие циркуляции. **Циркуляцией** вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  называется криволинейный интеграл вида  $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ .

Если контур замкнут, то точки 1 и 2 совпадают, следовательно,  $\varphi_1 = \varphi_2$  и интеграл в выражении (16.21) будет равен нулю. Для электростатических полей справедлива **теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$ : циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру  $L$  равна нулю**

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (16.22)$$

Теорема о циркуляции устанавливает необходимое и достаточное условие потенциальности электростатического поля.

Теперь можно потенциальность электростатического поля определить по-другому: векторное поле  $\vec{E}$  называется потенциальным, если циркуляция вектора  $\vec{E}$  по любому замкнутому контуру равна нулю. Уравнение (16.22) является фундаментальным уравнением электростатики.

Из уравнения (16.22) следует, что силовые линии электростатического поля не могут быть замкнутыми. Предположим противное, то есть пусть силовая линия замкнута. Возьмем ее в качестве контура интегрирования  $L$  в (16.22). При обходе этого контура в положительном направлении силовой линии подынтегральное выражение в интеграле  $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ , а с ним и сам интеграл, положительны, поскольку векторы  $\vec{E}$  и  $d\vec{l}$  совпадают по направлению. А это противоречит уравнению (16.22), что и доказывает наше утверждение.

### 16.6. Связь напряженности поля и потенциала

Электростатическое поле можно описать либо с помощью вектора напряженности  $\vec{E}$ , либо с помощью скалярной величины – потенциала  $\phi$ . Очевидно, что эти величины должны быть как-то связаны друг с другом.

Выберем в пространстве, где есть электростатическое поле, произвольное направление  $\vec{l}$  (рис. 16.13).

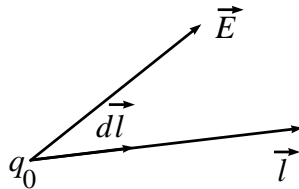


Рис. 16.13. Перемещение заряда  $q_0$  в поле с напряженностью  $\vec{E}$  вдоль направления  $\vec{l}$

При перемещении точечного заряда  $q_0$  вдоль этого направления на  $d\vec{l}$  силы поля совершают над ним работу

$$dA = q_0 \vec{E} d\vec{l} = q_0 E_l dl,$$

где  $E_l$  – проекция  $\vec{E}$  на направление  $\vec{l}$ .



С другой стороны

$$dA = -q_0 d\varphi = -q_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) dl$$

(здесь написана частная производная, так как  $\varphi$  изменяется не только при перемещении вдоль направления  $\vec{l}$ , но также и при перемещении в других направлениях). Если приравнять оба выражения для работы, то получим

$$q_0 E_l dl = -q_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) dl.$$

Откуда следует, что

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}.$$

Таким образом, **проекция  $\vec{E}$  на направление  $\vec{l}$  равна скорости убывания потенциала при перемещении вдоль этого направления.**

Если взять в качестве направления  $l$  координатные оси  $x, y, z$ , получим выражение для компонент вектора  $\vec{E}$ :

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (16.23)$$

С учетом (16. 23) выражение для  $\vec{E}$  имеет вид

$$\vec{E} = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right), \quad (16.24)$$

или

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi.$$

**Градиент потенциала** ( $\text{grad } \varphi$ ) есть вектор, направленный в сторону максимально быстрого возрастания потенциала  $\varphi(x, y, z)$ . Мо-

доль градиента показывает быстроту изменения потенциала в этом направлении.

Знак минус в (16.24) говорит о том, что вектор  $\vec{E}$  и  $\text{grad } \varphi$  направлены в противоположные стороны: вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль силовой линии в сторону убывания потенциала  $\varphi$ .

Из формулы (16.24) видно, что напряженность в СИ измеряется в  $1\text{В/м} = 1\text{Н/Кл}$ .

Понятие потенциала электрического поля можно использовать для наглядного представления электрического поля, вводя, наряду с силовыми линиями, так называемые эквипотенциальные поверхности.

**Эквипотенциальной** называют поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, то есть  $\varphi(x,y,z) = \text{const}$ .

Выясним, как ориентированы эквипотенциальные поверхности по отношению к линиям напряженности поля. Для этого воспользуемся теоремой о циркуляции вектора  $\vec{E}$ . Из (16.22) следует, что интеграл по замкнутому контуру равен нулю, если

$$E dl \cos \alpha = 0.$$

В качестве контура интегрирования в (16.22) выбрали контур, лежащий на эквипотенциальной поверхности. Так как  $E$  и  $dl$  не могут быть равны нулю, то данное равенство будет выполняться только в том случае, если  $\cos \alpha = 0$ . Тогда угол  $\alpha$  между вектором  $\vec{E}$  и эквипотенциальной поверхностью должен быть равным  $\pi/2$ . Следовательно, **вектор  $\vec{E}$  всегда перпендикулярен к эквипотенциальным поверхностям, а силовые линии напряженности перпендикулярны к ним.** Именно так построены эквипотенциальные поверхности электростатического поля точечного заряда (рис. 16.14).

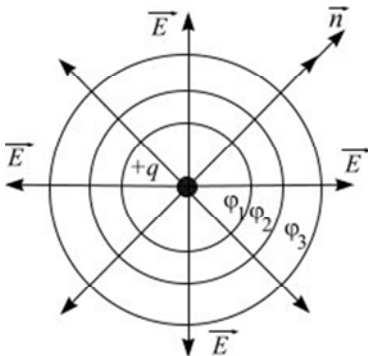


Рис. 16.14. Вид линий сечения сферических эквипотенциальных поверхностей точечного заряда плоскостью чертежа

Эквипотенциальные поверхности точечного заряда представля-

ют собой сферические поверхности разного радиуса. Так как силовые линии ортогональны к ним, то силовые линии направлены вдоль радиусов, продление которых является нормалью к сферической поверхности.

На рис. 16.15 изображено однородное электростатическое поле, созданное разноименно заряженными параллельными плоскостями. Эквипотенциальные поверхности в данном случае – это плоскости, перпендикулярные силовым линиям  $\vec{E}$ . Тогда выражение (16.22) примет вид

$$E_x = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta x}. \quad (16.25)$$

Формула (16.25) показывает, что для однородного электростатического поля модуль вектора напряженности  $\vec{E}$  равен падению потенциала ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) в расчете на единицу длины вдоль силовой линии напряженности.

Используя связь напряженности поля и потенциала, можно легко найти потенциал или разность потенциалов.

Для **бесконечной равномерно заряженной плоскости** напряженность поля определяется формулой (16.10). Поскольку  $\vec{E}$  изменяется только в одном направлении (примем это направление за направление оси  $Ox$ ), то  $\vec{E} = E_x \vec{i}$ ,  $E_y = E_z = 0$ . Поэтому, согласно формуле (16.23), для этого случая запишем

$$-\frac{d\varphi}{dx} = E_x,$$

$$d\varphi = -E_x dx.$$

После интегрирования (16.25) по  $\varphi$  от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$  и по координате  $x$  от  $x_1$  до  $x_2$  и использования (16.10), получим

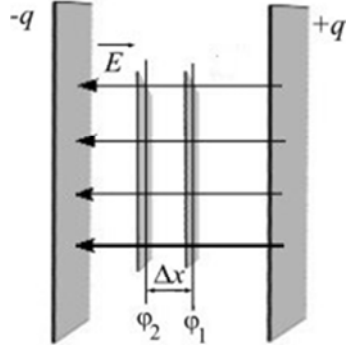


Рис. 16.15. Однородное электростатическое поле двух разноименно заряженных параллельных плоскостей

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -E_x(x_2 - x_1)$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1).$$

Потенциал **равномерно заряженной по поверхности сферы** вычисляется аналогично с использованием формулы (16.12). Поскольку поле в этом случае центрально симметрично, то

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

$$-\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad d\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr.$$

Интегрируя последнее выражение

$$\int_{\varphi}^0 d\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2},$$

получаем

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \text{при } r > R. \quad (16.26)$$

В своих рассуждениях мы полагали, что нулевой уровень потенциала находится на бесконечности ( $\varphi(\infty) = 0$ ). При  $r < R$  замкнутая гауссова поверхность не будет содержать внутри себя зарядов и, следовательно, напряженность  $\vec{E}$  поля внутри сферической оболочки равна нулю. Из условия  $E = -\frac{d\varphi}{dr} = 0$  следует, что внутри сферы потенциал поля  $\varphi$  равен некоторой константе. Поскольку потенциал  $\varphi$  непрерывен, то значение этой константы определяется выражением (16.26) при  $r = R$  и тогда

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \text{const } r \leq R.$$

Таким образом, потенциал равномерно заряженной по поверхности сферы внутри сферы является постоянной величиной во всех точках сферы, а его величина зависит от радиуса и заряда сферы.

## 16.7. Поле электрического диполя

**Электрическим диполем** называется система одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных зарядов, расстояние  $l$  между которыми мало по сравнению с расстоянием до тех точек, в которых рассматривается поле системы. Прямая, проходящая через оба заряда, называется **осью диполя**. Ориентацию оси диполя в пространстве можно задать с помощью вектора  $\vec{l}$ , проведенного от отрицательного заряда к положительному. Произведение положительного заряда диполя  $q$  на плечо  $\vec{l}$  называется **электрическим моментом диполя** или **дипольным электрическим моментом**:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad [p] = \text{Кл}\cdot\text{м}.$$

Вектор  $\vec{p}$  совпадает по направлению с плечом диполя.

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность  $\vec{E}$  поля диполя в произвольной точке равна векторной сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-.$$

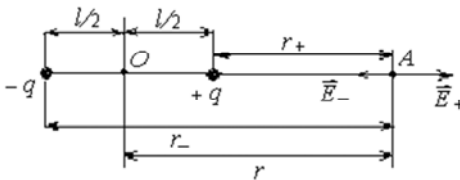


Рис. 16.16. К выводу формулы для напряженности поля диполя в точке, лежащей на его оси

Найдем напряженность поля  $\vec{E}$  в точке A, расположенной на оси диполя (рис. 16.16). Положение точки A будем задавать по отношению к центру O диполя. Так как векторы напряженностей  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  противоположно направлены (см. рис. 16.16), то модуль их результирующей равен разности

равно направленных векторов  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$ .

$$E = E_+ - E_-.$$

Тогда для напряженности  $\vec{E}$  в точке  $A$ , расположенной на оси диполя, получим

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{l} \left[ \frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rql}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}. \quad (16.27)$$

Для диполя выполняется условие:  $r \gg l$ . Тогда приближенное выражение для (16.27) запишем в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{2\vec{p}}{r^3}. \quad (16.28)$$

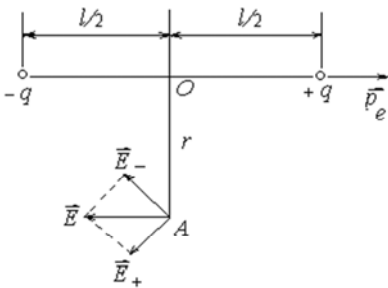


Рис. 16.17. Поле диполя в точке, лежащей на перпендикуляре к оси диполя

Рассмотрим случай, когда точка  $A$ , в которой определяется напряженность поля, лежит на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины (точка  $O$ ) (рис. 16.17). В этой точке

$$|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}.$$

Из рис. 16.17 видно, что

$$|\vec{E}_+ + \vec{E}_-| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q \cos \alpha}{r^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Заметим, что вектор  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$  параллелен электрическому моменту диполя и направлен в противоположную сторону. Так как  $r \gg l$ , то с учетом направлений напряженности поля в точке  $A$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (16.29)$$

Аналогично для произвольной точки  $A$  с полярными координатами  $r$  и  $\alpha$  (рис. 16.18) можно получить

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}. \quad (16.30)$$

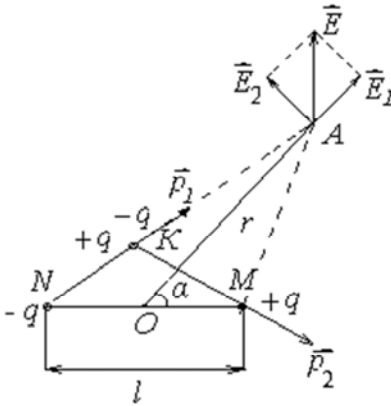


Рис. 16.18. Поле диполя в произвольной точке

Направление  $\vec{E}$  определяется касательной к силовой линии. Формулы (16.28), (16.29) и (16.30) показывают, что напряженность поля диполя во всех случаях пропорциональна электрическому моменту диполя и обратно пропорциональна  $r^3$ .

Получить формулу (16.30) удобнее всего, применив следующий вспомогательный прием. Опустим на прямую  $NA$  перпендикуляр из точки  $M$ , где находится заряд  $+q$  диполя. Далее поместим в точку  $K$  два точечных заряда  $+q$  и  $-q$ , которые нейтрализуют друг друга и не искажают поле диполя. Теперь четыре заряда можно рассматривать как два диполя  $NK$  и  $KM$ . Так как  $r \gg l$ , то  $\angle AMN \approx \alpha$ . Для диполя  $NK$  и  $NM$  модули электрических моментов будут соответственно равны

$$p_1 = ql \cos \alpha = p \cos \alpha;$$

$$p_2 = ql \sin \alpha = p \sin \alpha.$$

Для первого диполя точка  $A$  лежит на его оси, а для второго – на перпендикуляре. Тогда, используя формулы (16.28), (16.29), напряженности  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  для каждого из диполей в точке  $A$  равны

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}_1}{r^3}; \quad \vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_2}{r^3}.$$

Векторы  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  взаимно перпендикулярны, поэтому модуль напряженности поля диполя  $NM$  в точке  $A$

$$E = \sqrt{\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sqrt{(2\vec{p}_1)^2 + (\vec{p}_2)^2}.$$

Используя значения  $p_1$  и  $p_2$ , записанные выше, получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{3\cos^2 \alpha + 1}.$$

Таким образом, мы сделали вывод формулы (16.30). Формула (16.30) охватывает все возможные случаи расположения точки  $A$ . При  $\alpha = 0$  она совпадает с (16.28), а при  $\alpha = \pi/2$  – с формулой (16.29).

### 16.8. Диполь во внешнем электрическом поле

Рассмотрим теперь, как ведет себя диполь во внешнем однородном электрическом поле  $\vec{E}$  (рис. 16.19).

На заряды диполя действуют равные по модулю, противоположно направленные силы  $+q\vec{E}$  и  $-q\vec{E}$ . Эти силы образуют пару, плечо которой равно  $l \sin \alpha$ . Модуль момента пары сил

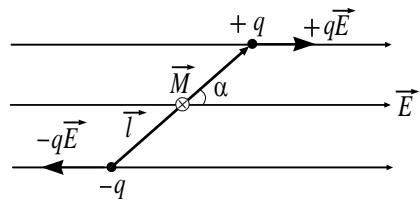


Рис. 16.19. Электрический диполь во внешнем электрическом поле

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha,$$

где  $p = ql$  – модуль электрического момента диполя.



Следовательно, момент пары сил  $\vec{M}$  можно рассматривать как векторную величину, направление которой связано с направлением сил, образующих пару, по правилу буравчика

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (16.31)$$

Таким образом,  $\vec{M}$  перпендикулярен плоскости чертежа и направлен за плоскость рисунка.

Под влиянием пары сил диполь во внешнем однородном поле стремится повернуться вдоль поля.

В неоднородном электрическом поле на диполь, кроме вращающего момента (16.31), действует сила, стремящаяся сообщить ему поступательное движение.

Рассмотрим пример. На рис. 16.20 изображен диполь, находящийся в поле точечного положительного заряда. Пунктирными линиями со стрелками изображены некоторые из линий напряженности. Пусть диполь будет ориентирован по полю. Сила, действующая на положительный заряд диполя, будет меньше силы, действующей на отрицательный заряд, и поэтому диполь будет втягиваться в область более сильного поля (рис. 16.20, *a*).

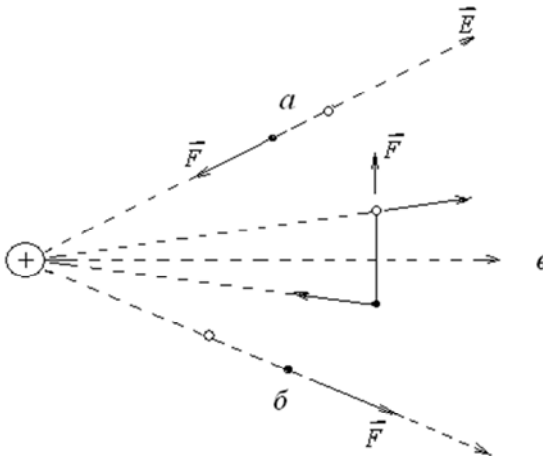


Рис.16.20. Диполь в поле точечного положительного заряда (белый кружок – положительный заряд диполя, черный – отрицательный заряд):  
*a* – диполь, ориентированный по полю; *b* – диполь, ориентированный против поля;  
*v* – диполь, ориентированный перпендикулярно линиям напряженности

Для диполя, ориентированного против поля (рис. 16.20, б), суммарная сила, действующая на диполь, будет выталкивать его из поля.

Для диполя, ориентированного перпендикулярно силовым линиям неоднородного поля, сила будет направлена вдоль оси диполя (рис. 16.20, в).

Таким образом, неоднородное поле стремится вызвать поступательное и вращательное движение диполя.

### 16.9. Потенциальная энергия диполя в электростатическом поле

Рассмотрим энергию диполя во внешнем однородном поле.

Потенциал внешнего поля в месте расположения отрицательного заряда с координатами  $(x, y, z)$  обозначим через  $\varphi_- = \varphi(x, y, z)$ , а потенциал внешнего поля, где расположен отрицательный заряд с координатами  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  обозначим  $\varphi_+ = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ . Здесь  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – проекции плеча диполя на координатный оси.

Потенциал  $\varphi_+$  можно представить как

$$\varphi_+ \cong \varphi_- + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z.$$

Тогда потенциальную энергию диполя запишем следующим образом:

$$W_p = q\varphi_+ + (-q\varphi_-) = q \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z \right).$$

Если учесть, что  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , а плечо диполя  $\vec{l} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$ , то

$$W_p = -q \vec{l} \vec{E} = -\vec{p} \vec{E}. \quad (16.32)$$

Формула (16.32) выражает энергию диполя в однородном электрическом поле. Выражение (16.32) справедливо также и для неоднородного поля.

## 17. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 17.1. Диэлектрики. Свободные и связанные заряды в диэлектриках. Поляризация диэлектриков

В зависимости от концентрации свободных зарядов тела (вещества) делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники. В диэлектриках количество свободных зарядов, то есть ионов и электронов (в единице объема), способных перемещаться в пределах тела, очень малó. Поэтому при внесении диэлектрика в электрическое поле перераспределение этих зарядов не производит заметного эффекта. Существенное значение имеет воздействие электрического поля на связанные заряды, имеющиеся в атомах и молекулах диэлектрика. Связанные заряды отличаются от свободных тем, что они не могут покинуть пределы молекулы (или атома), в состав которой они входят.

Напомним, что *электрический диполь* – это система двух равных по величине разноименных точечных зарядов, расположенных на некотором расстоянии  $l$  друг от друга.

*Плечо диполя*  $\vec{l}$  представляет собой вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному (рис. 17.1, а).

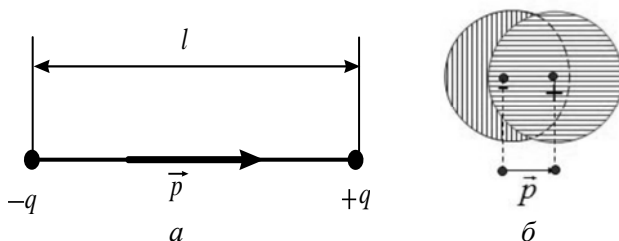


Рис. 17.1. Электрический диполь:

а – плечо диполя; б – электрический (дипольный) момент молекулы

*Произведение*  $q\vec{l}$  называется электрическим моментом диполя или дипольным моментом, то есть

$$\vec{p} = q\vec{l}.$$

В молекулах некоторых диэлектриков ( $H_2$ ,  $N_2$ ,  $CCl_4$ , углеводороды и др.) электроны расположены симметрично вокруг ядер. В этих молекулах «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают, и дипольный момент  $\vec{p}$  молекулы равен нулю. Такие молекулы называются **неполярными**. Состоящие из неполярных молекул диэлектрики также называются неполярными.

Большую группу диэлектриков составляют вещества, в молекулах которых электроны расположены несимметрично относительно ядер. В таких молекулах «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают (рис. 17.1, б), поэтому молекулы этих диэлектриков характеризуются наличием постоянного дипольного электрического момента  $\vec{p}$ , определяемого их структурой. Молекулы указанного типа называются **полярными**. Диэлектрики, состоящие из полярных молекул, называются полярными. Такими диэлектриками являются  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $HCl$ ,  $CH_3Cl$  и другие вещества.

В отсутствие внешнего электрического поля суммарный электрический момент диэлектрика равен нулю, так как дипольные моменты или равны нулю (неполярные), или распределены хаотически (полярные).

Под действием внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется. **Поляризацией диэлектриков** называют такое изменение состояния вещества, при котором любой элемент его объема во внешнем электрическом поле приобретает отличный от нуля электрический дипольный момент.

В неполярной молекуле, помещенной во внешнее электрическое поле, заряды смещаются друг относительно друга: положительные по направлению поля, отрицательные против поля. В результате молекула приобретает электрический дипольный момент. Величина дипольного момента молекулы, как показывает эксперимент, пропорциональна напряженности поля, а именно:

$$\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}, \quad (17.1)$$

Величина  $\beta$  называется **поляризуемостью молекулы**, которая зависит только от ее объема и имеет размерность  $m^3$ .

## 17.2. Виды поляризации

**Электронная поляризация.** Если неполярная молекула (атом) находится во внешнем электрическом поле, то под действием этого поля электронные оболочки атомов немного сдвигаются (рис. 17.2, *a*) относительно ядер. В результате молекула приобретает индуцированный дипольный момент (рис. 17.2, *a*). Эти моменты наводятся в молекулах всегда в направлении действующего электрического поля, поэтому весь диэлектрик приобретает результирующий электрический момент  $\vec{P}$ . Такой вид поляризации часто называют электронной поляризацией.

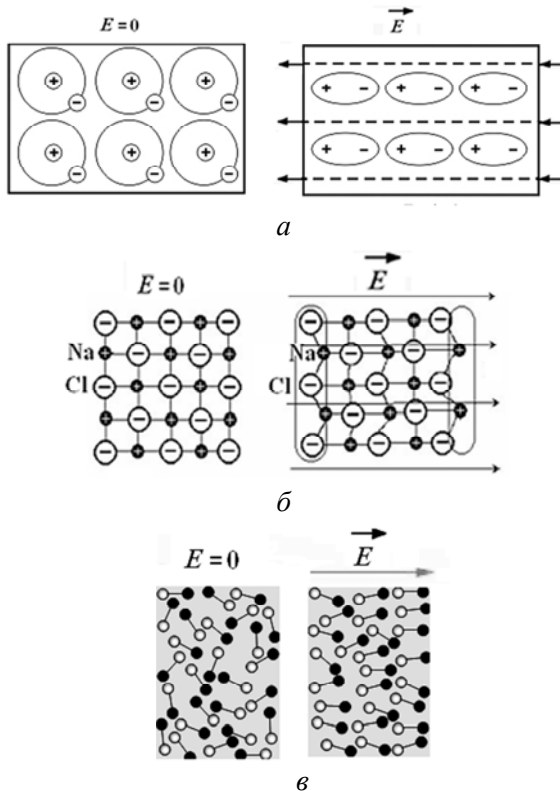


Рис. 17.2. Виды поляризации:

- a* – электронная поляризация в неполярном диэлектрике;
- б* – ионная поляризация в кристаллическом диэлектрике;
- в* – ориентационная поляризация в полярном диэлектрике

**Ионная поляризация.** В кристаллических диэлектриках, имеющих кубические кристаллические решетки (например, NaCl), под действием электрического поля все положительные ионы Na смещаются в направлении напряженности  $\vec{E}$ , а все отрицательные ионы Cl – в противоположном направлении (рис. 17.2, б). На двух противоположных гранях кристалла, перпендикулярных вектору  $\vec{E}$ , будут находиться ионы какого-либо одного знака. Этот вид поляризации называется ионной поляризацией.

**Ориентационная, или дипольная поляризация.** Если диэлектрик полярный, то есть если его молекулы обладают собственным дипольным моментом, то внешнее поле ориентирует их. Дипольные моменты молекул ориентируются преимущественно по направлению  $\vec{E}$ , и диэлектрик приобретает результирующий электрический дипольный момент  $\vec{P}$ , то есть поляризуется (рис. 17.2, в). Чем сильнее внешнее электрическое поле и слабее тепловое движение молекул, то есть ниже температура, тем эта ориентация будет более полной.

**Спонтанная (самопроизвольная) поляризация.** Такой вид поляризации наблюдается у некоторых диэлектриков (сегнетова соль, титанат бария, титанат свинца и многие др.), в объеме которых возникают сравнительно большие поляризованные области, называемые *доменами*. При отсутствии внешнего поля электрические моменты этих доменов ориентированы в объеме диэлектрика беспорядочно, поэтому весь диэлектрик в целом не поляризован. Внешнее поле создает некоторый порядок в ориентациях этих моментов. Такие диэлектрики называются *сегнетоэлектриками*.

### 17.3. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость.

#### Напряженность поля в диэлектрике.

#### Диэлектрическая проницаемость

Количественной мерой поляризации диэлектрика служит вектор поляризации  $\vec{P}$ . **Вектором поляризации**, или **поляризованностью**, называется предел отношения векторной суммы электрических дипольных моментов в физически малом объеме диэлектрика к величине этого объема, когда последний стремится к нулю:

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right), \quad (17.2)$$

где  $N$  – число диполей, содержащихся в объеме  $V$  диэлектрика;

$\vec{p}_i$  – вектор дипольного электрического момента  $i$ -го диполя.

Поскольку в системе СИ единица электрического дипольного момента – 1 Кл·м, то, как следует из выражения (17.2), вектор поляризации (поляризованность) в системе СИ измеряется в Кл/м<sup>2</sup>.

Как показывает эксперимент, у диэлектриков (кроме сегнетоэлектриков) вектор поляризации связан с вектором напряженности внешнего электрического поля простым соотношением

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (17.3)$$

где  $\chi$  – физическая величина, не зависящая от  $\vec{E}$ , которая называется **диэлектрической восприимчивостью** диэлектрика. Диэлектрическая восприимчивость  $\chi$  – величина безразмерная.

Для диэлектриков, состоящих из неполярных молекул, формула (17.3) вытекает из следующих простых соображений. В пределы объема  $\Delta V$  попадает количество молекул, равное  $n\Delta V$ , где  $n$  – число молекул в единице объема. Учитывая, что вектор электрического дипольного момента каждой молекулы определяется выражением (17.1), то для векторной суммы  $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i$  дипольных моментов молекул, заключенных в объеме  $\Delta V$ , имеем

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = n\Delta V \beta \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Разделив последнее выражение на  $\Delta V$ , получим вектор поляризации (поляризованность)

$$\vec{P} = n\beta \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (17.4)$$

Введя обозначение

$$\chi = n\beta,$$

приходим к формуле (17.3).

В случае полярных диэлектриков, а также ионных кристаллов, как показывает эксперимент и соответствующий расчет, вектор поляризации связан с вектором напряженности внешнего электрического поля соотношением (17.3).

Таким образом, **вектор поляризации полярных и неполярных диэлектриков пропорционален вектору напряженности внешнего поляризирующего электрического поля, поэтому эти диэлектрики относятся к классу линейных диэлектриков.**

Для определения поля в диэлектрике внесем пластинку из однородного диэлектрика во внешнее однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$  (рис. 17.3).

Под действием внешнего поля диэлектрик поляризуется. В результате поляризации на правой грани диэлектрика возникает избыток положительного связанного заряда с поверхностной плотностью  $+\sigma'$ , а на левой грани – избыток отрицательного связанного заряда с поверхностной плотностью  $-\sigma'$ . Это, в свою очередь, приведет к появлению в диэлектрике внутреннего электрического поля  $\vec{E}'$ , направленного против внешнего поляризирующего поля  $\vec{E}_0$  (см. рис. 17.3).

Вектор напряженности результирующего электрического поля внутри диэлектрика, согласно принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}',$$

а его модуль, так как векторы  $\vec{E}'$  и  $\vec{E}_0$  противоположно направлены и  $\vec{E}_0 > \vec{E}'$ :

$$E = E_0 - E'.$$

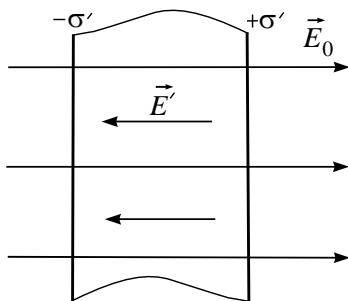


Рис. 17.3. Пластинка диэлектрика во внешнем электрическом поле



Электрическое поле с вектором напряженности  $\vec{E}'$  – это поле связанных зарядов, которое создается двумя заряженными плоскостями с поверхностной плотностью  $\sigma'$

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}.$$

Тогда

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (17.5)$$

Получим связь вектора поляризации с поверхностной плотностью связанных зарядов  $\sigma'$ .

Мысленно в пластинке диэлектрика (см. рис. 17.3) выделим произвольный косоугольный параллелепипед длиной  $l$  и основанием площадью  $\Delta S$  (рис. 17.4). Поверхностный заряд на основании параллелепипеда равен  $\sigma' \Delta S$ . Модуль дипольного момента параллелепипеда обозначим  $d$  (чтобы не было путаницы с модулем элементарного дипольного момента  $p$  молекулы), получим

$$d = \sigma' \Delta S l.$$

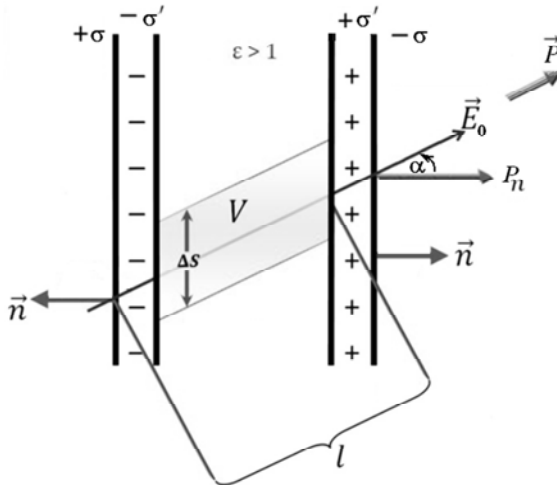


Рис. 17.4. К определению поверхностной плотности связанных зарядов

С другой стороны, из определения вектора поляризации  $P$  дипольный момент параллелепипеда можно выразить, как

$$d = P\Delta V = P\Delta S_{\perp} l = P\Delta S l \cos \alpha,$$

где  $\Delta V$  – объем параллелепипеда;

$\alpha$  – угол между вектором нормали  $\vec{n}$  к положительно заряженному основанию параллелепипеда и вектором поляризации  $\vec{P}$ .

Приравнявая правые части

$$\sigma' \Delta S l = P\Delta S l \cos \alpha,$$

получаем

$$P = \frac{\sigma' \Delta S l}{\Delta V} = \frac{\sigma' \Delta S l}{\Delta S l \cos \alpha} = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}.$$

Тогда поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n.$$

Таким образом, **поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации в данной точке поверхности.**

Для прямоугольного параллелепипеда вектор поляризации совпадает по направлению с вектором нормали, поэтому  $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$ .

Тогда

$$\sigma' = P. \tag{17.6}$$

Подставим равенство (17.6) в выражение (17.5)

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E.$$

Напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (17.7)$$

называется *диэлектрической проницаемостью среды*. Из сказанного следует, что  $\varepsilon$  показывает, во сколько раз внешнее электрическое поле ослабляется диэлектриком.

#### 17.4. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения

Поле вектора поляризации  $\vec{P}$  обладает важным свойством. Оказывается, что поток вектора  $\vec{P}$  сквозь произвольную поверхность  $S$  равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объеме, охватываемом поверхностью  $S$

$$\oint_S P_n dS = -q_{\text{связ}}, \quad (17.8)$$

где  $P_n$  – проекция вектора  $\vec{P}$  на нормаль  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ .

Поскольку источником поля  $\vec{E}$  в диэлектрике являются и свободные, и связанные заряды, то теорему Гаусса для поля  $\vec{E}$  можно записать так

$$\varepsilon_0 \oint_S E_n dS = q_{\text{своб}} + q_{\text{связ}}.$$

Учитывая (17.8), получим

$$\oint_S (\varepsilon_0 E_n + P_n) dS = q_{\text{своб}}. \quad (17.9)$$

Величину, стоящую в скобках, обозначают через  $D_n$ .  $D_n$  – проекция некоторого вектора  $\vec{D}$  на нормаль  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ , названного вектором электрического смещения.

*Вектором электрического смещения* называется физическая величина, определяемая соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (17.10)$$

Подставляя в (17.10) выражение (17.3) и учитывая (17.7), получаем

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}.$$

Следовательно,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

где  $\epsilon_0 \epsilon = \epsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Выражение (17.9) можно записать в виде

$$\oint_S \vec{D}_n dS = q_{\text{своб}}. \quad (17.11)$$

Формулы (17.9) и (17.11) выражают **теорему Гаусса для вектора электрического смещения: поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.**

Рассмотрим подробнее, с чем можно связать вектор электрического смещения. Связанные заряды появляются в диэлектрике при наличии внешнего электростатического поля, создаваемого системой свободных электрических зарядов, то есть в диэлектрике на электростатическое поле свободных зарядов накладывается дополнительное поле связанных зарядов.

Результирующее поле в диэлектрике описывается вектором напряженности  $\vec{E}$ , потому вектор напряженности зависит от свойств диэлектрика. Вектором  $\vec{D}$  описывается электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами. Связанные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызвать перераспределение свободных зарядов, создающих поле. Поэтому **вектор  $\vec{D}$  характеризует электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (то есть в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.**

Аналогично, как и поле  $\vec{E}$ , поле электрического смещения,  $\vec{D}$  изображается с помощью силовых линий, направление и густота

которых определяются точно так же, как и для силовых линий напряженности.

Линии вектора  $\vec{E}$  могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах – свободных и связанных, в то время как линии вектора  $\vec{D}$  – только на свободных. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора  $\vec{D}$  проходят, не прерываясь.

### 17.5. Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков

Электрическое поле можно задать, указав для каждой точки величину и направление вектора  $\vec{E}$  (или вектора  $\vec{D}$ ). Очень удобно его описывать с помощью силовых линий вектора напряженности или вектора электрического смещения. Эти линии проводятся так, чтобы касательные к ним в каждой точке совпадали с направлениями соответствующих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ . Густота силовых линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям площадки, было равно численному значению вектора  $\vec{E}$  (вектора  $\vec{D}$ ).

Где бы не находился диэлектрик, его поверхность всегда является границей раздела двух сред: либо диэлектрика и проводника, либо диэлектрика и вакуума, либо диэлектрика и диэлектрика.

Рассмотрим границу двух однородных изотропных и однородно поляризованных диэлектриков. Найдем соотношения между нормальными, а также между тангенциальными (по отношению к поверхности раздела) составляющими векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  в первом и во втором диэлектриках. Построим вблизи границы раздела диэлектриков 1 и 2 тонкий замкнутый прямоугольный контур  $12341$  длины  $l$ , ориентируя его так, как показано на рис. 17.4.

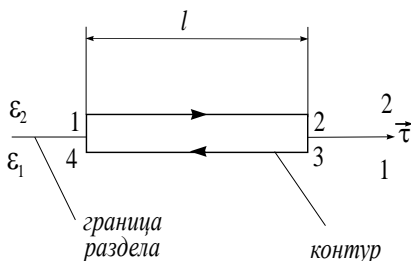


Рис. 17.4. Применение на границе раздела двух диэлектриков теоремы о циркуляции вектора  $\vec{E}$

Согласно теореме о циркуляции вектора  $\vec{E}$

$$\oint_{12341} E_l dl = 0.$$

Тогда  $E_{\tau 2}l - E_{\tau 1}l = 0$  (знаки интегралов по участкам 12 и 34 разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам 23 и 41 ничтожно малы). Поэтому

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (17.12)$$

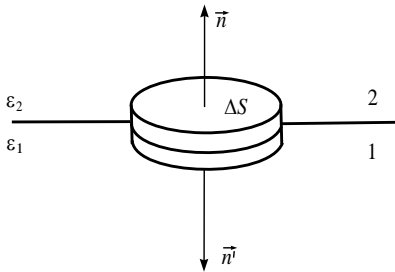
Заменяв проекции вектора  $\vec{E}$  проекциями вектора  $\vec{D}$ , используя соотношение

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

получим

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (17.13)$$

Далее на границе раздела двух диэлектриков 1 и 2 (рис. 17.5) построим прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом диэлектрике, другое – во втором.



Согласно теореме Гаусса

$$D_{n 2} \Delta S - D_{n 1} \Delta S = 0,$$

так как нормали  $\vec{n}$  и  $\vec{n}'$  к основаниям цилиндра направлены противоположно.

Тогда

$$D_{n 1} = D_{n 2}. \quad (17.14)$$

Рис. 17.5. Применение теоремы Остроградского-Гаусса на границе раздела двух диэлектриков

Перейдя от проекции вектора  $\vec{D}$  к проекциями вектора  $\vec{E}$ , получим

$$\frac{E_{n 1}}{E_{n 2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (17.15)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектрических сред тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_\tau$ ) и нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  ( $D_n$ ) изменяются непрерывно (не испытывают скачка), а нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_n$ ) и тангенциальная составляющая вектора  $\vec{D}$  ( $D_\tau$ ) претерпевают разрыв.

Из условий (17.12)–(17.15) для составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  следует, что линии этих векторов испытывают излом (то есть преломляются) (рис. 17.6). Если обозначим через  $\alpha_2$  угол между вектором  $\vec{D}_2$  в диэлектрике 2 с нормалью к границе раздела, а через  $\alpha_1$  – соответствующий угол для вектора  $\vec{D}_1$  в диэлектрике 1, то

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{D_{\tau 2}}{D_{\tau 1}}.$$

Так как  $D_{\tau 2} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{\tau 2}$ ,  $D_{\tau 1} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{\tau 1}$ , а  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ , то окончательно получим

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Эта формула выражает закон преломления линий вектора электрического смещения. Она показывает, что, входя в диэлектрик с бóльшей  $\varepsilon$ , линии  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  удаляются от нормали, проведенной к границе раздела сред.

Закон преломления линий напряженности в изотропных диэлектриках будет, очевидно, таким же, как и закон преломления линий смещения, так как в каждом из диэлектриков направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  совпадают.

Однако картины линий вектора электрического смещения и линий вектора напряженности будут все же различны. Различие заключается в том, что линии вектора смещения непрерывны, в то время как линии вектора напряженности частично прерываются на границе раздела. Для вектора электрического смещения сказанное иллюстрируется на рис 17.6, а; для вектора напряженности электрического поля – на рис 17.6, б. На рис. 17.6 все изображено в соответствии с полученными граничными условиями:

для вектора электрического смещения

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};$$

для вектора напряженности электрического поля

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

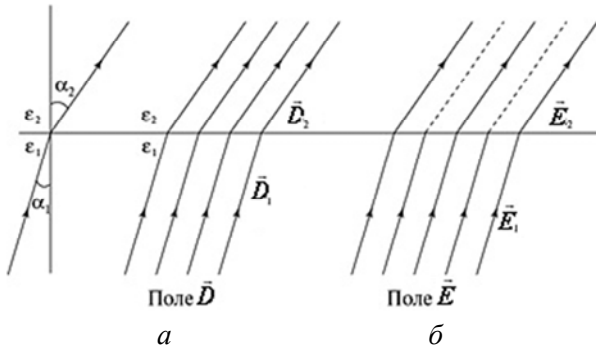


Рис. 17.6. Преломление силовых линий на границе раздела двух диэлектриков: а – вектора электрического смещения  $\vec{D}$ ; б – вектора напряженности  $\vec{E}$

Густота линий напряженности в диэлектрике с бóльшей  $\varepsilon$  меньше, чем в диэлектрике с меньшей  $\varepsilon$ . Отметим еще, что линии смещения в диэлектрике с бóльшей  $\varepsilon$  сгущаются, что указывает на увеличение значения электрического смещения  $D$ .

## 17.6. Сегнетоэлектрики и их свойства

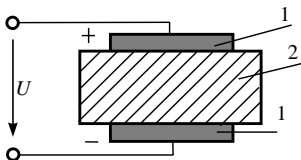


Рис. 17.7. Сегнетоэлектрик 2 между электродами 1

Сегнетоэлектрик в рабочем состоянии находится между металлическими проводниками (контактами) (рис. 17.7), имеющими разные электрические потенциалы, и является средой, в которой действует электрическое поле, создаваемое токопрово-



дящими частями. Как все диэлектрики, сегнетоэлектрик под воздействием внешнего электрического поля поляризуется.

К сегнетоэлектрикам относятся такие вещества, как сегнетова соль  $\text{NaKCl}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , титанат бария  $\text{BaTiO}_3$ , титанат кальция  $\text{CaTiO}_3$ , титанат свинца  $\text{PbTiO}_3$ , титанат лития  $\text{LiTiO}_3$  и др. Сегнетоэлектрики (от названия сегнетовой соли по фамилии синтезировавшего ее П. Сеньета, P. Seignette) обладают электрическими свойствами, отличными от свойств линейных диэлектриков.

**Для линейных диэлектриков**, к которым относятся полярные и неполярные диэлектрики, согласно формуле (17.4), **характерна прямо пропорциональная зависимость величины вектора поляризации от величины напряженности внешнего электрического поля** (рис. 17.8).

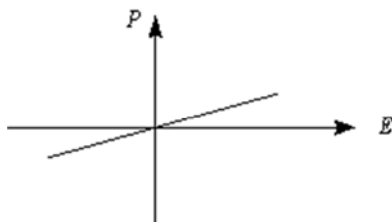


Рис. 17.8. Вид зависимости  $P$  от  $E$  полярных и неполярных диэлектриков

Для сегнетоэлектриков зависимость величины вектора поляризации от напряженности внешнего поляризирующего электрического поля является нелинейной и имеет вид, представленный на рис. 17.9.

Рассмотрим, с чем связан у сегнетоэлектриков такой характер зависимости величины вектора поляризации от напряженности внешнего электрического поля.

**Сегнетоэлектриками** называются диэлектрики, которые в определенном интервале температур обладают спонтанной поляризованностью при отсутствии внешнего электрического поля.

В объеме этих диэлектриков в отсутствии внешнего электрического поля возникают сравнительно большие поляризованные области, называемые доменами (рис. 17.10).

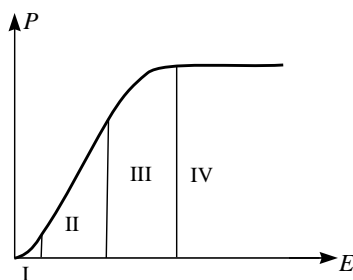


Рис. 17.9. Стадии поляризации сегнетоэлектрика

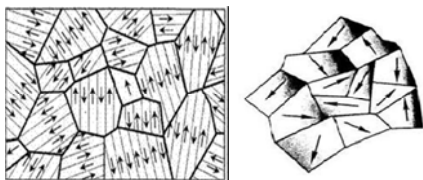


Рис. 17.10. Доменная структура сегнетоэлектрика

*Домены* – это микроскопические области с самопроизвольной однонаправленной поляризацией в пределах одного домена, возникающие под влиянием внутренних процессов в диэлектрике. Направление электрических дипольных моментов у разных доменов различно (см.

рис. 17.10), поэтому суммарная поляризованность сегнетоэлектрика без воздействия внешнего поля в целом по образцу равна нулю. Образец достаточно крупных размеров всегда разбивается на множество доменов, поскольку однодоменное состояние энергетически невыгодно. Установлено, что линейные размеры доменов составляют от  $10^{-3}$  до 1 мм, но могут доходить и до сантиметров.

Спонтанная поляризация сегнетоэлектриков может существенно образом изменяться под влиянием внешних воздействий: электрических полей, давления, температуры и других внешних факторов.

Физическая картина образования доменной структуры у сегнетоэлектриков кислородно-октаэдрического типа, к которому относится, например, титанат бария, описывается теорией локальных минимумов, предложенных Мэзоном и Маттиасом. Суть этой теории заключается в следующем.

Элементарная ячейка титаната бария представляет собой куб (рис. 17.11), в вершинах которого находятся ионы бария  $Ba^{2+}$ , в центрах граней – ионы кислорода  $O^{2-}$ , внутри куба – ион титана  $Ti^{4+}$ . Ион титана располагается в пределах кислородного октаэдра, размеры которого много больше размеров иона титана. Это дает возможность иону титана колебаться, смещаясь к одному из ионов кислорода, и образовывать с ним частично ковалентную связь. Ковалентная связь удерживает ион титана в смещенном состоянии. Поскольку в этом случае центры положительного и отрицательного зарядов не совпадают, возникает электрический дипольный момент элементарной ячейки. Этот момент действует на соседние ионы титана, заставляя их смещаться в том же направлении. В результате появляется область кристалла с одинаково ориентированными электрическими моментами отдельных ячеек (домен). При кристаллизации вещества все шесть возможных направлений смещения иона

титана являются равновероятными, поэтому возникающие домены взаимно уравновешиваются и кристалл в целом не обладает электрическим дипольным моментом.

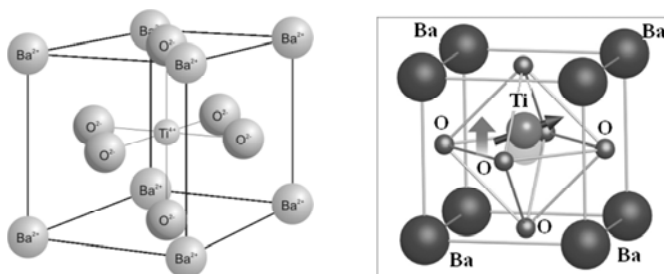


Рис. 17.11. Элементарная ячейка титаната бария

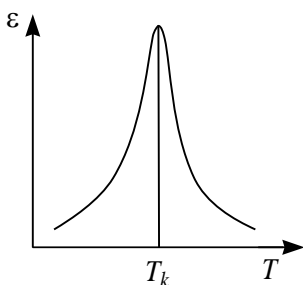


Рис. 17.12. Зависимость диэлектрической проницаемости сегнетоэлектрика от температуры

Доменная структура сегнетоэлектрики разрушается в процессе нагревания до температуры выше некоторой температуры  $T_k$  (рис. 17.12). Температура  $T_k$  называется **температурой Кюри**. **Сегнетоэлектрическая точка Кюри  $T_k$**  – это температура фазового перехода сегнетоэлектрика в состояние, соответствующее полярному диэлектрику.

При температуре Кюри доменные стенки разрушаются, спонтанная поляризация исчезает и направление дипольного момента каждой молекулы зависит от характера ее теплового движения. В точке Кюри диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  достигает своего максимального значения (см. рис. 17.12). Данный фазовый переход обратим: при охлаждении сегнетоэлектрика ниже температуры Кюри он из состояния полярного диэлектрика опять возвращается в состояние сегнетоэлектрика с доменной структурой.

Для многих сегнетоэлектриков зависимость диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  от температуры подчиняется **закону Кюри–Вейсса**:

$$\varepsilon = \frac{C}{T - T_K},$$

где  $C$  – константа.

При температурах выше точки Кюри из-за разрушения доменной структуры сегнетоэлектрика зависимость величины вектора поляризации от значения напряженности внешнего электрического поля  $E$  становится линейной (см. рис. 17.9).

Для сегнетоэлектриков характерно явление диэлектрического гистерезиса. **Диэлектрическим гистерезисом** называется явление отставания изменения поляризованности  $P$  сегнетоэлектрика от изменения напряженности  $E$  внешнего поляризующего поля. Причиной диэлектрического гистерезиса является необратимость процессов смещения доменных границ.

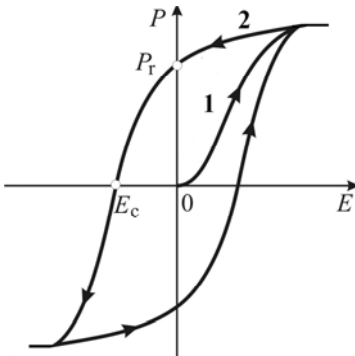


Рис. 17.13. Зависимость поляризованности от напряженности для сегнетоэлектриков (петля гистерезиса)

При циклических изменениях напряженности внешнего электрического поля зависимость величины вектора поляризации  $P$  от поля  $E$  (или  $D$  от  $E$ ) определяется предшествующим состоянием поляризованного сегнетоэлектрика.

**Петлей гистерезиса** (рис. 17.13) называется замкнутая кривая изменения величины вектора поляризации  $P$  (или величины вектора электрического смещения  $D$ ) сегнетоэлектрика от изменения величины напряженности внешнего электрического поля  $E$ .

Физическое объяснение петли гистерезиса может быть дано на основе доменной структуры сегнетоэлектрика (рис. 17.14, а).

При первоначальном увеличении напряженности  $E$  поляризующего поля изменение поляризованности  $P$  описывается кривой  $I$  (см. рис. 17.13). Кривая  $I$  представлена также на рис. 17.9. Процесс поляризации сегнетоэлектрического образца во внешнем электрическом поле можно разбить на несколько стадий.

При малых внешних полях (область I, рис. 17.9) происходит обратимое смещение границ доменов. При увеличении значения на-

пряженности электрического поля в области II происходит уже необратимое скачкообразное смещение границ доменов. К концу области II остаются только домены с энергетически выгодной ориентацией дипольных электрических моментов во внешнем поле, то есть те домены, у которых векторы поляризации составляют с вектором напряженности внешнего электрического поля углы меньше  $90^\circ$ . В области III наблюдается процесс поворота электрических дипольных моментов доменов по направлению электрического поля. Область IV соответствует насыщению, когда все дипольные моменты доменов ориентированы по направлению внешнего электрического поля (рис. 17.14, б). **Явление насыщения** заключается в том, что, начиная с некоторого значения напряженности поля  $E$ , величина поляризованности  $P$  не изменяется при увеличении напряженности внешнего поля (см. рис. 17.9, рис. 17.13).

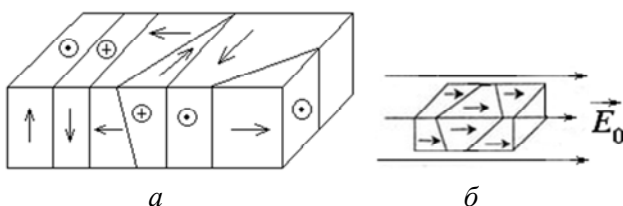


Рис. 17.14. Схема доменной структуры сегнетоэлектрика:  
 а – в отсутствии внешнего электрического поля;  
 б – при достижении насыщения

При уменьшении напряженности внешнего поля  $\vec{E}$  до нуля наблюдается постепенная разориентация дипольных моментов доменов и уменьшение поляризованности  $P$  происходит по ветви 2 (см. рис. 17.13). При значении поля  $E = 0$  электрические дипольные моменты некоторых доменов сегнетоэлектрика остаются ориентированными в направлении поля, вызвавшего поляризацию. В данном случае говорят, что сегнетоэлектрик при  $E = 0$  обладает остаточной поляризованностью  $P_r$  (см. рис. 17.13). Остаточная поляризованность сегнетоэлектрика может быть сведена к нулю, если приложить электрическое поле обратного направления с напряженностью  $E_c$ . Это значение напряженности поля называется коэрцитивной силой.

**Коэрцитивной силой** называется величина внешнего поля  $E_c$ , имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему поляризацию сегнетоэлектрика, которое обращает в ноль остаточную поляризацию. При дальнейшем изменении величины поля  $E$  процесс повторяется и изменение поляризованности сегнетоэлектрика от напряженности поля происходит по петле гистерезиса (см. рис. 17.13).

Согласно (17.10) вектор электрического смещения  $\vec{D}$  связан с вектором напряженности внешнего электрического поля как

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Когда поляризованность сегнетоэлектрика достигнет насыщения, вектор поляризации будет величиной постоянной ( $P_{\text{нас}} = \text{const}$ ) и модуль вектора  $\vec{D}$  можно записать в виде

$$D = \epsilon_0 E + \text{const}.$$

Таким образом, из зависимости величины вектора электрического смещения  $\vec{D}$  от напряженности  $E$  внешнего электрического поля

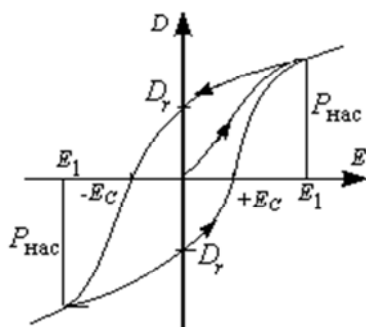


Рис. 17.15. Вид зависимости величины электрического смещения от напряженности электрического поля

(рис. 17.15) следует, что, начиная со значения напряженности электрического поля  $E_1$ , значение вектора электрического смещения линейно зависит от напряженности внешнего поляризирующего электрического поля.

В этом состоит различие вида петли гистерезиса  $D = f(E)$  (см. рис. 17.15) от вида петли  $P = f(E)$  (см. рис. 17.13).

**Сегнетоэлектрики принято характеризовать двумя параметрами: диэлектрической проницаемостью и тангенсом угла диэлектрических потерь.**

**Диэлектрическими потерями** называется часть энергии, преобразуемая в теплоту в процессе поляризации диэлектрика.

Тепло в диэлектрике выделяется как в постоянном, так и в переменном электрическом поле. Особенно сильно диэлектрики могут нагреваться в полях высокой частоты. Величина потерь зависит от структуры диэлектрика, вида поляризации, наличия дефектов, примесей, температуры.

В переменном электрическом поле диэлектрик обладает наряду с омическим еще и реактивным сопротивлением, связанным с наличием у него емкости. Поэтому полный ток  $I$ , текущий через диэлектрик, будет представлять сумму активного  $I_a$  и реактивного  $I_r$  тока (рис. 17.16).

Из рис. 17.16 видно, что полный ток  $I$  в диэлектрике образует угол  $\delta$  с вектором реактивного тока.

**Тангенсом угла диэлектрических потерь  $\operatorname{tg} \delta$**  называется тангенс угла между полным током  $I$  и реактивным током  $I_r$  в диэлектрике. Это количественная характеристика потерь тепловой энергии в диэлектрике.

Во внешнем переменном электрическом поле с частотой  $\omega$  тангенс угла диэлектрических потерь будет составлять

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_a}{I_r} = \frac{1}{\omega RC},$$

где  $R$  – омическое сопротивление диэлектрика;

$C$  – емкость (см. рис. 17.7).

Для сегнетоэлектриков тангенс угла диэлектрических потерь может быть вычислен как отношение потери энергии  $W_1$  электрического поля в единице объема диэлектрика за один цикл изменения переменного электрического поля  $E$  к максимальной плотности энергии электрического поля в диэлектрике  $W_0$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{W_1}{W_0}.$$

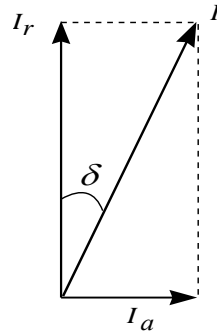


Рис. 17.16. Векторная диаграмма токов в диэлектрике

Сегнетоэлектрики имеют широкое практическое применение. Эти материалы используются для изготовления конденсаторов большой емкости при малых размерах, что имеет существенное значение для уменьшения веса и габаритов радиотехнических устройств. На основе сегнетоэлектриков создают пленочные конденсаторы, которые применяются в электронно-счетных машинах как «ячейки памяти». Нелинейная зависимость  $\epsilon = f(E)$  для сегнетоэлектриков позволяет использовать их в радиоэлектронике и автоматике для настройки колебательных контуров, автоматической перестройки частоты в генераторах в качестве частотных модуляторов. Титанат бария, сегнетова соль широко применяются в качестве генераторов и приемников ультразвуковых волн. Зависимость диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков от температуры используется для преобразования тепловой энергии в электрическую энергию. Такие преобразователи широко применяются в космических аппаратах, спутниках и т. д.

### 17.7. Пьезоэлектрики

Известно, что многие вещества (кварц, тростниковый сахар, винная кислота, хлорат натрия, цинковая обманка, турмалин, сегнетова соль, титанат бария, цирконат-титанат свинца и т. д.) при механических воздействиях (деформациях) изменяют свои электрические свойства. Диэлектрические материалы, в том числе и кристаллы, не имеющие центра симметрии, при механических воздействиях поляризуются. Это явление, открытое в 1880 г., называют прямым пьезоэлектрическим эффектом, или прямым пьезоэффектом.

**Прямой пьезоэффект** (от греч. *Piézo* – давить, сжимать) – это эффект, при котором под действием внешней силы на поверхности вещества появляются электрические заряды, то есть эффект возникновения поляризации диэлектрика под действием механических напряжений (деформаций).

Известно более 1500 веществ, у которых проявляются пьезоэлектрические свойства. Такими свойствами из кристаллических веществ обладают только ионные кристаллы, у которых отсутствует центр симметрии. Из известных 32 кристаллических структур кристаллов не имеет центра симметрии 21 структура, при этом у одной из структур сочетание других элементов симметрии делает пьезо-



электрический эффект невозможным. Таким образом, пьезоэлектрические свойства могут наблюдаться в кристаллах 20 кристаллографических классов.

Рассмотрим возникновение пьезоэлектрического эффекта на примере кристалла кварца.

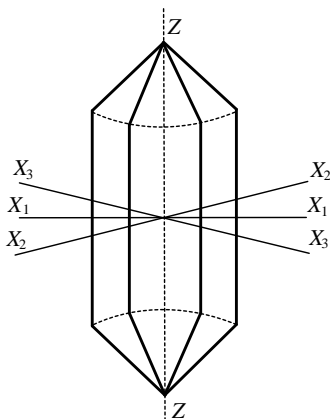


Рис. 17.17. Структура кристалла кварца

При сжатии или растяжении в любом направлении, перпендикулярном оси  $Z$ , на соответствующих гранях кристалла возникают электрические заряды

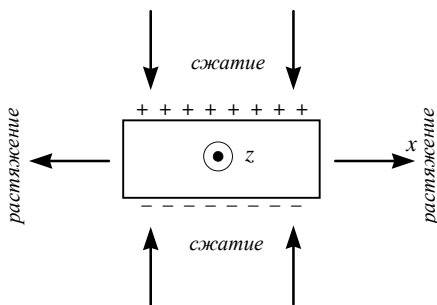


Рис. 17.18. Поляризация при деформациях сжатия и растяжения

На рис. 17.17 схематически показан кристалл кварца в альфа-модификации и его четыре кристаллографические оси. Ось  $Z$  соединяет вершины пирамид и называется оптической осью; оси  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  – пьезоэлектрические оси. Кристаллы альфа-кварца принадлежат к тригональной системе и имеют форму близкую к шестигранной призме, ограниченной двумя пирамидами (см. рис. 17.17). Пьезоэлектрические оси перпендикулярны оси  $Z$ , соединяют противоположные ребра шестигранной призмы и расположены под углом  $120^\circ$  друг к другу. При сжатии или растяжении в любом направлении, перпендикулярном оси  $Z$ , на соответствующих гранях кристалла возникают электрические заряды

(электрическая поляризация) (рис. 17.18). При изменении вида деформации (например, деформации сжатия на деформацию растяжения) на гранях появляются заряды другого знака.

Таким образом, растяжение или сжатие приводит к тому, что на двух противоположных гранях кристалла возникают электрические заряды. Поскольку структура кристалла по разным направлениям внутри него различна, то приложение механических напряжений по разным направлениям будет вызывать различные значения поляризации. Следовательно,

приложение механических напряжений по разным направлениям будет вызывать различные значения поляризации. Следовательно,

**пьезоэффект** – анизотропное явление, то есть зависящее от направления в веществе.

Кварц относится к слабым пьезоэлектрикам, характеризующимся небольшими значениями коэффициента электромеханической связи, составляющим для различных кристаллографических направлений величину от 0,05 до 0,1.

Коэффициент электромеханической связи характеризует эффективность преобразования механической энергии в электрическую и обратно. Чем больше коэффициент электромеханической связи, тем больше энергии деформированного тела преобразовывается в электрическую энергию.

Для демонстрации прямого пьезоэффекта может использоваться следующее простое устройство. Пластинку из пьезоэлектрика необходимо слабо зажать между двумя обкладками из листовой латуни. Подсоединить маленькую неоновую лампу, которая будет служить в качестве демонстрационного вольтметра. Если резко ударить резиновым молоточком по пластинке, то при каждом ударе лампа будет вспыхивать.

Из ионных кристаллических сегнетоэлектриков в качестве пьезоэлектрических материалов широкое практическое применение получили ниобат лития  $\text{LiNbO}_3$ , танталат лития  $\text{LiTaO}_3$ , а также германат висмута  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ . Для придания пьезоэлектрических свойств монокристаллы ионных сегнетоэлектриков переводятся в однодоменное состояние путем отжига в сильном электрическом поле при температуре несколько ниже температуры точки Кюри. Ионные пьезоэлектрики характеризуются более высокими значениями коэффициента электромеханической связи, достигающего для некоторых кристаллографических направлений значений от 0,1 до 0,3.

Пьезоэлектрические свойства можно создавать в некристаллических диэлектриках за счет поляризации поликристаллических твердых растворов в электрическом поле (пьезокерамика).

К некристаллическим пьезоэлектрикам относится сегнетоэлектрическая керамика. В сегнетокерамике, обладающей изотропными свойствами, пьезоэффект не наблюдается. Для придания пьезоэлектрических свойств сегнетоэлектрическую керамику предварительно поляризуют в постоянном электрическом поле напряженностью от 2 до 4 кВ/мм при температуре 100–150 °С в течение определенного времени (от 30 мин до 1 ч). После выключения внешнего электри-

ческого поля в сегнетокерамике сохраняется устойчивая остаточная поляризация, что является причиной появления пьезоэффекта. Поляризованную сегнетокерамику называют пьезокерамикой.

**Таким образом, всякая пьезокерамика является сегнетоэлектриком, но не всякий сегнетоэлектрик является пьезоэлектриком. Пьезоэлектриком будет только тот сегнетоэлектрик, который обладает анизотропными свойствами.**

Из пьезокерамики можно изготовить пьезоэлементы практически любой формы с возможностью возбуждения в них различных видов акустических колебаний (продольных, поперечных, изгибных). К основным видам промышленных пьезокерамических материалов относятся материалы на основе титаната бария (ТБ)  $\text{BaTiO}_3$ , а также материалы на основе цирконата-титаната свинца (ЦТС) состава  $\text{Pb}(\text{Zr}, \text{Ti})\text{O}_3$ , титаната бария, кальция и свинца (ТБКС) состава  $\text{Pb}(\text{Ba}, \text{Ca})\text{TiO}_3$ , ниобата бария-свинца (НБС) состава  $(\text{Pb}, \text{Ba})\text{Nb}_2\text{O}_3$  и многих других. Пьезокерамические материалы, как правило, являются сильными пьезоэлектриками и имеют коэффициент электромеханической связи от 0,2 до 0,5.

Пьезоэлектрики-полимеры представляют собой поляризованные в электрическом поле пленки полимеров, например, поливинил-иденфторида. Пленки поляризуют после предварительной вытяжки на 300–400 %. При изготовлении пьезоэлементов на поверхность полимерной пленки методом металлизации наносят электроды.

Прямой пьезоэффект практически используется:

- в пьезогенераторах электроэнергии различного назначения;
- пьезозажигалках для получения высокого напряжения на разряднике от движения пальца;
- датчиках в качестве чувствительного к силе элемента (чем больше сила, тем выше напряжение на контактах), например, в силовых датчиках, датчиках давления жидкостей и газов;
- качестве чувствительного элемента в микрофонах, гидрофонах, головках звукоснимателя электрофонов, приемных элементов сонаров.

Существует и обратный пьезоэлектрический эффект – возникновение механических деформаций под действием электрического поля. **При прямом пьезоэффекте деформация пьезоэлектрического образца приводит к возникновению электрического напряжения между поверхностями деформируемого твердого те-**

**ла, при обратном пьезоэффекте приложение напряжения к телу вызывает его деформацию.**

Прямой эффект был открыт братьями Жаком и Пьером Кюри (1880 г.). Обратный эффект был предугадан в 1881 г. Липпманом, исходя из термодинамических соображений, и в том же году экспериментально открыт братьями Кюри.

Пьезоэлектрические вещества всегда обладают одновременно и прямым, и обратным пьезоэффектом.

Обратный пьезоэлектрический эффект используется:

- в медицине;
- пьезокерамических излучателях звука (эффективны на высоких частотах и имеют небольшие габариты; такие, например, встраиваются в музыкальные открытки, различные оповещатели, применяемые во всевозможных бытовых устройствах от наручных часов до кухонной техники);
- ультразвуковых излучателях для увлажнителей воздуха, ультразвуковой гидроочистки (в частности, ультразвуковых стиральных машин и промышленных ультразвуковых ванн);
- излучателях гидролокаторов (сонарах);
- системах механических перемещений (активаторах):
- системах сверхточного позиционирования, например, в системе позиционирования иглы в сканирующем туннельном микроскопе или позиционер перемещения головки жесткого диска;
- адаптивной оптике, для изгиба отражающей поверхности деформируемого зеркала;
- для подачи чернил в струйных принтерах.

Прямой и обратный эффект одновременно используются:

- в пьезоэлектрических преобразователях;
- кварцевых резонаторах, используемых как эталон частоты;
- пьезотрансформаторах для изменения напряжения высокой частоты;
- приборах на эффекте поверхностных акустических волн;
- ультразвуковых линиях задержки электронной аппаратуры;
- датчиках на поверхностных акустических волнах.

Рассмотрим более подробно несколько примеров практического применения прямого и обратного пьезоэффектов, используемых в медицине и науке в Республике Беларусь.

Обратный пьезоэффект используется, например, в медицине для удаления тромбов, образовавшихся в кровеносных сосудах.

По сосуду к месту тромба запускается пьезоэлемент, представляющий собой пьезопластинку микроразмеров. На пластинку подается напряжение, под действием которого она деформируется (обратный пьезоэффект) и начинает совершать колебания с определенной частотой, ударяя по тромбу и со временем его разбивая.

В ингаляторах используются пьезоэлементы в качестве элемента, распыляющего жидкость. На пьезопластинку, которая деформируется (изгибается) под действием подаваемого напряжения (обратный пьезоэффект), попадает жидкость. Изгибающаяся (колеблющаяся) с определенной частотой пластинка распыляет жидкость.

Далее рассмотрим, что собой представляет пьезоманипулятор перемещения зонда сканирующего туннельного микроскопа, кото-



Рис. 17.19. Трубчатый пьезоэлемент

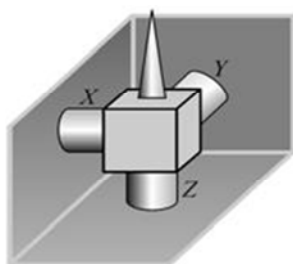


Рис. 17.20. Сканирующий элемент в виде трипода, собранный на трубчатых пьезоэлементах

рый выпускается в Гомеле. Основу пьезоэлектрических манипуляторов перемещения зонда сканирующего туннельного микроскопа составляет трубчатый пьезоэлемент (рис. 17.19), меняющий геометрический линейный размер на доли нанометра при изменении напряжения на нем на единицы вольт.

Соединение трех трубок в один узел позволяет реализовать перемещения зонда микроскопа в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Такой элемент получил название трипода. Трипод является базовым элементом любых зондовых микроскопов (рис. 17.20).

Возможны и другие конструкции перемещений зонда сканирующего туннельного микроскопа по трем координатам с использованием пьезоэффекта. Одним из них является трубчатый пьезосканер (рис. 17.21), позволяющий реализовать сканирование в плоскости  $XYZ$  только на одном трубчатом пьезоэлементе, имеющем четыре секции на внешней оболочке цилиндрической трубки.

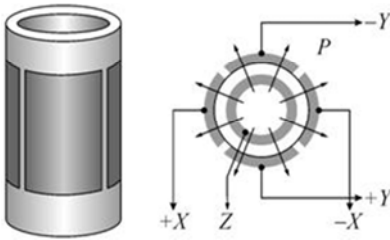


Рис. 17.21. Трубчатый пьезосканер

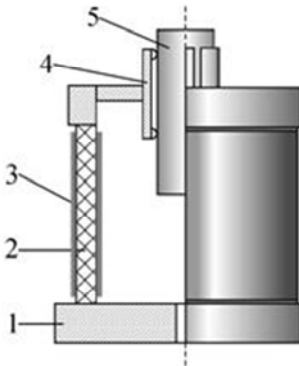


Рис. 17.22. Шаговый пьезодвигатель:  
1 – основание; 2 – пьезоэлектрическая  
трубка; 3 – электроды; 4 – разрезная  
пружина; 5 – цилиндрический  
держатель объекта

Для позиционирования исследуемого образца в сканирующих туннельных микроскопах используются шаговые пьезодвигатели, с помощью которых исследуемый образец подводится к зонду.

На рис. 17.22 приведена схема такого пьезодвигателя. С помощью сканирующего туннельного микроскопа можно, точно направив зонд в определенную точку поверхности и приложив нужное напряжение, «рассечь» молекулу на части, оторвав от нее несколько атомов, и исследовать ее электронные свойства.

Исследователи экспериментально показали, что, прикладывая к зонду определенное напряжение, можно заставить атомы притягиваться к острию или двигаться вдоль поверхности.

Манипуляции с отдельными атомами означают, что можно сконструировать искусственные

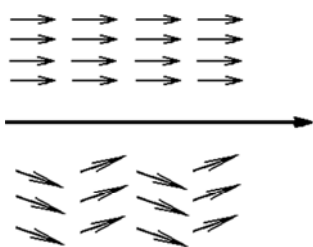
структуры нанометровых размеров, используя отдельные атомы как кирпичики. Первое приложение, как считают многие ученые, будет использоваться для хранения компьютерной информации, так как компьютерная память основана на том, что бит (единица информации) задается определенным состоянием элемента среды (магнитной, электрической, оптической), в которой записывается информация. Проще говоря, элемент памяти показывает, включено что-то или выключено, присутствует что-либо или отсутствует и т. д. Исходя из этого, можно реализовать такую ситуацию на поверхности, когда 1 бит будет записан в виде скопления, например, 1000 атомов.

Таким образом, пьезоэлектрический эффект широко и разнообразно применяется на практике в устройствах широкого спектра назначений.

## 17.8. Пироэлектрики

Еще одно явление, которое связано с поляризацией диэлектриков, называется пироэффектом. **Пироэффект** – это явление изменения величины поляризации в веществе при его нагревании или охлаждении.

Изменение поляризации с температурой возможно только в таких диэлектриках, в которых поляризация существует спонтанно. Если допустить идеализированный случай одинаковой ориентации



всех диполей при температуре, равной 0 К, то при повышении температуры тепловое движение ведет к частичному разупорядочению и уменьшению поляризации. Это первичный, или «истинный», пироэффект (рис. 17.23).

Рис. 17.23. Первичный, или «истинный», пироэффект

Обычно спонтанная поляризация пироэлектриков незаметна, так как электрическое поле, создаваемое ею, компенсируется полем свободных электрических зарядов, которые «натекают» на

поверхность из его объема и окружающего воздуха. При изменении температуры величина спонтанной поляризации изменяется, что вызывает появление электрического поля, которое можно наблюдать, пока свободные заряды не успеют его скомпенсировать.

Изменение спонтанной поляризации и появление электрического поля в пироэлектриках может происходить не только при изменении температуры, но и при деформировании.

Таким образом, все пироэлектрики являются пьезоэлектриками, но не все пьезоэлектрики обладают пироэлектрическим эффектом. Ниже точки Кюри пироэлектрики являются сегнетоэлектриками.

К пироэлектрикам (от греч. *пυρ* – огонь) относится турмалин. Пироэлектрическим эффектом обладают 10 кристаллических классов. К пироэлектрикам относятся гранат, янтарь, триглицинсульфат,

титанат бария, титанат свинца, сегнетоэлектрические цирконаты свинца, сополимеры винилиденфторида и т. д.

Существует обратный пирозффект который называют *электрокалорическим эфффектом*.

Природа пирозффективности довольно сложная, и только современная квантовая теория смогла установить связь между составом, структурой вещества и величиной пирозффективного эфффекта. Пирозффективный эфффект – это проявление ангармонического характера сил, действующих между атомами. Это означает, что в выражении для потенциальной энергии взаимодействующих ионов при описании смещения атомов вещества необходимо учитывать члены более высокой степени, чем квадратичная. Также необходимо учитывать реальный колебательный спектр кристалла, который включает колебания и акустического, и оптического типа.

Пирозффективные материалы используются в качестве сенсорных устройств различного назначения, детекторов и приемников излучений, датчиков теплотметрических приборов.

На практике используется основное свойство пирозффективов – **любой вид радиации, попадающий на пирозффективный образец, вызывает изменение его температуры и соответствующее изменение поляризации**. Для плоскопараллельного образца с направлением спонтанной поляризации, перпендикулярным поверхности образца, нагревание приведет к изменению связанного заряда на поверхностях. Если поверхности образца покрыты проводящими электродами и эти электроды соединены проводником, то по проводнику будет протекать электрический ток.

Следовательно, **на входе пирозффективного образца имеем поток радиации любого вида, вызывающий периодическое изменение температуры образца (периодичность можно обеспечивать искусственной модуляцией интенсивности излучения), а на выходе пирозффективного образца – электрический ток или заряд, изменяющиеся с соответствующей частотой**.

К числу преимуществ пирозффективных приемников излучения относятся:

- широкий (практически неограниченный) диапазон частот детектируемой радиации;
- высокая чувствительность;



- быстродействие;
- способность к работе в области повышенных температур.

Особенно перспективно применение пироэлектрических приемников в области частот инфракрасного (ИК) диапазона. С их помощью решается проблема детектирования потоков тепловой энергии малой мощности, измеряется форма и мощности коротких ( $10^{-5}$ – $10^{-11}$  с) импульсов лазерного излучения, измеряется температура контактным и бесконтактным способом (чувствительность пироэлектрических термометров достигает  $10^{-6}$  К). Бесконтактные термометры с пироприемниками измеряют температуры от  $-50$  до  $2000$  °С с погрешностями (для лучших) примерно 0,15 %. Время измерения колеблется от 1 до 5 с.

Особенно интересна уже реализованная возможность использования пироэлектрического эффекта для индикации пространственного распределения излучений в системах визуализации ИК-изображений (темновидение). Созданы пироэлектрические видиконы – тепловые передающие телевизионные трубки с пироэлектрической мишенью. Изображение теплого объекта проецируется на мишень, создавая на ней соответствующий зарядовый и потенциальный рельеф, который считывается при сканировании мишени электронным пучком. Создаваемое током электронного пучка электрическое напряжение управляет яркостью луча, воспроизводящего изображение объекта на телевизионном экране.

Особое место занимает применение пировидиконов в медицинской практике: они обеспечивают успешную диагностику сердечно-сосудистых и раковых заболеваний. С помощью тепловизоров выявляются глубинные воспалительные процессы, проводится визуализация деталей ветвления основных коронарных артерий, изучается динамика кровоснабжения миокарда и т. д.

## 17.9. Электреты

*Электреты* – это диэлектрики, которые длительное время сохраняют поляризованное состояние после снятия внешнего поляризующего электрического поля.

Напомним, что электрическая поляризация, индуцированная внешним электрическим полем, после выключения поля, как правило, быстро исчезает, так как равновесное состояние диэлектрика (если он не пироэлектрик) соответствует неполяризованному состоянию.

В некоторых случаях поляризованное состояние сохраняется неоднородным диэлектриком длительное время после снятия поля – возникает остаточная поляризация. К остаточной поляризации может привести, например, «замораживание» некоторых механизмов тепловой и миграционной поляризации, если время релаксации по тем или иным причинам резко возрастает. Остаточную поляризацию могут создавать также электрические заряды, внедренные в диэлектрик при предварительной электризации и закрепившиеся в нем на поверхностных или объемных «ловушках». Если диэлектрик, обладающий остаточной поляризацией, не экранирован металлическими электродами, то он создает в окружающем пространстве электростатическое поле, подобно тому, как постоянный магнит создает магнитное поле.

Первый электрет был изготовлен в 1922 г. японским физиком Ёгучи. Стабильные электреты могут быть получены из полимеров (поливинилхлорид, поликарбонат), неорганических поликристаллических диэлектриков (ультрафарфор), монокристаллических неорганических диэлектриков (корунда  $Al_2O_3$ , фторида лития LiF), стекол и т. д.

Электреты могут быть получены в сильном электрическом поле следующим образом:

- при нагревании, а затем охлаждении (термоэлектреты);
- освещении (фотоэлектреты);
- облучении радиоактивным излучением (радиоэлектреты);
- поляризацией в очень сильном поле без нагревания (электреты) или в магнитном поле (магнитоэлектреты);
- при застывании органических растворов в электрическом поле (криоэлектреты),
- механической деформацией полимеров (механоэлектреты);
- трением (трибоэлектреты);
- действием поля коронного разряда (коронозэлектреты).

В качестве материалов для создания термоэлектретного состояния первоначально использовался специальный воск, сейчас применяются полимерные материалы. В процессе приготовления термоэлектретов воски поляризуют при температуре выше температуры плавления, полимеры поляризуют при температуре выше температуры их стеклования. При охлаждении подвижность молекул уменьшается и поляризованное состояние может быть сохранено на длительное время (годы).

В последнее время для изготовления электретов все более широко применяются керамические материалы (титанаты кальция и стронция, рутил), а также стекла, различные монокристаллы (оксиды, фториды, халькогениды). Эти электреты обладают временной и термической стабильностью свойств, но недостаточно технологичны.

Применяется также пьезокерамика (преимущественно цирконат-титанат свинца), а также термопластичные полимерные материалы, например, поливинилиденфторид.

Для изготовления фотоэлектретов используются диэлектрики с высокой fotocувствительностью. Формирование электрического заряда в таких электретах зависит как от электрического поля, так и от освещенности. На освещенных участках fotocувствительного диэлектрика носители заряда освобождаются вследствие фотоэффекта и затем дрейфуют в диэлектрике, распределяясь в нем в соответствии с освещенными и теневыми областями. В результате после выключения электрического поля и света вблизи поверхности диэлектрика-фотоэлектрета остается электрическое изображение, которое можно либо считывать электронным лучом, либо «проявить» осаждением красящего порошка, частицы которого притягиваются к заряженным областям фотоэлектрета электростатическими силами.

Фотоэлектретное изображение может быть стерто сильным электрическим полем или сплошной засветкой fotocувствительного диэлектрического слоя.

В качестве материалов для фотоэлектретов используют fotocувствительные диэлектрики с малой темновой проводимостью, удобные для изготовления больших пластин: селен, оксид цинка, сульфиды и селениды цинка и кадмия и др. Фотоэлектретный эффект может быть получен в довольно широком круге поликристаллов и кристаллов: сера, антрацен, нафталин, силикосилленит ( $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ) и др.

Фотоэлектреты широко применяются в технике «ксерографии» («сухая» фотография), используемой в современных фотокопировальных устройствах. Типичный ксерографический процесс отличается от описанного выше процесса поляризации фотоэлектрета, поскольку используется деполяризация электрета светом.

Фоточувствительная пластина представляет собой проводящую подложку, покрытую тонким слоем фотоэлектрета, предварительно заряжается в темноте коронным разрядом. На пластину проецируется изображение, подлежащее репродукции. Из-за малой темновой

проводимости заряды сформированного электрета сохраняются достаточно долго. В освещенных местах заряды создают скрытое электрическое изображение, которое затем с помощью пигментных порошков переносится на бумагу.

В некоторых случаях формирования остаточной поляризации достаточно только одного сильного электрического поля (без дополнительного активирующего воздействия). Как правило, электроэлектреты изготавливают из полимерных пленок. Заряд электроэлектрета формируется электризацией одной из поверхностей пленки (на другую поверхность предварительно наносят металлический электрод).

Применяются различные методы электризации, в результате которых на поверхность диэлектрика осаждается поверхностный заряд или в полимер внедряется объемный заряд. Часто используют коронный электрический разряд над поверхностью электризуемой пленки, при этом бомбардирующие диэлектрик электроны закрепляются на поверхностных «ловушках». Часть электронов диффундирует в глубь диэлектрика, заполняя объемные «ловушки». Пространственно разделенные заряженные области создают внутри электрета и над его поверхностью электростатическое поле.

Понятие «ловушек» широко используется в физике твердого тела. *Ловушки* – это энергетические уровни в запрещенной зоне кристаллического диэлектрика. Свободный заряд может в силу различных причин оказаться на этом энергетическом уровне, то есть он будет пространственно неподвижен. Заряды, захваченные ловушками, создают в объеме электрета определенный рельеф электрического поля, соответствующий распределению интенсивности света при проектировании оптического изображения на электрет. Этот рельеф электрического поля приводит к нужному распределению красящего вещества, что применяется для создания копий изображений.

Электроэлектрет может быть изготовлен практически из любого полимерного диэлектрика. Лучшими электретными материалами являются политетрафторэтилен (ПТФЭ) и сополимеры на его основе.

Радиоэлектреты можно получать при облучении диэлектрика быстрыми частицами или  $\gamma$ -лучами. Независимо от первоначальной природы этих частиц, в диэлектрике под их действием активируются электроны, которые захватываются структурными дефектами и образуют объемные заряды. В радиоэлектретах разделение поло-

жительного и отрицательного зарядов, приводящее к образованию остаточной поляризации (электретного состояния вещества), может быть получено как при приложении внешнего электрического поля, так и без него. В последнем случае электрические заряды разделяются из-за неравномерности поглощения жесткого излучения в объеме диэлектрика: при этом индуцируется градиент электрического поля, распределяющего электроны и дырки по ловушкам. Этот метод электризации применяется не столько для получения электретов, сколько в радиометрах для измерения доз излучений.

#### *Техническое применение электретов.*

Электретные микрофоны были самыми первыми (1928 г.) и до настоящего времени остаются наиболее важными электретными приборами. Однако если в первых приборах применялись термоэлектреты из воска, то в настоящее время в микрофонах используются электроэлектреты из полимерных пленок.

Электретные микрофоны имеют равномерную характеристику в звуковом диапазоне и чувствительность до 0,1 мВ/мкбар. Различные по конструкции электретные пленочные микрофоны могут перекрывать частотный диапазон  $10^{-3}$ – $10^8$  Гц, что весьма важно для электронного приборостроения.

В электретном микрофоне металлизированная электретная диафрагма расположена над металлической платой-основанием так, что между ними остается небольшой воздушный зазор, в котором существует наведенное электретом статическое электрическое поле, индуцирующее заряды на основании. Звуковая волна заставляет колебаться тонкую пленку-мембрану, вследствие чего на основании наводится переменный электрический сигнал, соответствующий частоте и амплитуде колебаний звуковой волны. Аналогичные электретные устройства используются в миниатюрных телефонах и в высокочастотных громкоговорителях. Их отличает экономичность, высокая стабильность характеристик и низкая резонансная частота. Электреты используются в сенсорных переключателях, срабатывающих от легкого прикосновения руки, так как даже при малейшем смещении электронной диафрагмы наводятся электрические поля амплитудой от 10 до 100 В.

Предполагается, что в связи с микроминиатюризацией радиоаппаратуры роль электретов, как миниатюрных источников полей

и эффективных электромеханических и фотоэлектрических преобразователей, возрастет.

Электреты используются на практике в качестве чувствительных датчиков в устройствах дозиметрии, барометров, гигрометров.

### **17.10. Проводники. Распределение заряда в проводнике. Поле внутри проводника и на его поверхности**

В твердых металлических веществах существуют носители тока – электроны проводимости (свободные электроны), которые под действием внешнего электрического поля могут перемещаться по объему. Такие вещества называются *проводниками*. Электроны проводимости возникают, когда вещество металлического проводника переходит из газообразного в жидкое или твердое состояние. При кристаллизации происходит обобществление валентных электронов, которые покидают свои места в атомах и образуют своеобразный электронный газ.

Электрические свойства проводников в условиях электростатики определяются поведением электронов проводимости во внешнем электростатическом поле. В отсутствие внешнего электрического поля электрические поля электронов и положительных ионов металла взаимно компенсируют друг друга. Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль. Напряженность поля во всех точках внутри проводника равна нулю:

$$\vec{E} = 0,$$

(если бы это было не так, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без затраты энергии от внешнего источника, что противоречит закону сохранения энергии).

**Заряды располагаются только на поверхности проводника.**

Поскольку  $\vec{E} = 0$ , а  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , то потенциал во всех точках внутри проводника  $\varphi = \text{const}$ , то есть поверхность проводника в электростатическом поле является эквипотенциальной. Следова-

тельно, вектор  $\vec{E}$  направлен по нормали к каждой точке поверхности проводника. Если бы это было не так, то под действием касательной составляющей  $\vec{E}$  заряды начали бы перемещаться по поверхности проводника, что противоречит равновесному распределению зарядов. Следовательно, в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Если проводящему телу сообщить некоторый заряд  $q$ , то нескомпенсированный заряд распределится так, чтобы соблюдались условия равновесия. Представим себе произвольно замкнутую поверхность, полностью заключенную в пределах тела. При равновесии зарядов поле в каждой точке внутри проводника отсутствует, поэтому поток вектора электрического смещения через поверхность равен нулю. Согласно теореме Гаусса, сумма зарядов внутри поверхности также будет равна нулю. Это справедливо для поверхности любых размеров, проведенной внутри проводника произвольным образом. Следовательно, при равновесии ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов – все они распределяются по поверхности проводника с некоторой плотностью  $\sigma$ .

Поскольку в состоянии равновесия внутри проводника избыточных зарядов нет, удаление вещества из некоторого объема, взятого внутри проводника, никак не отразится на равновесном расположении зарядов.

Таким образом, избыточный заряд распределяется на полой проводнике так же, как на сплошном, то есть по его наружной поверхности. На поверхности полости в состоянии равновесия избыточные заряды располагаться не могут. Этот вывод вытекает также из того, что одноименные элементарные заряды, образующие данный заряд  $q$ , взаимно отталкиваются и, следовательно, стремятся расположиться на наибольшем расстоянии друг от друга.

Представим себе небольшую цилиндрическую поверхность, изображенную на рис. 17.24, образованную нормальными к поверхности проводника и основаниями величинами  $dS$ , одно из которых расположено внутри, а другое – вне проводника.

Поток вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через внутреннюю часть поверхности равен нулю, так как внутри проводника  $E$ , а значит и  $D$ , равен нулю. Вне проводника в непосредственной близости к нему напряженность поля  $E$  направлена по нормали к поверхности.

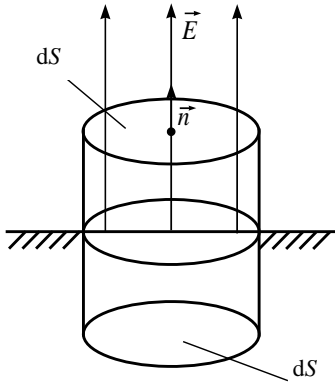


Рис. 17.24. Поток вектора напряженности электростатического поля через площадку  $dS$  поверхности проводника

Согласно теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i,$$

ЭТОТ ПОТОК

$$\vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_i = \sigma dS, \text{ то есть } D = \sigma$$

или

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Таким образом, напряженность поля вблизи проводника прямо пропорциональна величине поверхностной плотности заряда проводника.

### 17.11. Электростатическое поле в полости идеального проводника. Электростатическая защита

Рассмотрим поле, создаваемое заряженным проводником, изображенным на рис. 17.25. На больших расстояниях от проводника

Поэтому для выступающей наружу боковой поверхности цилиндра  $D_n = 0$ , а для внешнего основания  $D_n = D$  (внешнее основание предполагается расположенным очень близко к поверхности проводника). Следовательно, поток вектора электрического смещения через рассматриваемую поверхность равен  $DdS$ , где  $D$  – величина смещения в непосредственной близости к поверхности проводника. Внутри цилиндра содержится сторонний заряд  $\sigma dS$  ( $\sigma$  – плотность заряда в данном месте поверхности проводника).



эквипотенциальные поверхности имеют характерную для точечного заряда форму сферы (на рис. 17.25 из-за недостатка места сферическая поверхность изображена на небольшом расстоянии от проводника; пунктиром показаны линии напряженности поля). По мере приближения к проводнику эквипотенциальные поверхности становятся все более сходными с поверхностью проводника, которая является эквипотенциальной. Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности располагаются гуще, значит, и напряженность поля здесь больше. Отсюда следует, что плотность зарядов на выступах особенно велика. К такому же выводу можно прийти, учтя, что из-за взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

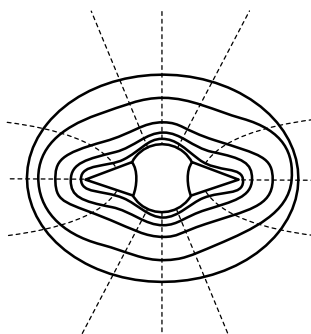


Рис. 17.25. Эквипотенциальные линии заряженных проводников различной формы

Плотность зарядов при данном потенциале проводника определяется кривизной поверхности: она растет с увеличением положительной кривизны (выпуклости) и убывает с увеличением отрицательной кривизны (вогнутости). Особенно велика бывает плотность зарядов на остриях. Поэтому напряженность поля вблизи остриев может быть настолько большой, что возникает ионизация молекул газа, окружающего проводник. Ионы иного знака, чем  $q$ , притягиваются к проводнику и нейтрализуют его заряд. Ионы того же знака, что и  $q$ , начинают двигаться от проводника, увлекая с собой нейтральные молекулы газа. В результате возникает ощутимое движение газа, называемое электрическим ветром. Заряд проводника уменьшается, он как бы стекает с острия и уносится ветром. Поэтому такое явление называют *истечением заряда с острия*.

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные – в направлении вектора  $\vec{E}$ , отрицательные – в противоположную сторону.

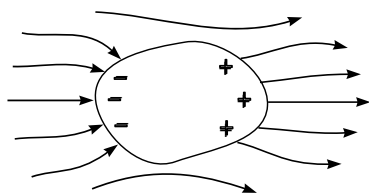


Рис. 17.26. Распределение зарядов незаряженного проводника во внешнем электрическом поле

В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными зарядами (рис. 17.26).

Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Следовательно, накопление зарядов у концов проводника приводит к ослаблению в нем поля. Перерас-

пределение носителей заряда происходит до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника – перпендикулярными к его поверхности. Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает часть линий напряженности: они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если внутри проводника есть полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри нее равно нулю. На этом основывается электростатическая защита. Когда какой-то прибор хотят защитить от воздействия внешних полей, его окружают проводящим экраном. Внешнее поле компенсируется внутри экрана возникающими на его поверхности индуцированными зарядами. Подобный экран действует хорошо и в том случае, если его сделать не сплошным, а в виде густой сетки.

## 17.12. Емкость уединенного проводника. Емкость системы проводников. Конденсаторы

Сообщенный проводнику заряд  $q$  распределяется по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. Такое распределение является единственным. Поэтому если проводнику, уже несущему заряд  $q$ , сообщить еще заряд такой же величины, то второй заряд должен распределиться по проводнику точно таким же образом, как и первый, в противном случае он создаст в проводнике поле, отличное от нуля. Следует сказать, что это справедливо лишь для удаленного от других тел (уединенного) проводника. Если вблизи данного проводника находятся другие те-

ла, сообщение проводнику новой порции заряда вызовет изменение поляризации этих тел либо изменение индуцированных зарядов на этих телах. В результате подобие в распределении различных порций заряда будет нарушено.

Итак, различные по величине заряды распределяются на уединенном проводнике подобным образом (отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любой величине заряда будет одним и тем же). Отсюда вытекает, что потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду. Действительно, увеличение заряда в некоторое число раз приводит к увеличению в то же число раз напряженности поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Соответственно, в такое же число раз возрастает работа переноса единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника, то есть потенциал проводника. Таким образом, для уединенного проводника

$$q = C\phi.$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  между потенциалом и зарядом называется электроемкостью (сокращенно просто емкостью) проводника.

$$C = \frac{q}{\phi}.$$

Таким образом, емкость численно равна заряду, сообщение которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

Уединенные проводники обладают небольшой емкостью. Даже шар таких размеров, как Земля, имеет емкость всего лишь 700 мкФ. Вместе с тем на практике бывает потребность в устройствах, которые при небольшом, относительно окружающих тел, потенциале накапливали бы себе («конденсировали») заметные по величине заряды. В основу таких устройств, называемых конденсаторами, положен тот факт, что электроемкость проводника возрастает при приближении к нему других тел. Это вызвано тем, что под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесенном к нему теле возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Заряды, противоположные по знаку заряду проводника  $q$ , располагаются ближе к проводнику, чем одноименные с  $q$ ,

и, следовательно, оказывают большое влияние на его потенциал. По этому при поднесении к заряженному проводнику какого-либо тела потенциал проводника уменьшается по абсолютной величине. Согласно формуле это означает увеличение емкости проводника.

Конденсаторы делают в виде двух проводников, помещенных близко друг к другу. Проводники, образующие конденсатор, называются его обкладками. Чтобы внешние тела не влияли на емкость конденсатора, обкладкам придают такую форму и так располагают их друг относительно друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было сосредоточено внутри конденсатора. Этому условию удовлетворяют две пластинки, расположенные близко друг к другу, два коаксиальных цилиндра и две концентрические сферы. Соответственно, бывают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы. Поскольку поле заключено внутри конденсатора, линии электрического смещения начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Следовательно, сторонние заряды, возникающие на обкладках, одинаковы по величине и различны по знаку.

### **17.13. Емкость конденсаторов различной геометрической формы. Емкость при параллельном и последовательном соединении системы конденсаторов**

Основной характеристикой конденсатора является его емкость, под которой понимают величину, пропорциональную заряду  $q$  и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Разность потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) называют напряжением между соответствующими точками. Будем обозначать напряжение буквой  $U$ . **Величина емкости определяется геометрией конденсатора, а также диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между обкладками.** Для плоского конденсатора напряженность между обкладками равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;

$\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей зазор величиной  $d$  между обкладками;

$q$  – заряд на ней;

$S$  – площадь обкладки.

Разность потенциалов между обкладками

$$U = Ed = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Отсюда емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

где  $l$  – длина конденсатора;

$R_1$  и  $R_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладки.

Емкость сферического конденсатора определяется следующим выражением:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладки.

Емкость уединенного шара радиуса  $R$ , погруженного в однородный безграничный диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon$ , равна

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

За единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. Эта единица емкости называется фарад (Ф).

Емкостью в 1 Ф обладал бы уединенный шар радиусом  $9 \cdot 10^9$  м, то есть радиусом, в 1500 раз большим радиуса Земли. Следовательно, фарад – очень большая величина. Поэтому на практике пользуются единицами, равными долям фарада: миллифарадом (мФ), микрофарадом (мкФ), нанофарадом (нФ) и пикофарадом (пФ).

Конденсаторы характеризуются пробивным напряжением – разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при которой происходит пробой – электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в батареи с использованием их параллельного и последовательного соединения.

При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, а при последовательном соединении конденсаторов результирующая емкость всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.

Соединение	Параллельное	Последовательное
Схема		
Сохраняющаяся величина	$U_1 = U_2 = \dots = U_n$ $U = \text{const}$	$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$ $Q = \text{const}$
Суммируемые величины	Заряд	Разность потенциалов
	$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$	$U = \sum_{i=1}^n U_i$
Результирующая емкость	$C = \sum_{i=1}^n C_i$	$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

При последовательном соединении конденсаторов на каждый из них приходится лишь часть разности потенциалов  $U$  клемм батарей, что значительно снижает возможность пробоя конденсаторов.

### 17.14. Энергия системы зарядов и уединенного проводника

Пусть два неподвижных точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  находятся на расстоянии  $r$  друг от друга. Каждый из этих зарядов в поле другого обладает потенциальной энергией

$$W_1 = q_1\phi_{12}, \quad W_2 = q_2\phi_{21},$$

где  $\phi_{12}$  и  $\phi_{21}$  – потенциалы, создаваемые зарядом  $q_2$  в точке нахождения заряда  $q_1$  и зарядом  $q_1$  в точке нахождения заряда  $q_2$  соответственно:

$$\phi_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}, \quad \phi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r},$$

поэтому  $W_1 = W_2 = W$  и

$$W = q_1\phi_{12} = q_2\phi_{21} = \frac{1}{2}(q_1\phi_{12} + q_2\phi_{21}).$$

Энергия системы неподвижных точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i,$$

где  $\phi_i$  – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд  $q_i$ , всеми зарядами, кроме  $i$ -го.

Рассмотрим уединенный проводник, заряд, емкость и потенциал которого равны  $q$ ,  $C$ ,  $\phi$  соответственно. Увеличим заряд этого проводника на  $dq$ . Для этого необходимо перенести заряд  $dq$  из бесконечности на уединенный проводник, затратив работу, равную

$$\delta A = \phi dq = C\phi d\phi.$$

Чтобы зарядить тело от нулевого потенциала до  $\phi$ , необходимо совершить работу

$$A = \int_0^{\phi} C \phi d\phi = \frac{C\phi^2}{2}.$$

Энергия заряженного проводника равна работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник, тогда энергия заряженного проводника равна

$$W = \frac{C\phi^2}{2} = \frac{q\phi}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Любое из этих выражений определяет энергию заряженного проводника.

### **17.15. Энергия заряженного конденсатора. Энергия электрического поля**

Энергия заряженного конденсатора определяется выражением

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

где  $C$  – емкость конденсатора;

$U$  – разность потенциалов между его обкладками.

Подставив в последнее выражение значение электроемкости

$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$  и  $U = Ed$ , получим

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} V,$$

где  $V = Sd$  – объем конденсатора.



Тогда энергия единицы объема, то есть объемная плотность энергии

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Таким образом, энергия заряженного конденсатора выражается через величины, характеризующие электрическое поле (напряженность  $E$  и электрическое смещение  $D$ ). На основе современных представлений доказано, что энергия локализована в поле и носителем энергии является поле.

## 18. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 18.1. Постоянный электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Проводники и изоляторы

*Электрический ток* – это упорядоченное движение электрических зарядов. За направление тока принимается направление движения положительных зарядов (в металлах это направление противоположно направлению движения свободных электронов).

Для длительного существования тока в веществе необходимы следующие условия:

- наличие свободных заряженных частиц (электронов, положительно и отрицательно заряженных ионов, заряженных пылинок, капелек);
- наличие электрического поля, то есть наличие разности потенциалов;
- наличие источника тока;
- замкнутость электрической цепи.

Если внутри макроскопического тела движутся микроскопические заряды – это ток проводимости (ток в металлах, электролитах).

Если движется макроскопическое заряженное тело, то говорят о конвекционном токе (движение Земли, несущей избыточный отрицательный заряд).

Движение электронов в вакууме под действием электрического поля представляет собой ток в вакууме.

Количественная характеристика электрического тока – сила тока. **Сила тока** – скалярная физическая величина, численно равная заряду, проходящему через поперечное сечение проводника за единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Единица измерения силы тока – Ампер:  $[I] = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}$ .

Если ток создается носителями обоих знаков, причем за время  $dt$  через данную поверхность положительные носители переносят заряд  $dq_+$  в одном направлении, а отрицательные носители –  $dq_-$  в противоположном, то сила тока

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{|dq_-|}{dt}.$$

Если сила тока не изменяется с течением временем – это постоянный ток. Сила тока в этом случае находится как отношение заряда  $q$ , прошедшего за время  $t$  через поперечное сечение проводника, ко времени:

$$I = \frac{q}{t}.$$

Электрический ток может быть неравномерно распределен в поперечном сечении проводника, по которому он течет. Поэтому ток характеризуют также с помощью вектора плотности тока, модуль которого определяется выражением

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}},$$

где  $dS_{\perp}$  – площадь поверхности, перпендикулярной к направлению движения носителей. Единица измерения плотности тока –  $\text{А}/\text{м}^2$ .

**Вектор  $\vec{j}$  совпадает по направлению с направлением движения положительно заряженных частиц.**

Для постоянного тока

$$j = \frac{I}{S} = \frac{q}{St}.$$

В зависимости от концентрации свободных зарядов вещества делят на проводники, диэлектрики и полупроводники. **Проводники** – тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему объему. Проводники делят на две группы: проводники первого и второго рода. В проводниках первого рода, к которым относят металлы, перенос свободных электронов не сопровождается химическими превращениями. В проводниках второго рода, например, в растворах кислот, перенос свободных зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям. **Диэлектрики** (изоляторы) – тела, в которых количество свободных носителей заряда мало. Удельная проводимость этих веществ составляет  $10^{-20}$ – $10^{-10}$  Ом<sup>-1</sup>см<sup>-1</sup>. К ним относят стекло, фарфор, химически чистую воду, пластмассы и т. д. Диэлектрики используют для изготовления конденсаторов, фильтров, преобразователей механической и тепловой энергии в электрическую и т. д.

## 18.2. Разность потенциалов. Электродвижущая сила.

### Напряжение

Обязательное условие существования тока – наличие разности потенциалов  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \neq 0$ , причем  $\varphi_1 > \varphi_2$ . Для этого необходимо устройство, которое разделило бы заряды на концах проводника, то есть заставляло бы положительные заряды внутри этого устройства двигаться в сторону возрастания  $\varphi$ , а отрицательные заряды – в сторону убывания  $\varphi$ , таким образом двигаться против сил электростатического поля напряженностью  $\vec{E}$ . Перенос зарядов внутри такого устройства возможен только с помощью сил неэлектростатического происхождения, или сторонних сил. Такие устройства называют источниками тока (рис. 18.1). Природа сторонних сил различная: химическая, биологическая, электромагнитная и т. д.

Величина, равная отношению работы, которую совершают сторонние силы при перемещении точечного положительного заряда вдоль цепи, включая и источник тока, к заряду, называется **электродвижущей силой (ЭДС) источника тока**

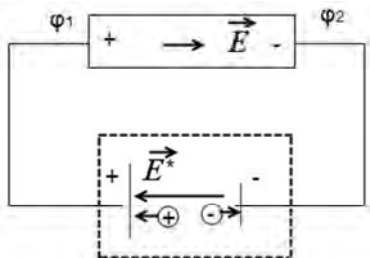


Рис. 18.10 Работа источника постоянного тока

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q}, \quad [\varepsilon] = \text{В}. \quad (18.1)$$

Представим стороннюю силу, действующую на заряд  $q$ , в виде

$$\vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}^*.$$

Векторная величина  $\vec{E}^*$  называется **напряженностью поля сторонних сил**.

Работу сторонних сил над зарядом  $q$  на всей замкнутой цепи можно представить в виде

$$A_{\text{ст}} = \oint \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{r} = q \oint \vec{E}^* d\vec{r}. \quad (18.2)$$

Делим (18.2) на  $q$ , и с учетом (18.1) получим

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q} = \oint \vec{E}^* d\vec{r}. \quad (18.3)$$

Следовательно, ЭДС, действующую в замкнутой цепи, можно определить как циркуляцию вектора напряженности поля сторонних сил.

**Неоднородным участком цепи** называется такой участок электрической цепи, где на свободные электрические заряды действуют силы как электростатического поля, так и сторонние силы (рис. 18.2).

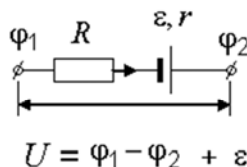


Рис. 18.2. Неоднородный участок цепи

Если на некотором неоднородном участке 1–2 есть источник тока с ЭДС  $\varepsilon$  и разность потенциалов  $\Delta\varphi$  (см. рис. 18.2), создаваемая электростатическими силами, то на заряды будет действовать результирующая сила:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{ст}} + \vec{F}_{\text{эл.ст.}} = q(\vec{E}^* + \vec{E}),$$

где  $\vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}^*$ ,  $\vec{F}_{\text{эл.ст.}} = q\vec{E}$ .

Работа этой результирующей силы на участке 1–2

$$A_{1,2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = q \int_1^2 (\vec{E}_{\text{ст}}^* + \vec{E}_{\text{эл.ст.}}) d\vec{r} = q \int_1^2 E_r^* dr + q \int_1^2 E_{r\text{эл.ст.}} dr, \quad (18.4)$$

где  $\vec{E}_{\text{эл.ст.}}$  – проекция вектора напряженности электростатического поля на направление  $\vec{r}$ ;

$E_r^*$  – проекция вектора напряженности поля сторонних сил  $\vec{E}_r^*$  на направление  $\vec{r}$ .

Учтем, что  $E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$ , тогда  $E_r dr = -d\varphi$ . В формуле (18.4) второе слагаемое

$$\int_1^2 E_{r\text{эл.ст.}} dr = -\int_1^2 d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (18.5)$$

то есть циркуляция вектора  $\vec{E}$  электростатического поля на участке 1–2 равна разности потенциалов на этом участке. **Разность потенциалов**  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  – это отношение работы, совершаемой электростатическими силами по перемещению по электрической цепи пробного положительного заряда, к величине этого заряда. Выражения (18.3) и (18.5) подставляем в выражение (18.4):

$$A_{1,2} = q\varepsilon_{1,2} + q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Разделив последнее выражение на величину заряда, получим:

$$U_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{q} = \varepsilon_{1,2} + (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Величина, численно равная отношению работы, совершаемой сторонними и электростатическими силами при перемещении пробного положительного заряда, к величине этого заряда, называется *напряжением*. В системе СИ напряжение измеряется в вольтах.

### 18.3. Классическая электронная теория электропроводности. Закон Ома в дифференциальной форме

В классической теории металлов предполагается, что движение электронов подчиняется законам Ньютона. При этом пренебрегают взаимодействием электронов между собой, а с ионами кристаллической решетки электроны взаимодействуют во время неупругих соударений. Предполагается, что все электроны проходят между двумя последовательными соударениями одинаковые пути, равные средней длине свободного пробега  $\langle l \rangle$ . Также предполагается, что при каждом соударении электроны передают решетке накопленную энергию полностью, и поэтому после соударения движение начинается с  $v_0 = 0$ .

Найдем плотность тока  $\vec{j}$ , возникающего в металле под действием электрического поля напряженностью  $\vec{E}$ . Согласно определению, плотность тока  $\vec{j}$  равна общему заряду всех электронов, проходящих через единицу площади поперечного сечения проводника за 1 с.

Рассмотрим элемент металлического проводника в виде цилиндра (рис. 18.3) сечением  $dS$  и объемом  $\Delta V$ . Если в объеме  $\Delta V$  находится  $N$  электронов, то

$$j = \frac{I}{S} = \frac{\Delta q}{\Delta t S} = \frac{en\Delta V}{S\Delta t} = \frac{enS\langle v \rangle \Delta t}{S\Delta t} = en\langle v \rangle, \quad (18.6)$$

где  $e$  – абсолютное значение заряда электрона;

$\langle v \rangle$  – средняя скорость упорядоченного движения электронов.

Со стороны электрического поля напряженностью  $\vec{E}$  на каждый электрон действует сила, модуль которой равен

$$F = eE,$$

в результате чего электрон приобретает ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m},$$

где  $m$  – масса электрона.



Рис. 18.3. К выводу закона Ома в дифференциальной форме

Следовательно, к концу пути, равного длине свободного пробега, скорость электрона будет

$$v_{\max} = a \langle t \rangle = \frac{eE}{m} \langle t \rangle, \quad v_0 = 0.$$

Зная среднюю скорость теплового движения  $\langle u \rangle$ , определим среднее время между соседними соударениями

$$\langle t \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle}.$$

При определении  $\langle t \rangle$  пренебрегали средней скоростью упорядоченного движения  $\langle v \rangle$ , так как, по сравнению со средней скоростью теплового движения  $\langle u \rangle$ , эта величина мала. Определяем среднюю скорость упорядоченного движения:

$$\langle v \rangle = \frac{v_0 + v_{\max}}{2} = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{eE \langle t \rangle}{2m} = \frac{e \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E, \quad (18.7)$$

то есть  $\langle v \rangle = \mu E$ , где  $\mu$  – подвижность электрона.

Подставим выражение (18.7) в выражение (18.6) и получим выражение для плотности тока

$$j = en \langle v \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E. \quad (18.8)$$

Из (18.8) следует, что плотность тока  $j$  пропорциональна напряженности поля  $E$ .

Величина  $\sigma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle}$  характеризует свойства проводника и называется

*удельной электрической проводимостью* (электропроводностью). Тогда выражение (18.8) принимает вид  $j = \sigma E$  или в векторной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (18.9)$$

Выражение (18.9) представляет собой **закон Ома в дифференциальной форме**: плотность тока в данной точке изотропного проводника пропорциональна напряженности поля в этой точке.

Если в проводнике, помимо электростатических сил, действуют сторонние силы (неоднородный участок цепи) и их поле имеет напряженность  $\vec{E}^*$ , то выражение (18.9) запишем в виде

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Последнее равенство – **закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи**.

$$[\sigma] = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{\text{См}}{\text{м}}, \quad \frac{1}{\text{Ом}} = \text{См} \text{ (Сименс)}.$$



Физический смысл закона Ома:

1. При протекании тока по металлу изменяются свойства металла в электрическом поле, в частности, напряженность электрического поля внутри не равна нулю.

2. Металлы обладают электрическим сопротивлением, величина которого равна

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление,  $[\rho] = \text{Ом}\cdot\text{м}$ ;

$l$  – длина проводника;

$S$  – площадь его поперечного сечения.

С учетом связи удельного сопротивления с удельной электропроводностью  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  выражение (18.9) примет вид

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

Причина сопротивления в металлах заключается в том, что электроны взаимодействуют друг с другом и с ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки.

#### 18.4. Закон Джоуля–Ленца

Из-за взаимодействия электронов с ионами в узлах кристаллической решетки нарушается тепловое равновесие внутри металла: средняя кинетическая энергия электронов больше, чем ионов. При столкновении электроны отдают ионам часть энергии, то есть энергия ионов растет. При протекании тока по металлическому проводнику происходит разогрев его кристаллической решетки, в результате чего в металле выделяется тепло.

Джоуль и Ленц независимо друг от друга экспериментально установили, что при протекании тока в неподвижном проводнике с сопротивлением  $R$  выделяется тепло, которое можно вычислить по формуле

$$Q = I^2 R t, \quad (18.10)$$

где  $I$  – сила тока;

$t$  – время протекания тока в проводнике.

Выражение (18.10) представляет собой **закон Джоуля–Ленца в интегральной форме**.

Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем  $dV = dS dl$  (см. рис. 18.3), сопротивление которого

$$R = \rho \frac{dl}{dS}.$$

Тогда элементарное количество теплоты:

$$\delta Q = (dI)^2 R dt = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = j^2 dS dl \rho dt = j^2 \rho dV dt.$$

Разделим это выражение на  $dV dt$  и найдем количество теплоты, выделяющееся в единице объема проводника в единицу времени (**удельную тепловую мощность тока**):

$$\omega = \frac{\delta Q}{dV dt} = \rho j^2.$$

Учтем, что удельное сопротивление и удельная проводимость связаны соотношением  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ , а также, используя закон Ома в дифференциальной форме  $j = \sigma E$ , получим

$$\omega = \frac{1}{\sigma} \sigma^2 E^2 = \sigma E^2, \quad (18.11)$$

где  $\omega$  – удельная тепловая мощность тока.

Выражение (18.11) – это **дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца**: удельная тепловая мощность тока в проводнике равна произведению его удельной электрической проводимости на квадрат напряженности электрического поля.

## 18.5. Закон Ома в интегральной форме

Перейдем от закона Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

к закону Ома в интегральной форме.

Умножим левую и правую часть равенства на удельное сопротивление  $\rho$ . Получим

$$\rho \vec{j} = \vec{E}. \quad (18.12)$$

При протекании тока по проводнику в этом проводнике возникает разность потенциалов. Если действуют только электростатические силы, то разность потенциалов становится равной нулю и ток прекращается. Для длительного существования тока необходимо, чтобы в цепи действовали силы неэлектростатического происхождения, поддерживающие разность потенциалов, то есть должны действовать сторонние силы. Следовательно, должен быть источник ЭДС (см. п. 18.2). Тогда (18.12) можно записать

$$\rho \vec{j} = \vec{E}_{\text{ст}}^* + \vec{E}_{\text{эл.ст.}}$$

Умножим левую и правую часть последнего выражения на элемент длины проводника  $d\vec{l}$ :

$$\rho \vec{j} d\vec{l} = \vec{E}_{\text{ст}}^* d\vec{l} + \vec{E}_{\text{эл.ст.}} d\vec{l}.$$

Интегрируем это выражение по участку цепи 1–2 (см. рис. 18.2):

$$\int_1^2 \rho \vec{j} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}}^* d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{эл.ст.}} d\vec{l};$$

$$\int_1^2 \rho \frac{I}{S} dl = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}}^* d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{эл.ст.}} d\vec{l}.$$

Учтем, что

$$R_{1,2} = \rho \frac{l}{S}; \quad \varepsilon_{1,2} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}}^* d\vec{l}; \quad \Delta\varphi_{1,2} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{эл.ст.}} d\vec{l},$$

тогда

$$IR_{1,2} = \varepsilon_{1,2} + \Delta\varphi_{1,2}$$

или

$$I = \frac{\varepsilon_{1,2} + \Delta\varphi_{1,2}}{R_{1,2}}. \quad (18.13)$$

Последнее выражение представляет собой обобщенный закон Ома в интегральной форме (**закон Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи**).

Физический смысл закона Ома в интегральной форме состоит в том, что он выражает закон сохранения энергии при протекании тока по цепи.

*Следствия из закона Ома в интегральной форме*

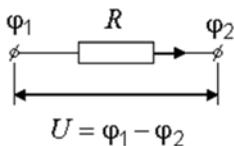


Рис. 18.4. Однородный участок цепи

1. Рассмотрим однородный участок цепи (рис. 18.4).

Для однородного участка цепи, то есть участка цепи, который не содержит источника тока,  $\varepsilon_{1,2} = 0$  и  $\Delta\varphi_{1,2} = U$ . Тогда выражение (18.13) примет вид

$$I = \frac{\Delta\varphi_{1,2}}{R}.$$

Последнее равенство – **закон Ома для однородного участка цепи**.

2. Для замкнутой цепи (рис. 18.5)

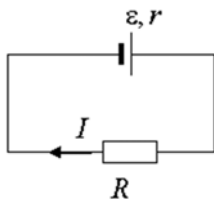


Рис. 18.5. Замкнутая цепь

$$\Delta\varphi = 0 \text{ и } U = \varepsilon.$$

Тогда выражение (18.6) запишется так

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Последнее равенство – это **закон Ома для замкнутой цепи**.

3. Для разомкнутой электрической цепи

$$0 = \varphi_2 - \varphi_1 + \varepsilon;$$

$$\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi_{1,2}$$

закон Ома не применим, если вольт-амперная характеристика становится нелинейной.

### 18.6. Правила Кирхгофа. Расчет разветвленных цепей

Правила Кирхгофа используются для расчета разветвленных электрических цепей (рис. 18.6).

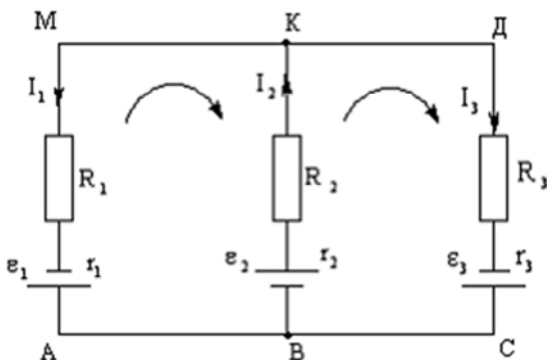


Рис. 18.6. К расчету электрической цепи с помощью правил Кирхгофа

**Узлом** называется место соединения трех и более проводников. На рис. 18.6 В и К – узлы.

**Первое правило Кирхгофа:** алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0.$$

Ток считается положительным, если он входит в узел, и отрицательным, если выходит из него. Первое правило Кирхгофа представляет собой закон сохранения заряда для постоянного тока. Запишем первое правило применительно к узлам В и К.

Для узла В:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (18.14)$$

Для узла К:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (18.15)$$

**Второе правило Кирхгофа:** в замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС в рассматриваемом контуре.

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i.$$

Это правило является следствием из закона Ома для любого замкнутого неразветвленного контура цепи. При этом выбирается определенное направление обхода замкнутого контура (на рис. 18.6 показано стрелками).

Ток считается положительным, если его направление совпадает с направлением обхода контура.

ЭДС  $\varepsilon$  берется со знаком +, если при выбранном направлении обхода контура переход внутри источника тока идет от минуса к плюсу.

Для контура АМКВ (см. рис. 18.6):

$$-I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_1 r_1 - I_2 r_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad (18.16)$$

для контура КДСВ:

$$I_2 R_2 + I_2 r_2 + I_3 R_3 + I_3 r_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (18.17)$$

Решая систему уравнений (18.14)–(18.17), можно найти силы токов  $I_1, I_2, I_3$ .

## 18.7. Уравнение непрерывности

Рассмотрим воображаемую замкнутую поверхность  $S$  (рис. 18.7) в среде, в которой течет ток. Выражение  $\oint_S \vec{j} d\vec{S}$  определяет заряд, выходящий в единицу времени из объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ .

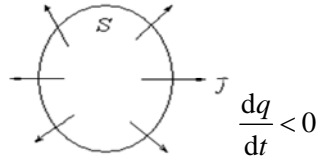


Рис. 18.7. К выводу уравнения непрерывности

По закону сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда  $q$ , содержащегося в данном объеме

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

Представив заряд в виде  $q = \int_V \rho dV$ , получим соотношение

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (18.18)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда.

Под знаком интеграла стоит частная производная  $\rho$  по  $t$ , поскольку плотность заряда может зависеть не только от времени, но и от координат (интеграл  $\int_V \rho dV$  есть функция только времени).

Преобразуем левую часть равенства (18.18), используя теорему Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

получаем

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (18.19)$$

Равенство (18.19) должно выполняться при произвольном выборе объема  $V$ , по которому берутся интегралы. Это возможно лишь в том случае, если в каждой точке пространства выполняется условие равенства подынтегральных выражений

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (18.20)$$

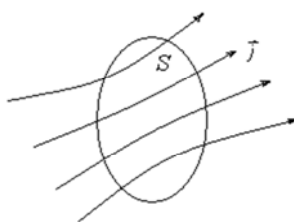
Соотношение (18.20) называют *уравнением непрерывности*, которое выражает закон сохранения заряда. Согласно (18.20) в точках, которые являются источниками вектора  $\vec{j}$ , происходит убывание заряда.

В случае стационарного тока потенциал в разных точках, плотность заряда и другие величины неизменны. Следовательно, для стационарного (то есть постоянного) тока уравнение (18.20) имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Таким образом, в случае постоянного тока вектор  $\vec{j}$  не имеет источников. Это означает, что линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Следовательно, линии постоянного тока всегда замкнуты. Соответственно, интеграл  $\oint_S \vec{j} d\vec{S}$  равен нулю.

Для постоянного тока картина, аналогичная изображенной на рис. 18.7, показана на рис. 18.8.



$$\frac{dq}{dt} = 0$$

Рис. 18.8. К выводу уравнения непрерывности (для постоянного тока)



## 19. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

В этом разделе мы приступаем к подробному изучению того, как осуществляется прохождение электрического тока в различных проводящих средах – твердых телах, жидкостях и газах. Напомним, что необходимым условием возникновения тока является наличие в среде достаточно большого количества свободных зарядов, которые могут начать упорядоченное движение под действием электрического поля. Такие среды как раз и называются *проводниками электрического тока*. Наиболее широко распространены металлические проводники. Поэтому начинаем с вопросов распространения электрического тока в металлах.

### 19.1. Классическая электронная теория электропроводности металлов

Носителями тока в металлах являются *свободные электроны*, то есть электроны, слабо связанные с ионами кристаллической решетки металла. Это представление о природе носителей тока в металлах основывается на электронной теории проводимости металлов, созданной немецким физиком П. Друде (1863–1906 гг.) и разработанной впоследствии нидерландским физиком Х. Лоренцем, а также на ряде классических опытов, подтверждающих положения электронной теории. Первый из таких опытов – опыт Рикке.

**Опыт Рикке по проверке неатомного характера тока в металлах.** Эдуард Рикке (1845–1915 гг.) убедительно и прямо доказал, что ток в металлах имеет неатомную природу. Сегодня известно, что он связан с переносом электронов, при этом химический состав металла не меняется (последнее свойство, в частности, является необходимым для так называемых проводников первого рода, к которым относятся и металлы). Установка Рикке была достаточно простой.

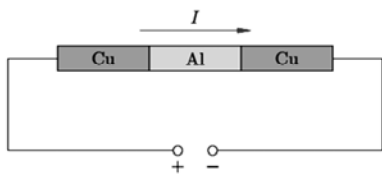


Рис. 19.1. Схема опыта Рикке

В электрическую цепь были включены три плотно прижатых друг к другу цилиндра: два медных по краям и один алюминиевый между ними (рис. 19.1). По этой цепи пропускался электрический ток в течение года.

За год сквозь цилиндры прошел заряд более трех миллионов кулон. Предположим, что каждый атом металла теряет по одному валентному электрону так, что заряд иона равен элементарному заряду  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Если ток создается движением положительных ионов, то нетрудно подсчитать, что величина прошедшего по цепи заряда соответствует переносу вдоль цепи около 2 кг меди.

Однако после разъединения цилиндров было обнаружено лишь незначительное проникновение металлов друг в друга, обусловленное естественной диффузией их атомов (и не более того). Электрический ток в металлах не сопровождается переносом вещества, поэтому положительные ионы металла не принимают участия в создании тока. Это стало экспериментальным доказательством того, что ионы в металлах не участвуют в переносе электричества, а перенос заряда в металлах осуществляется частицами, которые являются общими для всех металлов. Такими частицами могли быть открытые в 1897 г. английским физиком Д. Томсоном (1856–1940 гг.) электроны.

Для доказательства этого предположения необходимо было определить знак и величину удельного заряда носителей (отношение заряда носителя к его массе). Идея подобных опытов заключалась в следующем: если в металле есть подвижные, слабо связанные с решеткой носители тока, то при резком торможении проводника эти частицы должны по инерции смещаться вперед, как смещаются вперед пассажиры, стоящие в вагоне при его торможении. Результатом смещения зарядов должен быть импульс тока; по направлению тока можно определить знак носителей тока, а зная размеры и сопротивление проводника, можно вычислить удельный заряд носителей.

Прямое экспериментальное доказательство того, что электрический ток в металлах создается движением свободных электронов, было дано в опыте Т. Стюарта и Р. Толмена.

Эксперименту Стюарта–Толмена предшествовали качественные наблюдения, сделанные четыремя годами ранее русскими физиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. Они обратили внимание на так называемый электроинерционный эффект: если резко затормозить движущийся проводник, то в нем возникает кратковременный импульс тока. Эффект объясняется тем, что в течение небольшого времени после торможения проводника его свободные заряды продолжают двигаться по инерции.

Однако никаких количественных результатов Манделъштам и Папалекси не получили, и наблюдения их опубликованы не были. Честь назвать опыт своим именем принадлежит Стюарту и Толмену, которые не только наблюдали этот электроинерционный эффект, но и произвели необходимые измерения и расчеты.

**Опыт Стюарта–Толмена.** В опыте Стюарта–Толмена катушка, на которую намотана металлическая проволока, может вращаться

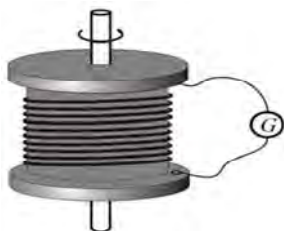


Рис. 19.2. Схема опыта Стюарта–Толмена

вокруг своей оси. Гальванометр подсоединен к катушке с помощью скользящих контактов, что обеспечивает непрерывность электрической цепи и возможность существования в ней электрического тока (рис. 19.2).

В начале эксперимента катушка вращается с постоянной угловой скоростью, затем ее тормозят до полной остановки.

Во время торможения катушки гальванометр регистрирует существование тока в цепи. При этом с помощью гальванометра можно измерить полный электрический заряд, прошедший по цепи за время торможения катушки. Причина возникновения тока в цепи – инертные свойства свободных носителей заряда в проводнике. После начала торможения катушки свободные носители заряда продолжают некоторое время двигаться по инерции и тем самым создают электрический ток в цепи. Направление тока указывало на то, что он вызван движением отрицательных зарядов. Измеряя баллистическим гальванометром суммарный заряд, проходящий по цепи, Стюарт и Толмен вычислили отношение заряда одной частицы к ее массе

$$\frac{g}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.} \quad (19.1)$$

Удельный заряд свободных частиц в металле (19.1) совпал с уже известным в то время удельным зарядом электрона  $\frac{e}{m}$ .

Так было окончательно выяснено, что носителями свободных зарядов в металлах являются свободные электроны. Этот давно и хорошо знакомый факт был установлен сравнительно поздно, учиты-

вая, что металлические проводники к тому моменту уже более столетия активно использовались в самых разнообразных экспериментах по электромагнетизму.

Существование свободных электронов в металлах можно объяснить следующим образом. Металлы в твердом состоянии имеют кристаллическую структуру: расположение атомов в пространстве характеризуется периодической повторяемостью и образует геометрически правильный рисунок, называемый кристаллической решеткой.

Атомы металлов имеют небольшое число валентных электронов, расположенных на внешней электронной оболочке. Эти валентные электроны слабо связаны с ядром, и атом легко может их потерять.

Когда атомы металла занимают места в кристаллической решетке, валентные электроны покидают свои оболочки, становятся сво-

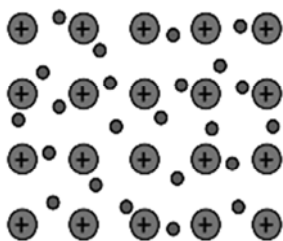


Рис. 19.3. Плоское изображение кристаллической решетки

бодными и отправляются «гулять» по всему кристаллу. В узлах кристаллической решетки металла остаются положительные ионы, пространство между которыми заполнено «газом» свободных электронов (рис. 19.3).

Свободные электроны и впрямь ведут себя подобно частицам газа – совершая тепловое движение, они хаотически перемещаются между ионами кристаллической решетки. Суммарный

заряд свободных электронов равен по модулю и противоположен по знаку общему заряду положительных ионов, поэтому металлический проводник в целом оказывается электрически нейтральным.

Газ свободных электронов является «клеем», на котором держится вся кристаллическая структура проводника. Ведь положительные ионы отталкиваются друг от друга так, что кристаллическая решетка, распираемая изнутри мощными кулоновскими силами, могла бы разлететься в разные стороны. Однако в то же самое время ионы металла притягиваются к обволакивающему их электронному газу и, как ни в чем не бывало, остаются на своих местах, совершая лишь тепловые колебания в узлах кристаллической решетки вблизи положений равновесия.

Электроны проводимости при своем движении сталкиваются с ионами решетки, в результате чего устанавливается термодина-

мическое равновесие между электронным газом и решеткой. По теории Друде–Лоренца электроны обладают такой же энергией теплового движения, что и молекулы одноатомного газа. Поэтому, применяя выводы молекулярно-кинетической теории, можно найти среднюю скорость теплового движения электронов

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (19.2)$$

которая, согласно (19.2) для  $T = 300$  К, равна  $1,1 \cdot 10^5$  м/с. Тепловое движение электронов, являясь хаотическим, не может привести к возникновению тока.

При наложении внешнего электрического поля на металлический проводник, кроме теплового движения электронов, происходит их упорядоченное движение, то есть возникает электрический ток. Сила тока в металлическом проводнике определяется по формуле

$$I = en\langle v \rangle S,$$

где  $I$  – сила тока в проводнике;

$e$  – модуль заряда электрона;

$n$  – концентрация электронов проводимости;

$\langle v \rangle$  – средняя скорость упорядоченного движения электронов;

$S$  – площадь поперечного сечения проводника.

Плотность тока проводимости  $j$  численно равна заряду, проходящему за 1 с через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению тока

$$j = en\langle v \rangle. \quad (19.3)$$

Среднюю скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов можно оценить согласно (19.3). Выбрав допустимую плотность тока, например, для медных проводов  $10^7$  А/м<sup>2</sup>, получим, что при концентрации носителей тока  $n = 8 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup> средняя скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов равна  $7,8 \cdot 10^{-4}$  м/с. Следовательно,  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$ , то есть даже при очень больших плотностях тока сред-

няя скорость упорядоченного движения электронов, обуславливающего электрический ток, значительно меньше скорости их теплового движения. Поэтому при вычислениях результирующую скорость ( $\langle v \rangle + \langle u \rangle$ ) можно заменять скоростью теплового движения  $\langle u \rangle$ .

Казалось бы, полученный результат противоречит факту практически мгновенной передачи электрических сигналов на большие расстояния. Опыт показывает, что электрический ток возникает в цепи практически одновременно с ее замыканием, это связано с тем, что замыкание электрической цепи влечет за собой распространение электрического поля со скоростью света  $c$  ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с).

Следовательно, через время  $t = \frac{l}{c}$  ( $l$  – длина цепи) вдоль цепи устанавливается стационарное электрическое поле и в ней начнется упорядоченное движение электронов. Поэтому электрический ток возникает в цепи практически одновременно с ее замыканием.

## 19.2. Вывод законов Ома, Джоуля–Ленца и Видемана–Франца

**Закон Ома.** Пусть в металлическом проводнике существует электрическое поле напряженностью  $E = \text{const}$ . Со стороны поля заряд  $e$  испытывает действие силы  $F = eE$  и приобретает ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \quad (19.4)$$

Следовательно, во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно (19.4), приобретая к концу свободного пробега скорость

$$v_{\text{max}} = \frac{eE}{m} \langle t \rangle,$$

где  $\langle t \rangle$  – среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Согласно теории Друде, в конце свободного пробега электрон, неупруго сталкиваясь с ионами решетки, полностью отдает им накопленную в поле энергию, поэтому скорость его упорядоченного

движения становится равной нулю. Следовательно, средняя скорость направленного движения электрона

$$\langle v \rangle = \frac{v_{\max} + 0}{2} = \frac{eE}{m} \langle t \rangle. \quad (19.5)$$

Классическая теория электропроводности металлов не учитывает распределения электронов по скоростям, поэтому среднее время  $\langle t \rangle$  свободного пробега определяется средней длиной свободного пробега  $\langle l \rangle$  и средней скоростью движения электронов относительно кристаллической решетки проводника, равной  $\langle v \rangle + \langle u \rangle$ , где  $\langle u \rangle$  – средняя скорость теплового движения электронов. Так как  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$

$$\langle t \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle}.$$

Подставим значение  $\langle t \rangle$  в формулу (19.5), получим

$$\langle v \rangle = \frac{eE}{m} \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle}.$$

Плотность тока в металлическом проводнике по (19.3)

$$j = ne \langle v \rangle = \frac{ne^2 E}{2m} \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle} = \gamma E,$$

откуда видно, что плотность тока пропорциональна напряженности поля, то есть получаем закон Ома в дифференциальной форме. Коэффициент пропорциональности между  $j$  и  $E$  есть не что иное, как удельная проводимость материала

$$\gamma = \frac{ne^2}{2m} \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle}, \quad (19.6)$$

которая тем больше, чем больше концентрация свободных электронов  $n$  и средняя длина их свободного пробега  $\langle l \rangle$ .

**Закон Джоуля–Ленца.** К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию:

$$\langle E_k \rangle = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 E^2}{2m} \frac{\langle l \rangle^2}{\langle u \rangle^2}. \quad (19.7)$$

При неупругом соударении электрона с ионом эта энергия полностью передается решетке и идет на увеличение внутренней энергии металла, то есть на его нагревание.

За единицу времени электрон испытывает с узлами решетки в среднем  $\langle z \rangle$  столкновений:

$$\langle z \rangle = 1 / \langle t \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\langle l \rangle}. \quad (19.8)$$

Если  $n$  – концентрация электронов, то в единицу времени происходит  $n \langle z \rangle$  столкновений и решетке передается энергия

$$w = n \langle z \rangle \langle E_k \rangle, \quad (19.9)$$

которая идет на нагревание проводника. Подставив (19.7) и (19.8) в (19.9), получим энергию, передаваемую решетке в единице объема проводника за единицу времени:

$$w = \frac{ne^2}{2m} \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle} E^2. \quad (19.10)$$

Величина  $w$  является удельной тепловой мощностью тока. Коэффициент пропорциональности между  $w$  и  $E^2$  есть удельная проводимость материала  $\gamma$ ; следовательно, выражение (19.10) – закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.

**Закон Видемана–Франца.** Металлы обладают как большой электропроводностью, так и высокой теплопроводностью. Это объясняется тем, что носителями тока и теплоты в металлах являются



одни и те же частицы – свободные электроны, которые, перемещаясь в металле, переносят не только электрический заряд, но и приносящую им энергию хаотического (теплого) движения, то есть осуществляется перенос теплоты.

Видеманом и Францем в 1853 г. экспериментально установлен закон, согласно которому отношение теплопроводности  $\lambda$  к удельной проводимости  $\gamma$  для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально температуре:

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \beta T,$$

где  $\beta$  – постоянная, не зависящая от рода металла.

Элементарная классическая теория электропроводности металлов позволила найти значение  $\beta$ :

$$\beta = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2, \quad (19.11)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Это значение хорошо согласуется с опытными данными. Однако, как оказалось впоследствии, это согласие теоретического значения с опытом случайно. Лоренц, применив к электронному газу статистику Максвелла–Больцмана, учтя тем самым распределение электронов по скоростям, получил

$$\beta = 2 \left( \frac{k}{e} \right)^2, \quad (19.12)$$

что привело к резкому расхождению теории с опытом (формулы (19.11) и (19.12)).

Таким образом, классическая теория электропроводности металлов объяснила законы Ома и Джоуля–Ленца, а также дала качественное объяснение закону Видемана–Франца. Однако она, помимо рассмотренных противоречий в законе Видемана–Франца, столкнулась еще с рядом трудностей при объяснении различных опытных данных. Ниже рассмотрим некоторые из них.

### 19.3. Границы применимости классической электронной теории проводимости

**Температурная зависимость сопротивления.** Из формулы (19.6) следует, что сопротивление металлов  $R$ , то есть величина, обратно пропорциональная  $\gamma$ , должна возрастать пропорционально  $T^{1/2}$ . Этот вывод электронной теории противоречит опытным данным, согласно которым  $R \sim T$ .

**Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах.** Чтобы по формуле (19.6) получить  $\gamma$ , совпадающие с опытными значениями, надо принимать значительно больше истинных, иными словами, предполагать, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни междоузельных расстояний, что не согласуется с теорией Друде–Лоренца.

**Теплоемкость металлов.** Теплоемкость металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому молярная (то есть рассчитанная на 1 моль) теплоемкость металла должна быть значительно больше атомной теплоемкости диэлектриков, у которых нет свободных электронов. Согласно закону Дюлонга и Пти, теплоемкость одноатомного кристалла равна  $3R$ . Учтем, что теплоемкость одноатомного электронного газа равна  $\frac{3}{2}R$ . Тогда молярная теплоемкость металлов должна

быть близка к  $\frac{9}{2}R$ . Однако опыт доказывает, что она равна  $3R$ ,

то есть для металлов, так же как и для диэлектриков, хорошо выполняется закон Дюлонга и Пти. Следовательно, наличие электронов проводимости практически не сказывается на значении теплоемкости, что не объясняется классической электронной теорией.

Указанные расхождения теории с опытом можно объяснить тем, что движение электронов в металлах подчиняется не законам классической механики, а законам квантовой механики и, следовательно, поведение электронов проводимости надо описывать не статистикой Максвелла–Больцмана, а квантовой статистикой. Поэтому объяснить затруднения элементарной классической теории электропроводности металлов можно лишь квантовой теорией, которая будет рассмотрена ниже.

Однако, нужно отметить, что классическая электронная теория не утратила своего значения и до настоящего времени, так как во многих случаях (например, при малой концентрации электронов проводимости и высокой температуре) она дает правильные качественные результаты и является, по сравнению с квантовой теорией, простой и наглядной.

#### 19.4. Работа выхода электронов из металла

Как показывает опыт, свободные электроны при обычных температурах практически не покидают металл. Следовательно, в поверхностном слое металла должно быть задерживающее электрическое поле, препятствующее выходу электронов из металла в окружающий вакуум. Работа, которую нужно затратить удаление электрона из металла в вакуум, называется *работой выхода*. Укажем две вероятные причины существования работы выхода.

1. Если электрон по какой-то причине удаляется из металла, то в том месте, которое электрон покинул, возникает избыточный положительный заряд и электрон притягивается к индуцированному им самим положительному заряду.

2. Отдельные электроны, покидая металл, удаляются от него на расстояния порядка атомных и создают тем самым над поверхностью металла «электронное облако», плотность которого быстро убывает с расстоянием. Это облако вместе с наружным слоем положительных ионов решетки образует двойной электрический слой, поле которого подобно полю плоского конденсатора. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям ( $10^{-10}$ – $10^{-9}$  м). Он не создает электрического поля во внешнем пространстве, но препятствует выходу свободных электронов из металла.

Таким образом, электрон при вылете из металла должен преодолеть задерживающее его электрическое поле двойного слоя. Разность потенциалов  $\Delta\varphi$  в этом слое, называемая *поверхностным скачком* потенциала, определяется работой выхода  $A$  электрона из металла

$$\Delta\varphi = \frac{A}{e}, \quad (19.13)$$

где  $e$  – заряд электрона.

Так как вне двойного слоя электрическое поле отсутствует, потенциал среды равен нулю, а внутри металла потенциал положителен и равен  $\Delta\phi$ . Потенциальная энергия свободного электрона внутри металла равна  $-e\Delta\phi$  и относительно вакуума является отрицательной. Исходя из этого, можно считать, что весь объем металла для электронов проводимости представляет потенциальную яму с плоским дном, глубина которой равна работе выхода  $A$ .

Работа выхода выражается в электрон-вольтах (эВ): 1 эВ в соответствии с (19.13) равен работе, совершаемой силами поля при перемещении элементарного электрического заряда (заряда, равного заряду электрона) при прохождении им разности потенциалов в 1 В. Так как заряд электрона равен  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, то  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Работа выхода зависит от химической природы металлов и от чистоты их поверхности и колеблется в пределах нескольких электрон-вольт (например, у калия  $A = 2,2$  эВ, у платины  $A = 6,3$  эВ). Подобранным образом покрытие поверхности, можно значительно уменьшить работу выхода. Например, если нанести на поверхность вольфрама ( $A = 4,5$  эВ) слой оксида щелочно-земельного металла (Ca, Sr, Ba), то работа выхода снижается до 2 эВ.

## 19.5. Эмиссионные явления

Если сообщить электронам в металлах энергию, необходимую для преодоления работы выхода, то часть электронов может покинуть металл, в результате чего наблюдается явление испускания электронов, или электронной эмиссии. В зависимости от способа сообщения электронам энергии различают *термоэлектронную*, *фотоэлектронную*, *вторичную электронную* и *автоэлектронную эмиссию*.

**Термоэлектронная эмиссия** – испускание (эмиссия) электронов нагретыми металлами. Концентрация свободных электронов в металлах достаточно высока, поэтому даже при средних температурах, вследствие распределения электронов по скоростям (по энергиям), некоторые электроны обладают энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера на границе металла. С повышением температуры число электронов, кинетическая энергия теплового движения которых больше работы выхода, растет и явление термоэлектронной эмиссии становится заметным.

Исследование закономерностей термоэлектронной эмиссии можно провести с помощью простейшей двухэлектродной лампы – вакуумного диода, представляющего собой баллон, в котором откачан воздух, и который содержит два электрода: катод К и анод А. В простейшем случае катодом служит нить из тугоплавкого металла (например, вольфрама), накаливаемая электрическим током. Анод

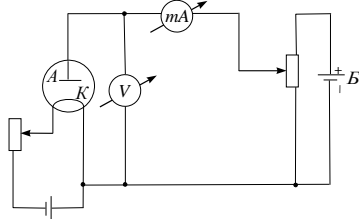


Рис. 19.4. Схема опыта

чаще всего имеет форму металлического цилиндра, окружающего катод. Если диод включить в цепь, как это показано на рис. 19.4, то при накаливании катода и подаче на анод положительного напряжения (относительно катода) в анодной цепи диода возникает ток. Если поменять полярность батареи  $B_a$ , то ток прекращается, как бы сильно катод не накаливали. Следовательно, катод испускает отрицательные частицы – электроны.

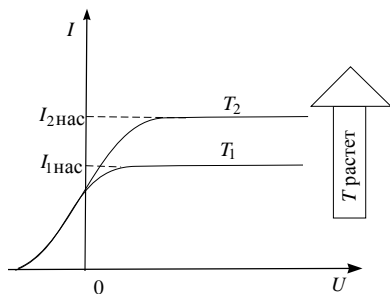


Рис. 19.5. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода

Если поддерживать температуру накаливаемого катода постоянной и снять зависимость анодного тока  $I$  от анодного напряжения  $U$  – вольт-амперную характеристику, то оказывается, что она не является линейной, то есть для вакуумного диода закон Ома не выполняется (рис. 19.5).

**Зависимость термоэлектронного тока  $I$  от анодного напряжения в области малых положительных значений  $U$  описывается законом трех вторых** (установлен русским физиком С. А. Богуславским (1883–1923гг.) и американским физиком И. Ленгмюром (1881–1957 гг.):

$$I = BU^{3/2}, \quad (19.14)$$

где  $B$  – коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов, а также их взаимного расположения.

При увеличении анодного напряжения согласно (19.14) ток возрастает до некоторого максимального значения  $I_{\max}$ , называемого **током насыщения**. Это означает, что почти все электроны, покидающие катод, достигают анода, поэтому дальнейшее возрастание напряженности поля не может привести к увеличению термоэлектронного тока. Следовательно, плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность материала катода.

Плотность тока насыщения определяется формулой Ричардсона–Дешмана, выведенной теоретически на основе квантовой статистики:

$$j_{\text{нас}} = CT^2 \ell \frac{A}{kT},$$

где  $C$  – постоянная, теоретически одинаковая для всех металлов (это не подтверждается экспериментом, что, по-видимому, объясняется поверхностными эффектами);

$T$  – термодинамическая температура;

$A$  – работа выхода электронов из катода.

Уменьшение работы выхода приводит к резкому увеличению плотности тока насыщения. Поэтому применяются оксидные катоды (например, никель, покрытый оксидом щелочно-земельного металла), работа выхода которых составляет от 1 до 1,5 эВ. На рис. 19.5 представлены вольт-амперные характеристики для двух температур катода:  $T_1$  и  $T_2$ , причем  $T_2 > T_1$ . С повышением температуры катода испускание электронов с него интенсивнее, при этом увеличивается и ток насыщения. При  $U = 0$  наблюдается анодный ток, то есть некоторые электроны, испускаемые катодом, обладают энергией, достаточной для преодоления работы выхода и достижения анода без приложения электрического поля.

Явление термоэлектронной эмиссии используется в приборах, в которых необходимо получить поток электронов в вакууме, например, в электронных лампах, рентгеновских трубках, электронных микроскопах и т. д. Электронные лампы применяются в электро- и радиотехнике, автоматике и телемеханике для выпрямления переменных токов, усиления электрических сигналов и переменных токов, генерирования электромагнитных колебаний и т. д. В зависимости от назначения в лампах используются дополнительные управляющие электроды.

**Фотоэлектронная эмиссия** – эмиссия электронов из металла под действием света, а также коротковолнового электромагнитного излучения (например, рентгеновского). Основные закономерности этого явления будут рассмотрены в разделе «Квантовая природа излучения».

**Вторичная электронная эмиссия** – испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов. Вторичный электронный поток состоит из электронов, отраженных поверхностью (упруго и неупруго отраженные электроны), и «истинно» вторичных электронов – электронов, выбитых из металла, полупроводника или диэлектрика первичными электронами.

Отношение числа вторичных электронов  $n_2$  к числу первичных  $n_1$ , вызвавших эмиссию, называется **коэффициентом вторичной электронной эмиссии**

$$\delta = \frac{n_2}{n_1}.$$

Коэффициент  $\delta$  зависит от природы материала поверхности, энергии бомбардирующих частиц и их угла падения на поверхность. У полупроводников и диэлектриков  $\delta$  больше, чем у металлов. Это объясняется тем, что в металлах, где концентрация электронов проводимости велика, вторичные электроны, часто сталкиваясь с ними, теряют свою энергию и не могут выйти из металла. В полупроводниках и диэлектриках из-за малой концентрации электронов проводимости столкновения вторичных электронов с ними происходят гораздо реже, вероятность выхода вторичных электронов из эмиттера возрастает в несколько раз.

Для примера на рис. 19.6 приведена качественная зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии  $\delta$  от энергии  $E$  падающих (первичных) электронов для KCl (хлорида калия). С увеличением

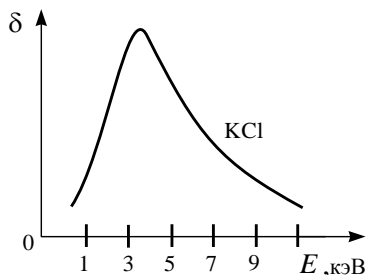


Рис. 19.6. Зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии  $\delta$  от энергии падающих электронов

энергии электронов  $\delta$  возрастает, так как первичные электроны все глубже проникают в кристаллическую решетку и, следовательно, выбивают больше вторичных электронов. Однако при некоторой энергии первичных электронов  $\delta$  начинает уменьшаться. Это связано с тем, что с увеличением глубины проникновения первичных электронов вторичным все труднее вырваться на поверхность. Значение  $\delta_{\max}$  для КС1 достигает  $\approx 12$  (для чистых металлов оно не превышает 2).

Явление вторичной электронной эмиссии используется в фотоэлектронных умножителях (ФЭУ), применяемых для усиления слабых электрических токов. ФЭУ представляет собой вакуумную трубку с фотокатодом К и анодом А, между которыми расположено несколько электродов – эмиттеров (рис. 19.7).

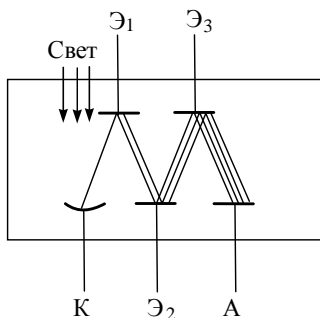


Рис. 19.7. Фотоэлектронный умножитель

Электроны, вырванные из фотокатода под действием света, попадают на эмиттер  $\text{Э}_1$ ; пройдя ускоряющую разность потенциалов между К и  $\text{Э}_1$ , из эмиттера  $\text{Э}_1$  выбивается  $\delta$  электронов. Усиленный таким образом электронный поток направляется на эмиттер  $\text{Э}_2$ , и процесс умножения повторяется на всех последующих эмиттерах. Если ФЭУ содержит  $n$  эмиттеров, то на аноде А, называемом *коллектором*, получается усиленный в  $\delta^n$  раз фотоэлектронный ток.

Если ФЭУ содержит  $n$  эмиттеров, то на аноде А, называемом *коллектором*, получается усиленный в  $\delta^n$  раз фотоэлектронный ток.

**Автоэлектронная эмиссия** – эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля. Эти явления можно наблюдать в откачанной трубке, конфигурация электродов которой (катод–острие, анод–внутренняя поверхность трубки) позволяет при напряжениях примерно  $10^3$  В получать электрические поля напряженностью примерно  $10^7$  В/м. При постепенном повышении напряжения уже при напряженности поля у поверхности катода примерно  $10^5$ – $10^6$  В/м возникает слабый ток, обусловленный электронами, испускаемыми катодом. Сила этого тока увеличивается с повышением напряжения на трубке. Токи возникают при холодном катоде, поэтому описанное явление называется также *холодной эмиссией*. Объяснение механизма этого явления возможно лишь на основе квантовой теории.



## 19.6. Электрический ток в газах

**Опытное подтверждение проводимости газов.** Газы, поскольку состоят из нейтральных молекул, при не слишком высоких температурах и давлениях, близких к атмосферному, являются *хорошими изоляторами*. В случае разрыва цепи источника ЭДС с помощью воздушного зазора (рис. 19.8, *а*) амперметр показывает отсутствие тока в цепи.

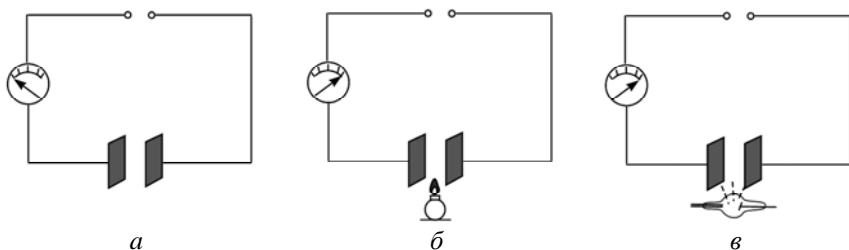


Рис. 19.8. Схема опыта:  
*а* – с воздушным зазором; *б* – с газовой горелкой;  
*в* – с рентгеновским излучением

Газ становится проводником электричества, если некоторая часть его молекул ионизируется, то есть произойдет расщепление нейтральных атомов и молекул на ионы и свободные электроны. Для этого газ необходимо подвергнуть действию ионизатора. Если, например, к воздушному промежутку поднести пламя газовой горелки (рис. 19.8, *б*) или облучить его рентгеновским излучением (рис. 19.8, *в*), то в обоих случаях амперметр регистрирует ток.

## 19.7. Ионизация и рекомбинация газов

При ионизации газов под действием какого-либо ионизатора происходит вырывание из электронной оболочки атома или молекулы одного или нескольких электронов, что приводит к образованию свободных электронов и положительных ионов. Электроны могут присоединяться к нейтральным молекулам и атомам, превращая их в отрицательные ионы. Следовательно, в ионизованном газе есть положительные и отрицательные ионы и свободные электроны. Давайте разберемся, каким образом эти заряды могут появляться в газе.

С увеличением температуры газа тепловые колебания его частиц – молекул или атомов – становятся все интенсивнее. Удары частиц друг о друга достигают такой силы, что начинается **ионизация** – распад нейтральных частиц на электроны и положительные ионы (рис. 19.9).

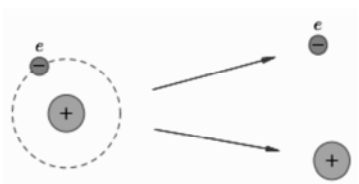


Рис. 19.9. Ионизация

**Степень ионизации** называется отношением числа распавшихся частиц газа к общему исходному числу частиц. Например, если степень ионизации равна 40 %, это

означает, что 40 % исходных частиц газа распалось на положительные ионы и электроны.

Степень ионизации газа зависит от температуры и резко возрастает с ее увеличением. У водорода, например, при температуре ниже 10 000 °С степень ионизации не превосходит 10 %, а при температуре выше 20 000 °С степень ионизации близка к 100 % (то есть водород почти полностью ионизирован).

Помимо высокой температуры есть и другие факторы, вызывающие ионизацию газа. Мы их уже вскользь упоминали: это радиоактивные излучения, ультрафиолетовые, рентгеновские и гамма-лучи, космические частицы. Всякий такой фактор, являющийся причиной ионизации газа, называется **ионизатором**. Для того чтобы выбить из молекулы (атома) один электрон, необходимо затратить определенную энергию, называемую **энергией ионизации**, значения которой для атомов различных веществ лежат в пределах от 4 до 25 эВ.

Таким образом, ионизация происходит не сама по себе, а под воздействием ионизатора. Одновременно идет и обратный процесс – **рекомбинация**, то есть воссоединение электрона и положительного иона в нейтральную частицу (рис. 19.10).

Причина рекомбинации проста: это кулоновское притяжение противоположно заряженных электронов и ионов. Устремляясь навстречу друг другу под действием электрических сил, они

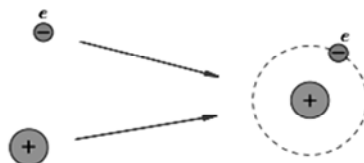


Рис. 19.10. Рекомбинация

встречаются и получают возможность образовать нейтральный атом (или молекулу – в зависимости от вида газа).

При неизменной интенсивности действия ионизатора устанавливается динамическое равновесие: среднее количество частиц, распадающихся в единицу времени, равно среднему количеству рекомбинирующих частиц (иными словами, скорость ионизации равна скорости рекомбинации). Если действие ионизатора усилить (например, повысить температуру), то динамическое равновесие сместится в сторону ионизации и концентрация заряженных частиц в газе возрастет. Наоборот, если выключить ионизатор, рекомбинация начнет преобладать и свободные заряды постепенно исчезнут полностью.

Итак, положительные ионы и электроны появляются в газе в результате ионизации. Откуда же берется третий сорт зарядов – отрицательные ионы? Очень просто: электрон может налететь на нейтральный атом и присоединиться к нему. Этот процесс показан на рис. 19.11.

Образованные таким образом отрицательные ионы будут участвовать в создании тока наряду с положительными ионами и электронами.

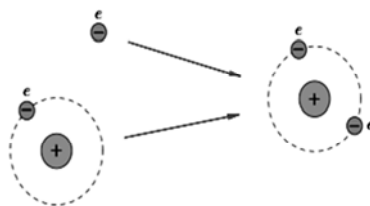


Рис. 19.11. Появление отрицательного иона

## 19.8. Несамостоятельный разряд

Если внешнего электрического поля нет, то свободные заряды совершают хаотическое тепловое движение наряду с нейтральными частицами газа. Но при наложении электрического поля начинается упорядоченное движение заряженных частиц – электрический ток в газе.

На рис. 19.12 мы видим три сорта заряженных частиц, возникающих в газовом промежутке под действием ионизатора: положительные ионы, отрица-

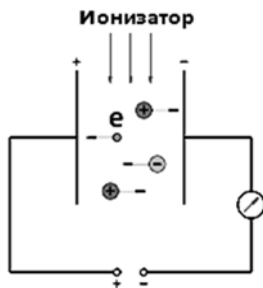


Рис. 19.12. Несамостоятельный разряд

тельные ионы и электроны. Электрический ток в газе образуется в результате встречного движения заряженных частиц: положительных ионов – к отрицательному электроду (катоду), электронов и отрицательных ионов – к положительному электроду (аноду).

Электроны, попадая на положительный анод, направляются по цепи к «плюсу» источника тока. Отрицательные ионы отдают аноду лишний электрон и, став нейтральными частицами, возвращаются обратно в газ; отданный же аноду электрон также устремляется к «плюсу» источника. Положительные ионы, приходя на катод, забирают оттуда электроны; возникший дефицит электронов на катоде немедленно компенсируется их доставкой туда с «минуса» источника. В результате этих процессов возникает упорядоченное движение электронов во внешней цепи. Это и есть электрический ток, регистрируемый гальванометром.

Описанный процесс, изображенный на рис. 19.12, называется *несамостоятельным разрядом* в газе. Почему несамостоятельным? Потому что для его поддержания необходимо постоянное действие ионизатора. Уберем ионизатор – ток прекратится, поскольку исчезнет механизм, обеспечивающий появление свободных зарядов в газовом промежутке. Пространство между анодом и катодом снова станет изолятором.

**Вольт-амперная характеристика газового разряда.** Зависимость силы тока через газовый промежуток от напряжения между анодом и катодом (так называемая вольт-амперная характеристика газового разряда) показана на рис. 19.13.

При нулевом напряжении сила тока, естественно, равна нулю: заряженные частицы совершают лишь тепловое движение, упорядоченного движения между электродами нет.

На участке кривой *OA* сила тока возрастает пропорционально напряжению, то есть выполняется закон Ома. При дальнейшем увеличении напряжения закон Ома нарушается: рост силы тока замедляется (участок *AB*) и, наконец, прекращается совсем (участок *BC*). Это достигается в том случае, когда ионы и электроны, создаваемые



Рис. 19.13. Вольт-амперная характеристика газового разряда

внешним ионизатором за единицу времени, за это же время достигают электродов. В результате получаем ток насыщения  $I_{\text{нас}}$ , значение которого определяется мощностью ионизатора. Ток насыщения является мерой ионизирующего действия ионизатора. Если в режиме *OC* прекратить действие ионизатора, то прекращается и разряд. Разряды, существующие только под действием внешних ионизаторов, называются *несамостоятельными*. При дальнейшем увеличении напряжения между электродами сила тока вначале медленно (участок *CD*), а затем резко (участок *DE*) возрастает. Рассмотрим механизм этого явления.

### 19.9. Самостоятельный газовый разряд и его типы

Разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется *самостоятельным*.

Рассмотрим условия возникновения самостоятельного разряда. Как уже указывалось раньше, при больших напряжениях между электродами газового промежутка (см. рис. 19.13) ток сильно возрастает (участки *CD* и *DE* на рис. 19.13). При больших напряжениях возникающие под действием внешнего ионизатора электроны, сильно ускоренные электрическим полем, сталкиваясь с нейтральными молекулами газа, ионизируют их, в результате чего образуются вторичные электроны и положительные ионы (процесс 1 на рис. 19.14). Положительные ионы движутся к катоду, а электроны – к аноду. Вторичные электроны вновь ионизируют молекулы газа, и, следовательно, общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере продвижения электронов к аноду лавинообразно. Это является причиной увеличения электрического тока на участке *CD* (см. рис. 19.13). Описанный процесс называется *ударной ионизацией*.

Однако ударная ионизация под действием электронов недостаточна для поддержания разряда при удалении внешнего ионизатора. Для этого необходимо, чтобы электронные лавины «воспроизводились», то есть чтобы в газе под действием каких-то процессов возникали новые электроны. Такие процессы схематически показаны на рис. 19.14:

– ускоренные электрическим полем положительные ионы, ударяясь о катод, выбивают из него электроны (процесс 2);

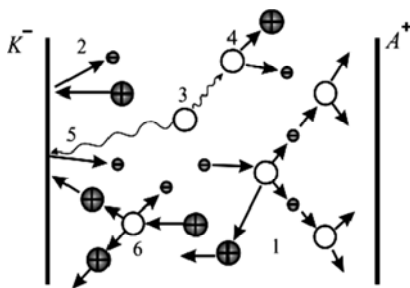


Рис. 19.14. Схематическое изображение самостоятельного газового разряда

– выбивание электронов из катода под действием фотонов (процесс 5);

– при значительных напряжениях между электродами газового промежутка наступает момент, когда положительные ионы, обладающие меньшей длиной свободного пробега, чем электроны, приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа (процесс 6), и к отрицательной пластине устремляются ионные лавины. Когда помимо электронных лавин возникают еще и ионные, сила тока растет уже практически без увеличения напряжения (участок  $DE$  на рис. 19.13).

В результате описанных процессов (1–6) число ионов и электронов в объеме газа лавинообразно возрастает и разряд становится самостоятельным, то есть сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором возникает самостоятельный разряд, называется **напряжением пробоя**.

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно говорить о четырех типах самостоятельного разряда: *тлеющем, искровом, дуговом и коронном*.

**Тлеющий разряд** возникает при низких давлениях. Если к электродам, впаянным в стеклянную трубку длиной 30–50 см, приложить постоянное напряжение в несколько сотен вольт, постепенно откачивая из трубки воздух, то при давлении  $\approx 5,3$ – $6,7$  кПа возникает разряд в виде светящегося извилистого шнура, идущего от катода к аноду. При дальнейшем понижении давления шнур утолщается, и при давлении  $\approx 13$  Па разряд имеет вид, схематически изображенный на рис. 19.15.

– положительные ионы, сталкиваясь с молекулами газа, переводят их в возбужденное состояние; переход таких молекул в основное состояние сопровождается испусканием фотонов (процесс 3);

– фотон, поглощенный нейтральной молекулой, ионизирует ее, происходит процесс фотонной ионизации молекул (процесс 4);

Непосредственно к катоду прилегает тонкий светящийся слой 1 – *первое катодное свечение*, или *катодная пленка*, затем следует темный слой 2 – *катодное темное пространство*, переходящее

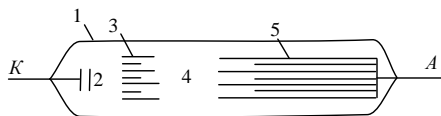


Рис. 19.15. Схематическое изображение тлеющего разряда

в дальнейшем в светящийся слой 3 – *тлеющее свечение*, имеющее резкую границу со стороны катода, постепенно исчезающую со стороны анода. Оно возникает из-за рекомбинации электронов с положительными ионами. С тлеющим свечением граничит темный промежуток 4 – *фарадеево темное пространство*, за которым следует столб ионизированного светящегося газа 5 – *положительный столб*. Положительный столб в поддержании разряда существенной роли не играет. Например, при уменьшении расстояния между электродами трубки его длина сокращается, в то время как катодные части разряда по форме и величине остаются неизменными.

В тлеющем разряде особое значение для его поддержания имеют только две его части: катодное темное пространство и тлеющее свечение. В катодном темном пространстве происходит сильное ускорение электронов и положительных ионов, выбивающих электроны с катода (вторичная эмиссия). В области тлеющего свечения происходит ударная ионизация электронами молекул газа. Образующиеся при этом положительные ионы устремляются к катоду и выбивают из него новые электроны, которые, в свою очередь, опять ионизируют газ и т. д. Таким образом, непрерывно поддерживается тлеющий разряд.

При дальнейшем откачивании трубки при давлении  $\approx 1,3$  Па свечение газа становится более слабым и начинают светиться стенки трубки. Электроны, выбиваемые из катода положительными ионами, при таких разрежениях редко сталкиваются с молекулами газа и поэтому, ускоренные полем, ударяясь о стекло, вызывают его свечение, так называемую *катодолюминесценцию*. Поток этих электронов исторически получил название *катодных лучей*. Если в катоде просверлить малые отверстия, то положительные ионы, бомбардирующие катод, пройдя через отверстия, проникают в пространство за катодом и образуют резко ограниченный пучок, получивший название *каналовых* (или положительных) *лучей*, названных по знаку заряда, который они несут.

Тлеющий разряд широко используется в технике. Так как свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет, то его используют в газосветных трубках для светящихся надписей и реклам (например, неоновые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргоновые – синева-зеленое). В лампах дневного света, более экономичных, чем лампы накаливания, излучение тлеющего разряда, происходящее в парах ртути, поглощается нанесенным на внутреннюю поверхность трубки флуоресцирующим веществом (*люминофором*), начинающим под воздействием поглощенного излучения светиться. Спектр свечения при соответствующем подборе люминофоров близок к спектру солнечного излучения. Тлеющий разряд используется для **катодного напыления** металлов. Вещество катода в тлеющем разряде вследствие бомбардировки положительными ионами, сильно нагреваясь, переходит в парообразное состояние. Помещая вблизи катода различные предметы, их можно покрыть равномерным слоем металла.

**Искровой разряд** (рис. 19.16) возникает при больших напряженностях электрического поля ( $\approx 3 \cdot 10^6$  В/м) в газе, находящемся под давлением порядка атмосферного. Искра имеет вид ярко светящегося тонкого канала, сложным образом изогнутого и разветвленного.

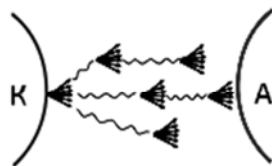


Рис. 19.16. Искровой разряд

Объяснение искрового разряда дается на основе **стримерной теории**, согласно которой возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабосветящихся скоплений ионизованного газа – стримеров. Стримеры возникают не только в результате образования электронных лавин посредством ударной ионизации, но и в результате фотонной ионизации газа. Лавины, догоняя друг друга, образуют проводящие мостики из стримеров, по которым в следующие моменты времени устремляются мощные потоки электронов, образующие каналы искрового разряда. Из-за выделения большого количества энергии газ в искровом промежутке нагревается до очень высокой температуры, что приводит к его свечению. Быстрый нагрев газа ведет к повышению давления и возникновению ударных волн, объясняющих звуковые эффекты при искровом разряде – характерное потрескивание в слабых разрядах и



мощные раскаты грома в случае молнии, являющейся примером мощного искрового разряда между грозовым облаком и Землей или между двумя грозовыми облаками.

Искровой разряд используется для воспламенения горючей смеси в двигателях внутреннего сгорания и предохранения электрических линий передачи от перенапряжений (искровые разрядники). При малой длине разрядного промежутка искровой разряд вызывает разрушение (эрозию) поверхности металла, поэтому он применяется для электроискровой точной обработки металлов (резание, сверление). Его используют в спектральном анализе для регистрации заряженных частиц (искровые счетчики).

**Дуговой разряд.** Если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами, то разряд становится непрерывным – возникает дуговой разряд. Сила тока резко возрастает, достигая сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до нескольких десятков вольт.

Дуговой разряд можно получить от источника низкого напряжения, минуя стадию искры. Для этого электроды (например, угольные) сближают до соприкосновения, они сильно раскаляются электрическим током, потом их разводят и получают электрическую дугу (именно так она была открыта В. В. Петровым). При атмосферном давлении температура катода приблизительно равна 3900 К. По мере горения дуги угольный катод заостряется, а на аноде образуется углубление – кратер, являющийся наиболее горячим местом дуги.

По современным представлениям дуговой разряд поддерживается за счет высокой температуры катода из-за интенсивной термоэлектронной эмиссии, а также термической ионизации молекул, обусловленной высокой температурой газа. Дуговой разряд широко применяется при сварке и резке металлов, получении высококачественных сталей (дуговая печь) и освещении (прожекторы, проекционная аппаратура). Широко применяются также дуговые лампы с ртутными электродами в кварцевых баллонах, где дуговой разряд возникает в ртутном паре при откачанном воздухе. Дуга, возникающая в ртутном паре, является мощным источником ультрафиолетового излучения и используется в медицине (например, кварцевые лампы). Дуговой разряд при низких давлениях в парах ртути используется в ртутных выпрямителях для выпрямления переменного тока.

**Коронный разряд** – высоковольтный электрический разряд при высоком (например, атмосферном) давлении в резко неоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности (например, острия). Когда напряженность поля вблизи острия достигает 30 кВ/см, то вокруг него возникает свечение, имеющее вид короны, чем и вызвано название этого вида разряда.

В зависимости от знака коронирующего электрода различают отрицательную и положительную корону. В случае отрицательной короны рождение электронов, вызывающих ударную ионизацию молекул газа, происходит за счет эмиссии их из катода под действием положительных ионов, в случае положительной короны – вследствие ионизации газа вблизи анода. В естественных условиях корона возникает под влиянием атмосферного электричества у вершин мачт (на этом основано действие молниеотводов), деревьев. Вредное действие короны вокруг проводов высоковольтных линий передачи проявляется в возникновении вредных токов утечки. Для их снижения провода высоковольтных линий делаются толстыми. Коронный разряд, являясь прерывистым, становится также источником радиопомех.

Используется коронный разряд в электрофильтрах, применяемых для очистки промышленных газов от примесей. Газ, подвергаемый очистке, движется снизу вверх в вертикальном цилиндре, по оси которого расположена коронирующая проволока. Ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней части короны, оседают на частицах примеси и увлекаются полем к внешнему не коронирующему электроду и на нем оседают. Коронный разряд применяется также при нанесении порошковых и лакокрасочных покрытий.

## 19.10. Плазма и ее свойства

**Плазмой** называется сильно ионизованный газ, в котором концентрации положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Различают *высокотемпературную плазму*, возникающую при сверхвысоких температурах, и *газоразрядную плазму*, возникающую при газовом разряде. Плазма характеризуется *степенью ионизации*  $\alpha$  – отношением числа ионизованных частиц к полному их числу в единице объема плазмы. В зависимости от величины  $\alpha$  говорят

о *слабо* ( $\alpha$  составляет доли процента), *умеренно* ( $\alpha$  – несколько процентов) и *полностью* ( $\alpha$  близко к 100%) *ионизированной плазме*.

Заряженные частицы (электроны, ионы) газоразрядной плазмы, находясь в ускоряющем электрическом поле, имеют разную среднюю кинетическую энергию. Это означает, что температура электронного  $T_e$  и ионного  $T_n$  газов различна, причем  $T_e > T_n$ . Несоответствие этих температур указывает на то, что газоразрядная плазма является неравновесной, поэтому она называется также ***неизотермической***. Убыль числа заряженных частиц в процессе рекомбинации в газоразрядной плазме восполняется ударной ионизацией электронами, ускоренными электрическим полем. Прекращение действия электрического поля приводит к исчезновению газоразрядной плазмы.

Высокотемпературная плазма является равновесной, или изотермической, то есть при определенной температуре убыль числа заряженных частиц восполняется в результате термической ионизации. В такой плазме соблюдается равенство средних кинетических энергий, составляющих плазму различных частиц. В состоянии подобной плазмы находятся звезды, звездные атмосферы, Солнце. Их температура достигает десятков миллионов градусов.

Условием существования плазмы является некоторая минимальная плотность заряженных частиц, начиная с которой можно говорить о плазме как таковой. Эта плотность определяется в физике плазмы из неравенства  $L \gg D$ , где  $L$  – линейный размер системы заряженных частиц,  $D$  – так называемый дебаевский радиус экранирования, представляющий собой то расстояние, на котором происходит экранирование кулоновского поля любого заряда плазмы.

Плазма обладает следующими свойствами:

- высокой степенью ионизации газа, в пределе – полной ионизацией;
- равенством нулю результирующего пространственного заряда (концентрация положительных и отрицательных частиц в плазме практически одинакова);
- большой электропроводностью, причем ток в плазме создается в основном электронами, как наиболее подвижными частицами;
- свечением;
- сильным взаимодействием с электрическим и магнитным полями;

– колебаниями электронов в плазме с большой частотой ( $\approx 10^8$  Гц), вызывающими общее вибращионное состояние плазмы;

– «коллективным» – одновременным взаимодействием громадного числа частиц (в обычных газах частицы взаимодействуют друг с другом попарно).

Эти свойства определяют качественное своеобразие плазмы, позволяющее считать ее особым, четвертым, состоянием вещества.

Изучение физических свойств плазмы дает возможность, с одной стороны, решать многие проблемы астрофизики, поскольку в космическом пространстве плазма – наиболее распространенное состояние вещества, а с другой – открывает принципиальные возможности осуществления управляемого термоядерного синтеза. Основным объектом исследований по управляемому термоядерному синтезу является высокотемпературная плазма ( $\approx 10^8$  К) из дейтерия и трития.

Низкотемпературная плазма ( $< 10^5$  К) применяется в газовых лазерах, термоэлектронных преобразователях и магнетогидродинамических генераторах (МГД-генераторах) – установках для непосредственного преобразования тепловой энергии в электрическую, в плазменных ракетных двигателях, весьма перспективных для длительных космических полетов.

Низкотемпературная плазма, получаемая в плазмотронах, используется для резки и сварки металлов, для получения некоторых химических соединений (например, галогенидов инертных газов), которые не удается получить другими способами, и т. д.

## 20. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 20.1. Магнитное поле. Вектор магнитного момента. Индукция и напряженность магнитного поля. Принцип суперпозиции

Явление магнетизма известно из глубокой древности. Началом изучения магнитного поля можно считать 1269 г., когда французский ученый Петр Перегрин экспериментально получил картину линий индукции поля сферического магнита. В 1819 г. Ханс Кристиан Эрстед обнаружил, что если над проводником с током поместить магнитную стрелку, то она повернется перпендикулярно проводнику с током. Из опытов Эрстеда следовало, что магнитное поле оказывает силовое воздействие и имеет направленный характер. В 1820 г. Андре Анри Ампер дал объяснение магнетизму, предположив существование замкнутых микротоков внутри атомов вещества.

Магнитное поле оказывает действие на движущиеся заряды, то есть на электрический ток. Верно и обратное, что электрический ток создает вокруг себя магнитное поле. Кроме этого, магнитное поле оказывает действие на тела, обладающие магнитным моментом независимо от того, движутся они или нет.

**Вектор магнитного момента**  $\vec{p}_m$  плоского контура с током равен произведению силы тока  $I$ , текущего по контуру, на площадь контура  $S$

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости контура.

**Магнитный момент**  $p_m$  плоского контура с током численно равен произведению силы тока  $I$ , текущего по контуру, на площадь контура  $S$

$$p_m = ISn,$$

Направление магнитного момента можно найти по правилу буравчика: если вращать ручку буравчика в направлении протекания

тока, то направление магнитного момента будет совпадать с направлением поступательного движения буравчика (рис. 20.1).

Для произвольного замкнутого контура магнитный момент находится как

$$\vec{p}_m = \frac{I}{2} \oint_L [\vec{r}, d\vec{l}],$$

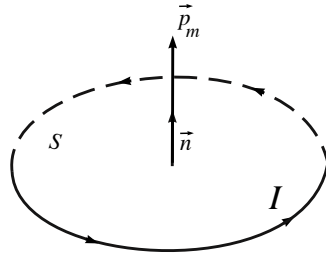


Рис. 20.1. Вектор магнитного момента  $\vec{p}_m$  плоского контура с током

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из начала координат до элемента контура  $d\vec{l}$ .

Поместим контур с током в магнитное поле. Со стороны магнитного поля на контур с током будет действовать вращательный момент  $M$ , в результате чего контур повернется.

Количественной характеристикой действия магнитного поля на контур с током служит магнитная индукция  $\vec{B}$ . **Модуль магнитной индукции** – величина, равная отношению максимального вращательного момента  $M_{\max}$ , действующего на контур с током, к величине магнитного момента контура

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}.$$

Магнитное поле имеет направленный характер и может быть описано силовыми линиями магнитной индукции  $\vec{B}$  (рис. 20.2, 20.3).

**Линиями магнитной индукции**  $\vec{B}$  называют линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

**Однородным магнитным полем** называется магнитное поле, величина и направление вектора индукции  $\vec{B}$  которого во всех точках поля одинаковы. В противном случае магнитное поле является неоднородным.

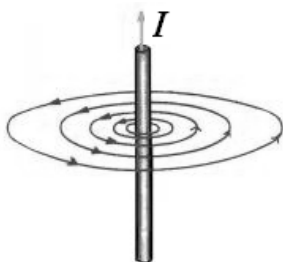


Рис. 20.2. Линии индукции магнитного поля линейного проводника с током

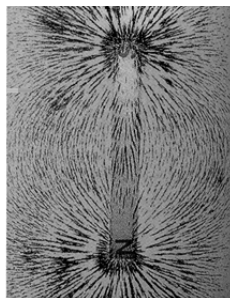


Рис. 20.3. Линии индукции магнитного поля постоянного магнита

Густота линий индукции определяется величиной индукции магнитного поля: чем больше величина магнитной индукции, тем гуще расположены линии индукции магнитного поля.

Экспериментально полученные картины линий индукции проводников с токами показывают, что линии индукции магнитного поля всегда замкнуты.

На рис. 20.2–20.3 показаны линии индукции магнитных полей линейного проводника с током и постоянного магнита. Для линейных проводников с током линии индукции магнитного поля представляют собой концентрические окружности, центры которых расположены на проводниках с током.

Магнитное поле характеризуется напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$ . Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  можно определить следующим образом. Сила, с которой магнитное поле притягивает железные тела, пропорциональна значению протекающего по проводнику тока. Если есть катушка из проводника с электрическим током, то чем больше витков имеет катушка, тем больше магнитная сила. *Ампер-витками*, или *магнитодвижущей силой*, называют произведение силы тока  $I$  на число витков  $N$  катушки.

Тогда *величиной напряженности магнитного поля* называется величина ампер-витков (магнитодвижущей силы), приходящаяся на единицу длины катушки:

$$H = \frac{IN}{l},$$

где  $l$  – длина катушки.

Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  определяется силой тока и геометрией проводника, создающего магнитное поле, и не зависит от магнитных свойств среды. Поэтому напряженность магнитного поля описывает внешнее макроскопическое поле, создаваемое проводниками с током, то есть так называемыми токами проводимости. В отличие от индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  не является силовой характеристикой, в чем и заключается некоторая историческая «путаница» в названиях характеристик. Индукция магнитного поля  $\vec{B}$  связана не только с токами проводимости, но и с молекулярными токами в веществе.

Для однородной изотропной среды между индукцией магнитного поля  $\vec{B}$  и напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$  существует взаимосвязь

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость среды, показывающая, во сколько раз сила магнитного взаимодействия в данной среде отличается от силы взаимодействия в вакууме;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная, или абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

Для магнитного поля выполняется **принцип суперпозиции: вектор индукции результирующего магнитного поля, создаваемого несколькими токами (или их элементами, а также движущимися зарядами) равен векторной сумме индукций магнитных полей, создаваемых этими токами (или их элементами, а также движущимися зарядами) в отдельности:**

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i,$$

где  $N$  – число токов.



На рис. 20.4 показана суперпозиция магнитных полей для двух проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$  в точке поля  $A$ , расположенной на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от первого и второго проводника соответственно.

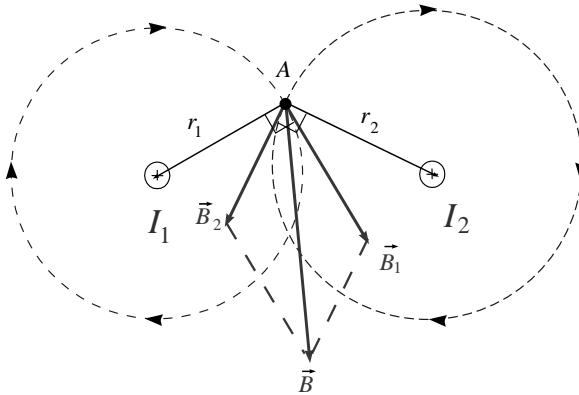


Рис. 20.4. Иллюстрация принципа суперпозиции для двух проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$

## 20.2. Магнитное поле тока. Закон Био–Савара–Лапласа и его применение для расчетов магнитного поля (магнитное поле прямолинейного проводника с током и магнитное поле кругового тока)

Направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  прямолинейного проводника с током  $I$  (рис. 20.5, *a*) определяется по **правилу буравчика (правовращающий винт)**: если направление поступательного движения острия буравчика совпадает с направлением тока  $I$  в проводнике, то направление вращения ручки буравчика совпадает с направлением вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  в центре витка с током.

Для контура с током (рис. 20.5, *б, в*) правило буравчика применяется следующим образом: если направление вращения ручки буравчика совпадает с направлением тока  $I$  в контуре, то поступательное движение буравчика совпадает с направлением вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ .

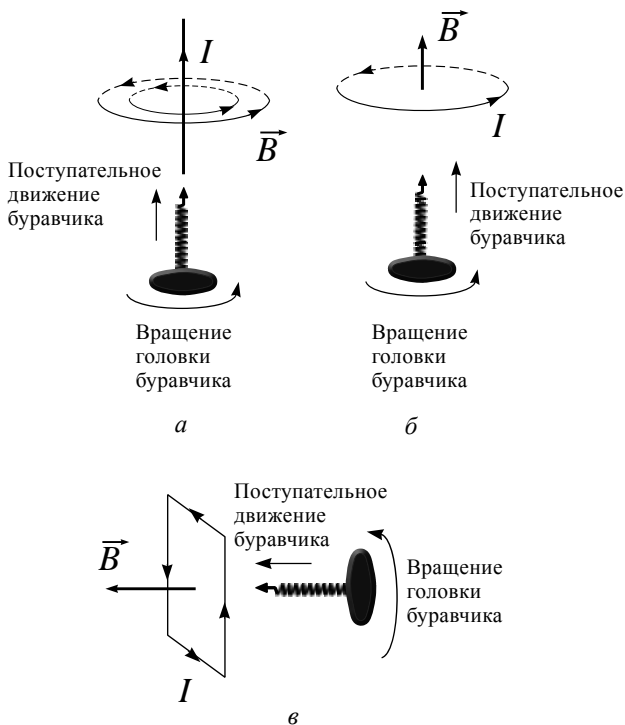


Рис. 20.5. Определение направления вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  с помощью правила буравчика:  
*a* – прямолинейного проводника с током; *б* – кругового витка с током;  
*в* – прямоугольного контура с током

Пусть по проводнику произвольной конфигурации течет постоянный ток  $I$  (рис. 20.6). Разобьем проводник с током на бесконечно малые участки  $d\vec{l}$ . В силу малости на каждом из участков  $d\vec{l}$  кривизной проводника можно пренебречь и рассматривать их как отрезки прямой.

**Элементом тока**  $I d\vec{l}$  называется векторная величина, численно равная произведению силы тока в элементарном участке  $d\vec{l}$  проводника на величину этого участка.

Направление элемента тока  $I d\vec{l}$  совпадает с направлением силы тока  $I$  в элементе  $d\vec{l}$  проводника.

Индукцию магнитного поля постоянного тока, текущего по проводнику любой конфигурации, в любой точке поля можно вычислить с помощью закона Био–Савара–Лапласа: индукция магнитного поля постоянного тока  $I$ , текущего по проводнику любой конфигурации, может быть вычислена как суперпозиция индукций магнитных полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока  $d\vec{l}$ , при этом индукция магнитного поля каждого элементарного участка тока  $d\vec{l}$  определяется как

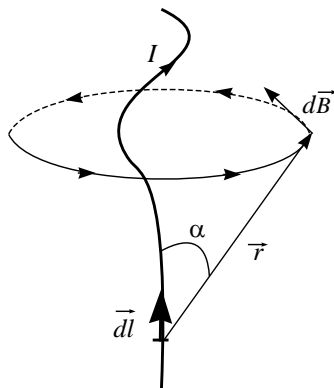


Рис. 20.6. К определению вектора индукции магнитного поля проводника с током

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I \left[ d\vec{l}, \vec{r} \right]}{r^3},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от элемента с током  $d\vec{l}$  в точку пространства, в которой определяется индукция магнитного поля (рис. 20.6).

Модуль индукции магнитного поля элемента  $d\vec{l}$  с током  $I$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha, \quad (20.1)$$

где  $r$  – модуль радиус-вектора  $\vec{r}$ ;

$\alpha$  – угол между направлением тока в элементе  $d\vec{l}$  и радиус-вектором  $\vec{r}$ .

Рассмотрим применение закона Био–Савара–Лапласа для определения индукции магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током  $I$  в точке поля, расположенной на расстоянии  $b$  от проводника с током. Разобьем проводник на бесконечно малые элементы с током  $d\vec{l}$  (рис. 20.7). Все векторы  $\vec{B}$  от элементов

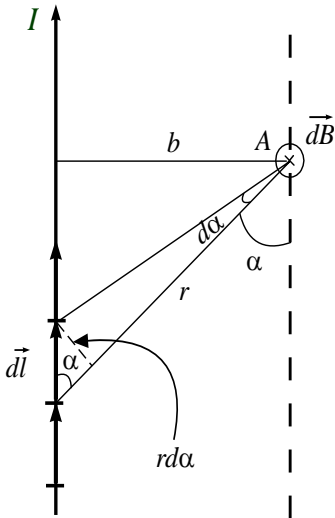


Рис. 20.7. К определению индукции магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током  $I$  в точке поля  $A$ , расположенной на расстоянии  $b$  от проводника

с током  $d\vec{l}$  направлены за чертой (см. рис. 20.7), при этом

$$r = \frac{b}{\sin \alpha},$$

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставляя выражения для  $r$  и  $dl$  в закон Био-Савара-Лапласа (20.1), получим

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I b d\alpha \sin^3 \alpha}{4\pi b^2 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\mu_0 \mu I \sin \alpha d\alpha}{4\pi b}.$$

Проинтегрируем последнее выражение в пределах изменения угла  $\alpha$  от 0 до  $\pi$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 \mu I}{4\pi b} \cos \alpha \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi b} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi b}.$$

Таким образом, выражение для индукции бесконечного прямолинейного проводника с током имеет вид

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi b},$$

где  $b$  – расстояние от проводника с током до точки поля, в которой вычисляется величина индукции магнитного поля  $B$ .

Определим величину индукции магнитного поля в произвольной точке на оси кругового витка радиуса  $R$ , по которому течет ток  $I$

(рис. 20.8). Для этого разобьем виток с током длиной  $L = 2\pi R$  на элементарные участки длиной  $dl$ .

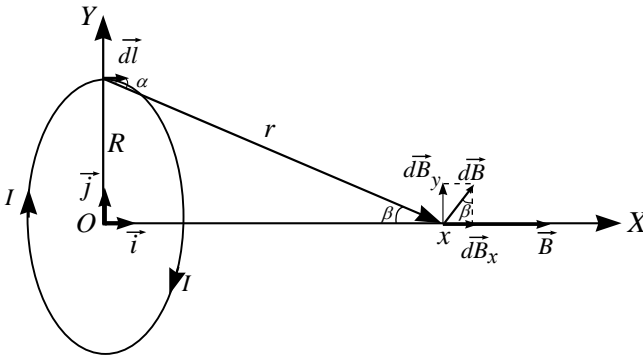


Рис. 20.8. К определению индукции магнитного поля на оси кругового витка с током

Индукция магнитного поля  $\vec{B}$  в произвольной точке на оси соленоида, согласно принципу суперпозиции, будет определяться суперпозицией индукций  $\vec{B}$ , создаваемых элементарными участками  $d\vec{l}$  кругового витка с током:

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}.$$

Разложим вектор  $\vec{B}$  на проекции по осям  $OX$  и  $OY$  (см. рис. 20.8):

$$d\vec{B} = dB_x \vec{i} + dB_y \vec{j},$$

где  $dB_x = dB_x \vec{i}$ ;

$dB_y = dB_y \vec{j}$ .

Тогда

$$\vec{B} = \int_L dB_x \vec{i} + \int_L dB_y \vec{j}.$$

В силу симметрии суммарная индукция магнитного поля от всех элементарных участков  $d\vec{l}$  по оси  $OY$  будет равна нулю

$$\int_L d\vec{B}_y = 0.$$

Индукция магнитного поля  $\vec{B}$  в любой точке на оси витка

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}_x.$$

Поскольку векторы индукций магнитного поля  $d\vec{B}_x$  от всех элементов  $d\vec{l}$  витка направлены вдоль оси  $OX$ , то модуль индукции магнитного поля всего кругового витка с током

$$B = \int_L dB_x. \quad (20.2)$$

По закону Био–Савара–Лапласа индукция магнитного поля, создаваемого элементарным участком  $d\vec{l}$  с током, в среде

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \alpha \sin \alpha}{r^2}.$$

Так как угол  $\alpha$  между радиус-вектором  $\vec{r}$  и  $d\vec{l}$  равен  $90^\circ$ , то

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}. \quad (20.3)$$

Из рис. 20.8 видно, что

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}, \quad (20.4)$$

где  $x$  – текущая координата точки на оси кругового витка.

Проекция вектора  $\vec{B}$  на ось  $OX$

$$dB_x = dB \sin \beta = dB \frac{R}{r}. \quad (20.5)$$

Подставляя выражения (20.3) и (20.4) в формулу (20.5), получим

$$dB_x = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{IRdl}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Подставим последнее выражение в уравнение (20.2) и проинтегрируем по длине кругового витка

$$B = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{IRdl}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl.$$

Тогда величина модуля индукции магнитного поля в точке, расположенной на оси кругового витка с током на расстоянии  $x$  от его центра, определяется следующим образом:

$$B = \frac{\mu_0 \mu IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (20.6)$$

Используя выражение (20.6), получим индукцию магнитного поля в центре кругового витка с током ( $x = 0$ ):

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}.$$

Таким образом, величина индукции магнитного поля  $B$  в точке на оси кругового витка с током зависит от величины тока  $I$  в витке, радиуса витка  $R$ , текущей координаты  $x$  точки на оси кругового витка и магнитных свойств среды  $\mu$ .

### 20.3. Взаимодействие параллельных токов. Сила Ампера. Магнитная постоянная

Если проводник, по которому течет ток, находится в магнитном поле, то на каждый носитель тока действует сила

$$\vec{F} = e[\vec{u}, \vec{B}],$$

где  $\vec{u}$  – скорость упорядоченного движения носителей заряда.

Пусть  $n$  – концентрация носителей заряда в проводнике (рис. 20.9).

Тогда в элементе проводника с током  $d\vec{l}$  содержится  $dN$  носителей заряда

$$dN = nSdl,$$

где  $S$  – площадь сечения проводника.

Сила, действующая на элемент проводника с током, равна

$$d\vec{F} = \vec{F}dN = \vec{F}nSdl = [(\vec{e}n\vec{u}), \vec{B}]Sdl$$

или

$$d\vec{F} = [\vec{j}, \vec{B}]Sdl, \quad (20.7)$$

Рис. 20.9. К определению силы Ампера

где  $\vec{j} = \vec{e}n\vec{u}$  – плотность тока.

Так как направления  $\vec{j}$  и  $d\vec{l}$  совпадают и  $jS = I$ , то

$$\vec{j}Sdl = jSd\vec{l} = Id\vec{l}. \quad (20.8)$$

Тогда, подставляя выражение (20.8) в (20.7), получим формулу, выражающую **силу Ампера**:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}].$$



Сила Ампера  $d\vec{F}$ , с которой магнитное поле действует на элемент проводника с током  $d\vec{l}$ , находится в магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока  $I$  в проводнике и векторному произведению элемента длины проводника  $d\vec{l}$  на вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

Сила Ампера, действующая в магнитном поле  $\vec{B}$  на проводник конечной длины  $L$  с током  $I$ :

$$\vec{F} = I \int_L [d\vec{l}, \vec{B}],$$

где интеграл берется по всей длине проводника.

Величина силы Ампера для прямолинейного проводника с током  $I$ , находящимся в однородном магнитной поле с индукцией  $\vec{B}$ , определяется следующим образом:

$$dF = IdlB\sin \alpha, \quad (20.9)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением тока в проводнике и вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

Применим силу Ампера для вычисления силы взаимодействия двух параллельных бесконечно длинных проводников, по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$  соответственно (рис. 20.10). Пусть расстояние между проводниками равно  $b$  и токи  $I_1$  и  $I_2$  текут в одном направлении (рис. 20.10, а).

Сила  $d\vec{F}_{12}$  – это сила, действующая со стороны поля, создаваемого проводником с током  $I_2$ , на проводник с током  $I_1$ ; сила  $d\vec{F}_{21}$  – сила, действующая со стороны поля, создаваемого проводником с током  $I_1$ , на проводник с током  $I_2$ . По третьему закону Ньютона  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Найдем силу  $F_{21\text{ед.дл.}}$ , действующую на проводник с током  $I_2$  единичной длины.

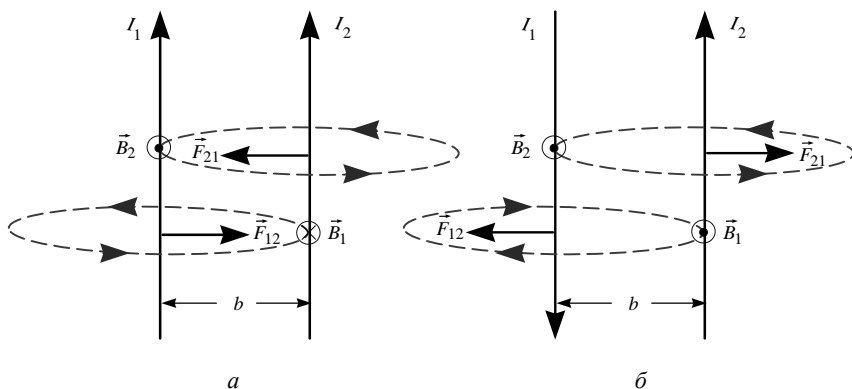


Рис. 20.10. Взаимодействие двух проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$ :  
 $a$  – токи одного направления;  $b$  – токи противоположных направлений

Каждый элемент тока  $I_2$  будет находиться в поле, создаваемом проводником с током  $I_1$ , индукция магнитного поля которого

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi b}. \quad (20.10)$$

Угол  $\alpha$  между элементами тока  $I_2$  и индукцией магнитного поля  $\vec{B}_1$  составляет  $90^\circ$ . Тогда, используя выражение для силы Ампера (20.9), получим формулу, определяющую силу, действующую на единицу длины проводника с током  $I_2$ :

$$F_{21\text{ед.дл.}} = I_2 l B_1, \quad l = 1;$$

$$F_{21\text{ед.дл.}} = I_2 B_1.$$

Подставляя формулу (20.10) в последнее выражение, получим

$$F_{21\text{ед.дл.}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}, \quad (20.11)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Выражение, аналогичное (20.11), можно получить, рассматривая взаимодействие токов, текущих в проводниках в противоположных направлениях (рис. 20.10, б).

С помощью выражения (20.11) можно определить величину магнитной постоянной  $\mu_0$ . Магнитная постоянная  $\mu_0$  – коэффициент, входящий в выражения некоторых законов электромагнетизма при записи их в форме, соответствующей Международной системе единиц (СИ). В системе СИ ампер является основной единицей и по определению, принятому IX Генеральной конференцией по мерам и весам (ГКМВ) в 1948 году: «**Ампер** есть сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н».

Используя выражение (20.11), получим

$$2 \cdot 10^{-7} = \frac{\mu_0 \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1}.$$

Откуда получаем точное значение

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = \text{Н/А}^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}.$$

В 2011 г. XXIV ГКМВ приняла резолюцию, в которой предлагается в будущем переопределить несколько основных единиц СИ, включая ампер, так, чтобы основные единицы определялись только на фундаментальных физических постоянных или свойствах атомов.

В резолюции предлагается, что в СИ величина элементарного электрического заряда  $e$  будет иметь точное значение, равное  $1,60217 \cdot 10^{-19}$  Кл, тогда новое определение ампера будет основано на этом точном значении элементарного заряда, выраженного в с·А.

Следствием такого подхода к определению ампера станет изменение статуса магнитной постоянной: как отмечается в резолюции ГКМВ, сразу после предполагаемого переопределения ампера значение магнитной постоянной будет равно  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м, но это зна-

чение приобретает погрешность и в дальнейшем будет определяться экспериментально.

#### 20.4. Действие магнитного поля на движущийся заряд.

##### Сила Лоренца

Опыт показывает, что магнитное поле действует не только на проводники с током, но и на отдельные заряды, движущиеся в нем. Оно не действует на покоящийся электрический заряд. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического.

На заряженную частицу  $q$ , движущуюся в магнитном поле со скоростью  $\vec{v}$ , действует сила Лоренца

$$\vec{F}_л = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (20.12)$$

где  $\vec{B}$  – вектор индукции магнитного поля.

Из (20.12) следует, согласно правилам векторного произведения векторов, что сила  $\vec{F}_л$  направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы скорости  $\vec{v}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$ . Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она меняет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает. Иными словами, постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Модуль силы Лоренца равен

$$F_л = qvB \sin \alpha, \quad (20.13)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором скорости  $\vec{v}$  и вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

Согласно формуле (20.12) направление силы Лоренца определяется знаком заряда  $q$ . Если заряд  $q$  положительный, то направление силы  $F_л$  совпадает с направлением вектора  $[\vec{v}, \vec{B}]$  (рис. 20.11, а). Си-

ла Лоренца, действующая на отрицательно заряженную частицу, будет направлена в сторону противоположную оси Z (рис. 20.11, б).

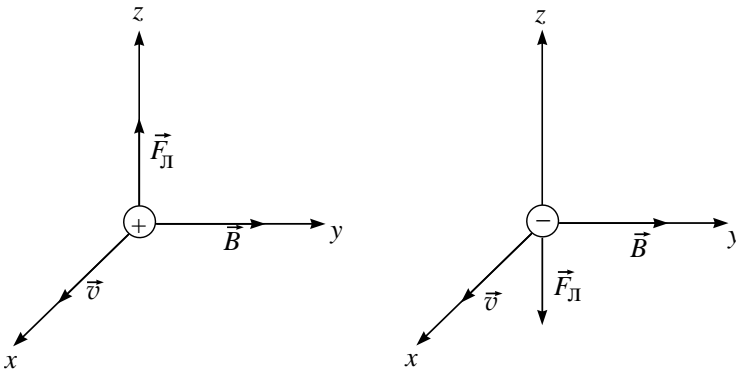


Рис. 20.11. Действие силы Лоренца  $F_{\text{л}}$ :  
 а – на положительно заряженные частицы;  
 б – на отрицательно заряженные частицы

В общем случае, когда заряженная частица движется со скоростью  $\vec{v}$  под углом  $\alpha$  к линиям индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , направление силы Лоренца определяется **правилом буравчика**, которое формулируется следующим образом: **направление силы Лоренца, действующей на положительный заряд, совпадает с направлением поступательного движения буравчика при вращении рукоятки буравчика от вектора  $\vec{v}$  к вектору  $\vec{B}$  по кратчайшему расстоянию.**

Согласно этому правилу, сила Лоренца, действующая на положительный заряд, вектор скорости  $\vec{v}$  которого и вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  лежат в плоскости листа (рис. 20.12, а), перпендикулярна плоскости листа и направлена за лист («от нас»). Для отрицательного заряда сила Лоренца перпендикулярна плоскости листа и направлена от листа («на нас») (рис. 20.12, б), так как

$$\vec{F}_{\text{л}} = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

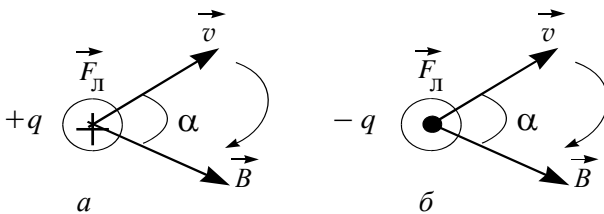


Рис. 20.12. Определение направления силы Лоренца по правилу буравчика:  
*a* – для положительно заряженных частиц;  
*б* – отрицательно заряженных частиц

Направление силы Лоренца можно определять также по правилу левой руки: если расположить левую руку так, чтобы четыре вытянутых пальца совпали с направлением скорости движения положительно заряженной частицы, а составляющая вектора магнитной индукции, перпендикулярная скорости заряда, вошла в ладонь, то отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы Лоренца. Правило левой руки удобно применять в случае, когда угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  равен  $90^\circ$ .

На рис. 20.13 показана взаимная ориентация векторов  $\vec{B}$ ,  $\vec{v}$  (поле  $\vec{B}$  направлено от нас, на рисунке показано крестиками) и  $\vec{F}_L$  для положительного и отрицательного заряда.

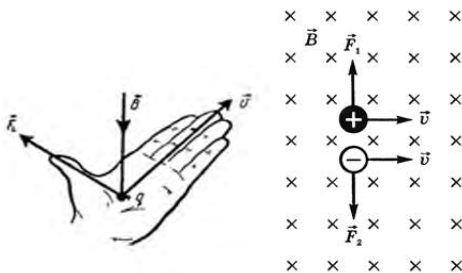


Рис. 20.13. Применение правила левой руки

Если на движущийся электрический заряд, помимо магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$ , действует и электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , то вектор результирующей силы  $\vec{F}$ , приложенной к заряду, равен векторной сумме сил – силы, действующей со стороны электрического поля, и силы Лоренца:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Это выражение называется *формулой Лоренца*, или *обобщенной силой Лоренца*. Скорость  $\vec{v}$  в этой формуле есть скорость заряда в данной системе отсчета.

## 20.5. Движение заряженной частицы в магнитном поле

Работа силы Лоренца может быть вычислена по формуле

$$A = \vec{F}_L \vec{S} = F_L S \cos \left( \vec{F}_L \wedge \vec{S} \right), \quad (20.14)$$

где  $\vec{S}$  – вектор перемещения частицы.

Из (20.12) следует, что сила Лоренца всегда перпендикулярна вектору скорости  $\vec{v}$  заряженной частицы и, следовательно, перпендикулярна вектору перемещения частицы  $\vec{S}$ . Тогда в выражении (20.14)

$\cos \left( \vec{F}_L \wedge \vec{S} \right) = \cos 90^\circ = 0 = 0$ , и работа силы Лоренца равна нулю.

Таким образом, **сила Лоренца, действующая со стороны однородного магнитного поля на движущуюся заряженную частицу, работы не совершает**. Следовательно, кинетическая энергия частицы при движении в однородном магнитном поле не изменяется, то есть величина скорости движения частицы остается постоянной.

Для вывода основных закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле будем полагать, что магнитное поле однородно.

Рассмотрим три случая движения заряженной частицы в магнитном поле:

1. Частица движется в магнитном поле со скоростью  $\vec{v}$  вдоль линий магнитной индукции, то есть угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  равен 0 или  $\pi$ .

2. Частица движется в магнитном поле со скоростью  $\vec{v}$ , перпендикулярной вектору магнитной индукции (рис. 20.14).

3. Частица движется со скоростью  $\vec{v}$ , вектор которой направлен под произвольным углом  $\alpha$  к вектору  $\vec{B}$  (рис. 20.15).

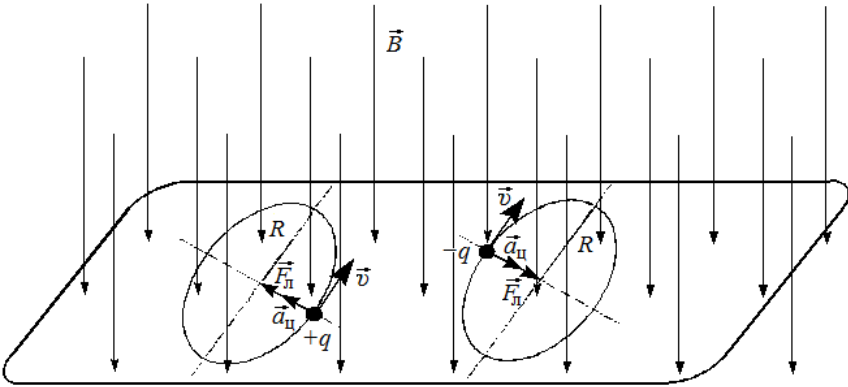


Рис. 20.14. Движение заряженных частиц под действием силы Лоренца в магнитном поле в случае, когда вектор скорости  $\vec{v}$  перпендикулярен вектору магнитной индукции  $\vec{B}$

В первом случае сила Лоренца, согласно формуле (20.13), равна нулю. Магнитное поле на частицу не действует, и заряженная частица движется равномерно и прямолинейно вдоль линии индукции магнитного поля.

Во втором случае (см. рис. 20.14) сила Лоренца сообщает частице только центростремительное ускорение. Поэтому частица будет двигаться по окружности радиуса  $R$  с периодом обращения  $T$ .

Для определения радиуса окружности  $R$  воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a}_{\text{ц}} = \vec{F}_{\text{л}}.$$

Центростремительное ускорение сообщает частице только сила Лоренца, поэтому

$$ma_{\text{ц}} = qvB,$$

так как  $\sin \left( v \wedge \vec{B} \right) = \sin 90^\circ = 1$ .



Поскольку

$$a_{ц} = \frac{v^2}{R},$$

то

$$m \frac{v^2}{R} = qvB. \quad (20.15)$$

Из (20.15) находим выражение для радиуса окружности  $R$ , по которой движется частица:

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (20.16)$$

Учитывая, что длина окружности  $L$  равна

$$L = 2\pi R,$$

вычислим период обращения  $T$  частицы по окружности:

$$T = \frac{L}{v} = \frac{2\pi R}{v}.$$

С учетом (20.16) получим:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (20.17)$$

Из выражения (20.17) следует, что период обращения  $T$  не зависит от модуля скорости движения частицы  $\vec{v}$ , а определяется величиной индукции поля  $\vec{B}$  и отношением  $q/m$ , называемым **удельным зарядом заряженной частицы**.

В третьем случае, когда угол  $\alpha \neq 90^\circ$ , траектория движения частицы представляет собой винтовую линию, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 20.15).

Разложим вектор скорости  $\vec{v}$  на две составляющие: параллельную и перпендикулярную полю  $\vec{B}$ , величины которых соответственно равны:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha,$$

$$v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

Тогда сила Лоренца, действующая на частицу, может быть представлена в виде

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}] + q[\vec{v}_{\parallel}, \vec{B}]. \quad (20.18)$$

Так как векторы  $\vec{v}_{\parallel}$  и  $\vec{B}$  сонаправлены, второе слагаемое в (20.18) равно нулю. Поэтому действие силы Лоренца обусловлено только перпендикулярной составляющей скорости частицы:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}_{\perp}, \vec{B}]. \quad (20.19)$$

В этом случае частица будет двигаться по окружности с центростремительным ускорением  $\vec{a}_{\perp}$ , сообщаемым силой Лоренца (20.19). Радиус окружности  $R$  согласно (20.16) будет равен:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}.$$

Период обращения по окружности  $T$  определяется формулой (20.17).

Движение частицы вдоль линий магнитного поля  $\vec{B}$  представляет собой равномерное прямолинейное движение с постоянной ско-

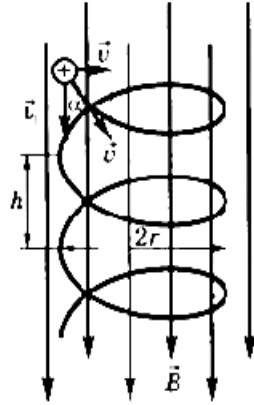


Рис. 20.15. Движение заряженной частицы в магнитном поле по винтовой линии

ростью  $v_{\Pi}$ . За время одного полного оборота  $T$  частица сместится вдоль направления индукции поля  $\vec{B}$  на расстоянии  $h$ , равное

$$h = v_{\Pi}T = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB}.$$

Величина  $h$  называется *шагом винтовой линии* (см. рис. 20.15). Направление, в котором закручивается винтовая линия, зависит от знака заряда частицы.

Если скорость  $\vec{v}$  заряженной частицы составляет угол  $\alpha$  с направлением вектора  $\vec{B}$  неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то  $R$  и  $h$  уменьшаются с ростом  $B$ . На этом основана фокусировка заряженных частиц в магнитном поле.

## 20.6. Ускорители заряженных частиц

*Ускорителями* заряженных частиц называются устройства, в которых под действием электрических и магнитных полей создаются и управляются пучки высокоэнергетических заряженных частиц (электронов, протонов, мезонов и т. д.).

Любой ускоритель характеризуется типом ускоряемых частиц, разбросом частиц по энергиям и интенсивностью пучка. Ускорители подразделяются на *непрерывные* (равномерный во времени пучок) и *импульсные* (в них частицы ускоряются порциями – импульсами). Последние характеризуются длительностью импульса.

По форме траектории и механизму ускорения частиц ускорители делятся на *линейные*, *циклические* и *индукционные*. В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических и индукционных траекториями частиц являются окружности или винтовые линии.

Рассмотрим некоторые типы ускорителей заряженных частиц.

### Линейные ускорители

**Линейный ускоритель.** Ускорение частиц осуществляется электростатическим полем, создаваемым, например, высоковольтным генератором Ван де Граафа. Заряженная частица проходит поле од-

нократно: заряд  $q$ , проходя ускоряющую разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , приобретает кинетическую энергию  $W = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Таким способом частицы ускоряются до  $\approx 10$  МэВ. Их дальнейшее ускорение с помощью источников постоянного напряжения невозможно из-за утечки зарядов, пробоев и т. д.

**Линейный резонансный ускоритель.** Ускорение заряженных частиц осуществляется переменным электрическим полем сверхвысокой частоты, синхронно изменяющимся с движением частиц. Таким способом протоны ускоряются до энергий порядка десятков мегаэлектронвольт, электроны – до десятков гигаэлектронвольт.

В линейных резонансных ускорителях (рис. 20.16) частица подвергается многократному ускорению, пролетая сквозь ряд цилиндрических трубок, присоединенных к электрическому генератору высокой частоты (используют радиочастотные генераторы). Пучок частиц движется вдоль оси трубок. Внутри каждой трубки электрическое поле равно нулю. Соседние трубки имеют противоположную полярность. Таким образом, ускоряющее поле высокой частоты с напряжением порядка сотен кВ находится в зазорах между трубками. Частота генератора и размеры трубок подбираются так, чтобы пучок ускоряемых частиц подходил к очередному зазору в тот момент, когда полярность трубок изменяется на противоположную.

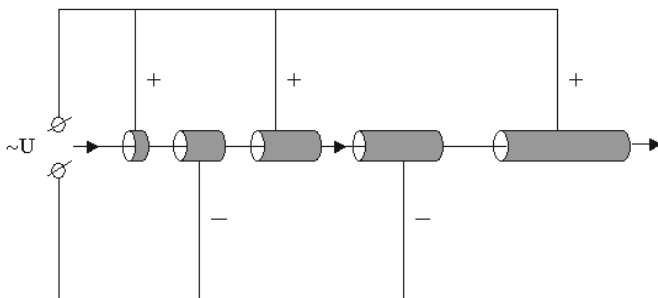


Рис. 20.16. Схема линейного ускорителя

Длина трубки  $l_n$ , скорость частицы  $v_n$  и частота ускоряющего поля  $\nu$  связаны соотношением

$$l_n = \frac{v_n}{2\nu}.$$

Так как скорость частицы увеличивается при прохождении очередного ускоряющего промежутка, длины ускоряющих трубок также увеличиваются. После прохождения  $n$  ускоряющих промежутков частица приобретет кинетическую энергию  $W_n = nqU$ . В нерелятивистском приближении скорость частицы  $v_n = \sqrt{\frac{2nqU}{m}}$  и длина  $l_n$  соответствующей дрейфовой трубки возрастает пропорционально  $\sqrt{n}$ . Когда частица достигает релятивистских скоростей, длина трубок становится постоянной.

### Циклические ускорители

**Циклотрон** – циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов). Принципиальная схема циклотрона приведена на рис. 20.17.

Между полюсами сильного электромагнита помещается вакуумная камера, в которой находятся два электрода в виде полых металлических полуцилиндров, или дуантов 3. К дуантам приложено переменное электрическое поле 5. Магнитное поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно плоскости дуантов.

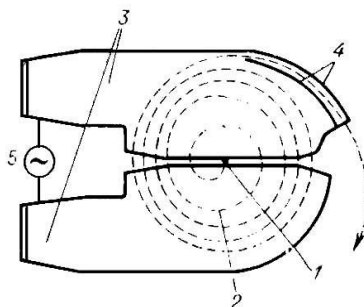


Рис. 20.17. Схема циклотрона

Если заряженную частицу ввести в центр зазора 1 между дуантами, то она, ускоряемая электрическим и отклоняемая магнитными полями, войдет в дуант и опишет полуокружность, радиус которой пропорционален скорости частицы. К моменту ее выхода из первого дуанта полярность напряжения изменяется (при соответствующем подборе изменения напряжения между дуантами), поэтому частица вновь ускоряется и, переходя во второй дуант, описывает там полуокружность уже большего радиуса 2 и т. д.

Для непрерывного ускорения частицы в циклотроне необходимо выполнять условие синхронизма (условие «резонанса») – периоды

вращения частицы в магнитном поле и колебаний электрического поля должны быть равны. При выполнении этого условия частица будет двигаться по раскручивающейся спирали, получая при каждом прохождении через зазор дополнительную энергию. На последнем витке, когда энергия частиц и радиус орбиты доведены до максимально допустимых значений, пучок частиц посредством отклоняющего электрического поля выводится из циклотрона 4.

В циклотронах заряженная частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  ускоряется до скоростей, при которых релятивистский эффект увеличения массы частицы практически не проявляется. Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Радиус траектории частицы

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

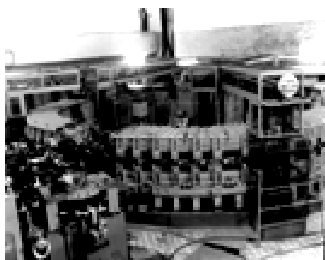
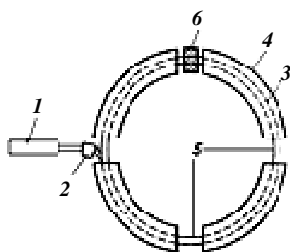
Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий примерно 20 МэВ. Дальнейшее их ускорение в циклотроне ограничивается релятивистским возрастанием массы со скоростью, что приводит к увеличению периода обращения (он пропорционален массе) и синхронизм нарушается. Поэтому циклотрон совершенно неприменим для ускорения электронов (при  $E = 0,5$  МэВ,  $m = 2m_0$ , при  $E = 10$  МэВ,  $m = 28m_0$ ).

Ускорение релятивистских частиц в циклических ускорителях можно осуществить, если применять **принцип автофазировки**, предложенный в 1944 г. советским физиком В. И. Векслером (1907–1966) и в 1945 г. американским физиком Э. Мак-Милланом (1907–1991). Его идея заключается в том, что для компенсации увеличения периода вращения частиц, ведущего к нарушению синхронизма, изменяют либо частоту ускоряющего электрического поля, либо индукцию магнитного, либо то и другое. Принцип автофазировки используется в фазотроне, синхротроне и синхрофазотроне.

**Фазотрон** (синхроциклотрон) – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (например, протонов, ионов,

$\alpha$ -частиц), в котором управляющее магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля медленно изменяется с периодом. Движение частиц в фазотроне, как и в циклотроне, происходит по раскручивающейся спирали. Частицы в фазотроне ускоряются до энергий примерно равных 1 ГэВ (ограничения здесь определяются размерами фазотрона, так как с ростом скорости частиц растет радиус их орбиты).

**Синхротрон** – циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов, в котором управляющее магнитное поле изменяется во времени, а частота ускоряющего электрического поля постоянна (рис. 20.18). На рис. 20.18, *а* схематически изображен синхротрон: 1 – инжектор электронов; 2 – поворотный магнит; 3 – пучок электронов; 4 – управляющий электромагнит; 5 – вакуумная тороидальная камера; 6 – ускоряющий промежуток.



*а*

*б*

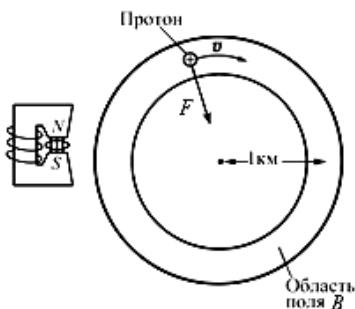
Рис. 20.18. Синхротрон:  
*а* – схема; *б* – вид действующего ускорителя

Внешний вид Томского синхротрона на 1,5 ГэВ представлен на фотографии (рис. 20.18, *б*). Электроны в разных синхротронах ускоряются до энергий 5–10 ГэВ.

**Синхрофазотрон** – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов), в котором объединяются свойства фазотрона и синхротрона. Здесь управляющее магнитное поле и частота ускоряющего электрического поля одновременно изменяются во времени так, чтобы радиус равновесной орбиты частиц оставался постоянным. На фотографии (рис. 20.19, *а*) изображен Серпуховской синхрофазотрон У-70 на энергию 70 ГэВ.



*a*



*б*

Рис. 20.19. Синхрофазотрон:  
*a* – серпуховский У-70; *б* – схема

Рассмотрим действие лоренцевой силы и рассчитаем энергию протонного ускорителя, представляющего собой кольцевой магнит диаметром 2 км. Между полюсами этого магнита расположена тороидальная вакуумная камера, в которую инжектирован пучок протонов. Если смотреть на ускоритель сверху (рис. 20.19, *б*), то пучок протонов движется по часовой стрелке со скоростью  $v$ , близкой к скорости света.

На протон действует центростремительная сила, направленная к центру. Если поле  $B$  направлено из плоскости чертежа, то сила Лоренца всегда направлена к центру.

Центростремительная сила Лоренца равна

$$F_{\text{ц}} = m_r \frac{v^2}{R},$$

где  $m_r$  – релятивистская масса протона.

Так как эта сила обусловлена действием магнитного поля, то

$$m_r \frac{v^2}{R} = evB.$$

Поскольку  $v \approx c$ , то можно записать  $mc^2 = evBR$  – так можно рассчитать полную релятивистскую энергию протонов.



Заметим, что магнитное поле не увеличивает скорость или энергию частиц. Ускорение протонов осуществляется при каждом их обороте в кольце за счет электростатического поля, которое действует на коротком участке кольца.

В фазотронах, микротронах, синхротронах и синхрофазотронах частицы ускоряются до релятивистских скоростей. Масса частицы  $m$  зависит от ее скорости  $v$ :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы;

$\beta = \frac{v}{c}$  – отношение скорости частицы  $v$  к скорости света  $c$  в вакууме.

Кинетическая энергия частицы

$$W = E - E_0,$$

где  $E = mc^2$  – полная энергия частицы;

$E_0 = m_0c^2$  – энергия покоя частицы.

Импульс релятивистской частицы

$$p = \frac{\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}}{c}.$$

Период обращения релятивистской частицы

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2\pi E}{qBc^2}.$$

Радиус окружности траектории релятивистской частицы

$$R = \frac{m_0v}{qB\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

**Бетатрон** – единственный циклический ускоритель (электронов) нерезонансного типа, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем.

Электродвижущая сила индукции, создаваемая переменным магнитным полем, может существовать и в отсутствие проводников. Энергия  $W$ , передаваемая вихревым электрическим полем единичному положительному заряду, равна контурному интегралу по замкнутой траектории  $L$ :

$$W = \varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Согласно закону Фарадея, этот интеграл равен изменению магнитного потока через замкнутый контур  $L$ . Таким образом, вихревое электрическое поле может действовать на сгусток электронов, двигающихся в изменяющемся магнитном поле, и ускорять их.

При определенных условиях движение электронов происходит в переменном магнитном поле по орбите постоянного радиуса и является устойчивым, причем энергия электронов увеличивается за счет вихревого электрического поля, создаваемого изменяющимся магнитным потоком, пронизывающим орбиту частиц. Циклический индукционный ускоритель электронов данного типа называется **бетатроном**.

Бетатрон (рис. 20.20, *а*) состоит из тороидальной вакуумной камеры (рис. 20.20, *в*), помещающейся между полюсами электромагнита специальной формы (рис. 20.20, *б*). Обмотка электромагнита питается переменным током с частотой  $\nu \approx 100$  Гц.

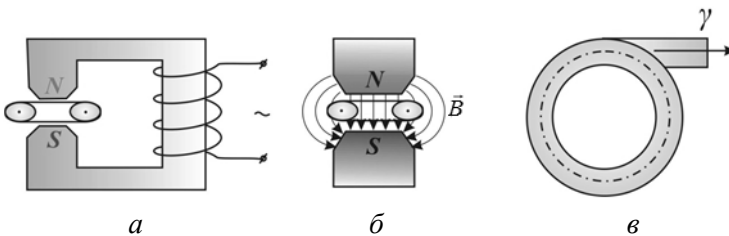


Рис. 20.20. Бетатрон:

*а* – схема; *б* – электромагнит; *в* – тороидальная вакуумная камера

Переменное магнитное поле выполняет две функции: во-первых, создает вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны внутри тороида; во-вторых, удерживает электроны на орбите (линии индукции располагаются так, чтобы пучок электронов находился в состоянии устойчивого равновесия в центре тора).

За время порядка  $10^{-3}$  с электроны успевают сделать до  $10^6$  оборотов и приобрести энергию до 500 МэВ (сотни МэВ в разных ускорителях). При такой энергии скорость электронов близка к скорости света ( $v \approx c$ ). Кроме того, сам же пучок электронов в данном случае выполняет роль вторичной обмотки трансформатора.

В конце цикла ускорения включается дополнительное магнитное поле, которое отклоняет электроны от стационарной орбиты и направляет их на специальную мишень, расположенную внутри камеры. Попадая на мишень, электроны тормозятся в ней и испускают жесткие  $\gamma$ -лучи или рентген, которые используются в ядерных исследованиях при неразрушающих методах контроля, в медицине и т. д.

Благодаря простоте конструкции, дешевизне и удобству использования бетатроны особенно широко применяются в прикладных целях в диапазоне энергии 20–50 МэВ. Используется непосредственно сам электронный пучок или тормозное  $\gamma$ -излучение, энергия которого может плавно изменяться.

## Ускорители большого адронного коллайдера

БАК (Большой адронный коллайдер) – это крупнейший в мире и самый мощный ускоритель частиц (рис. 20.21–20.24). В электрических и магнитных полях ускоренные частицы достигают огромных энергий.

**Большой адронный коллайдер** – это типичный (хотя и сверхмощный) ускоритель заряженных частиц на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжелых ионов (ионов свинца) и изучения продуктов их соударений. Само слово «коллайдер» происходит от английского *collide* – сталкиваться. В коллайдере два пучка частиц летят навстречу друг другу и при столкновении энергии пучков складываются. Тогда как в обычных ускорителях, которые строятся и работают вот уже несколько десятилетий (первые их модели, относительно умеренных размеров и мощности, появились

еще в 30-х годах XX века), пучок ударяет по неподвижной мишени и энергия такого соударения гораздо меньше. «Адронным» коллайдер назван, потому что предназначается для разгона адронов. Адроны – это семейство элементарных частиц, к которому относятся протоны и нейтроны, из них состоят ядра всех атомов, а также разнообразные мезоны. Важным свойство адронов является то, что они состоят из кварков, «склеенных» глюонами.

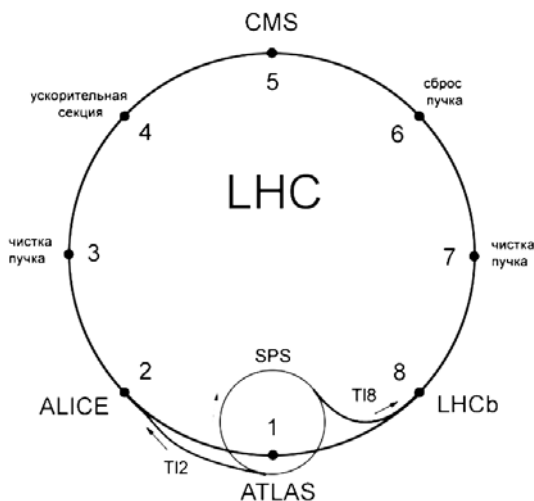


Рис. 20.21. Общий вид ускорительного кольца БАК



Рис. 20.22. Протонный синхротрон

В круговом ускорителе пучок частиц проходит многократно круговые петли, в линейном ускорителе пучок частиц движется от одного конца до другого. В БАКе для достижения более высоких энергий пучков частиц используется ряд последовательно объединенных ускорителей.



Рис. 20.23. Супер-протонный синхротрон

Первый ускоритель в цепи ускоряет протоны до энергии 50 МэВ. Для того, чтобы атомы водорода потеряли свои электроны и остались только протоны, их пропускают через электрическое поле. К тому времени, когда протоны достигают другого конца ускорителя, они приобретают энергию 50 МэВ и прибавляют 5 % по массе.

Разогнанные протоны поступают в протонный синхротрон, который состоит из четырех наложенных синхротронных колец. Получив пучки протонов с энергией 50 МэВ, синхротрон ускоряет их до 1,4 ГэВ.

Ускоренные пучки протонов поступают в следующий протонный синхротрон (PS), который является важнейшим компонентом в ЦЕРНЕ. Окружность ускорителя 628 метров, электромагниты находятся при обычной комнатной температуре. Кроме протонов, ускоритель ускоряет альфа-частицы (ядра гелия), ядра кислорода и серы, другие ядра, электроны.

Далее протоны направляются в Super Proton Synchrotron (SPS) – супер-протонный синхротрон, где они ускоряются до 450 ГэВ.

СПС имеет семикилометровую окружность и разгоняет поставленные пучки до энергий 450 ГэВ. Он имеет 1317 электромагнитов при обычной комнатной температуре. Ускоритель умеет работать с различными видами частиц: ядрами серы и кислорода, электронами, позитронами, протонами и антипротонами. Пучки протонов с энергиями 450 ГэВ поступают в Большой адронный коллайдер.

БАК – это крупнейший в мире и самый мощный ускоритель частиц. Он начал свою работу 10 сентября 2008 г. и остается последним дополнением к ускорительному комплексу в ЦЕРН. БАК со-

стоит из 27-километрового кольца ускоряющих структур – сверхпроводящих магнитов.

Внутри ускорителя два высокоэнергетических пучка частиц, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. Пучки движутся в противоположных направлениях в отдельных трубах, в которых поддерживается состояние сверхвысокого вакуума. В ускорителе имеется три отдельные вакуумные системы:

1. Внутри ускорителя находится вакуум, как и в межпланетном пространстве, чтобы избежать столкновения пучков частиц с молекулами газа.

2. Чтобы уменьшить количество тепла, которое просачивается из окружающей среды комнатной температуры в криогенную зону, в которой поддерживается температура в  $1,9\text{ K}$  ( $-271,3\text{ }^\circ\text{C}$ ).

3. Чтобы уменьшать потери тепла криогенно охлаждаемых магнитов.

Электромагниты находятся при температуре  $-271,3\text{ }^\circ\text{C}$  и построены из катушек со специальным электрическим кабелем, который работает в сверхпроводящем состоянии, эффективно проводит электричество без сопротивления или потери энергии. По этой причине ускоритель подключен к системе жидкого гелия, который охлаждает магниты.

В БАК находятся тысячи магнитов разных сортов и размеров. Они включают в себя 1232 дипольных магнита 15-метровой длины, расположенных по изгибу балки, и 392 квадрупольных магнита, каждый по 5–7 метров в длину, где фокусируются лучи. Незадолго до столкновения используется другой тип магнитов, чтобы прижать частицы ближе друг к другу для увеличения вероятности столкновения. В коллайдере решается похожая по сложности задача, как, если бы взять две швейные иглы, расположенные на расстоянии 10 км, выстрелить навстречу друг друга с высокой вероятностью попадания. Пучки частиц настолько малы, что столкнуть их точно является сложнейшей задачей.



Рис. 20.24. Электромагниты большого адронного коллайдера

Пучки в одной трубе циркулируют по часовой стрелке, в другой – против часовой стрелки. Время заполнения каждого кольца – 4 мин и 20 с, и 20 мин требуется для того, чтобы достичь максимальной энергии 4 ТэВ. Пучки могут циркулировать в течение многих часов внутри труб при нормальных условиях эксплуатации. Два пучка приводятся в столкновение внутри четырех детекторов – Алиса, Атлас, CMS и LHCb – где полная энергия при столкновении равна 8 ТэВ.

Алиса представляет собой детектор 26 м в длину, 16 м в высоту и 16 м в ширину. Применяется для изучения кварк-глюонной плазмы. Детектор находится в огромной пещере, на глубине 56 м, недалеко от поселка Сен-Жени-Пуйи, Франция.

Атлас это один из двух детекторов общего назначения на Большом адронном коллайдере. 7000-тонный детектор ATLAS является самым большим детектором частиц из когда-либо построенных (46 м в длину, 25 м в высоту и 25 м в ширину). Он находится в пещере, на глубине 100 м, возле главного центра ЦЕРН, недалеко от деревни Меурин в Швейцарии.

Компактный Мюонный Соленоид (CMS) – это универсальный детектор в БАКе. Он предназначен для решения широкого спектра физических задач, в том числе для поиска бозона Хиггса, частиц, из которых может состоять темная материя. Он решает похожие задачи с ATLAS, но использует другое техническое решение при проектировании детектора, другой магнит. Огромный магнит-соленоид имеет форму цилиндрической катушки из сверхпроводящего кабеля, который генерирует поле 4 Тл, что около 100 000 раз больше магнитного поля Земли. Необычной особенностью детектора CMS является то, что он был построен из 15 секций на уровне земли прежде, чем был опущен в подземную пещеру возле поселка Cessy во Франции. Полный детектор 21 м в длину, 15 м в ширину и 15 м в высоту.

В Большом адронном коллайдере проводятся исследования различий между материей и антиматерией, изучаются частицы, называемые «beautyquark», или «b-кварк». Обилие различных типов кварков создаются в БАК прежде, чем они быстро распадаются в другие формы. Чтобы поймать b-кварки, в БАКе разработана сложная подвижная система трековых детекторов возле траекторий пучков.

5600-тонный детектор БАК состоит из переднего спектрометра и планарных детекторов, что составляет 21 м в длину, 10 м в высоту и 13 м в ширину. Детектор находится на глубине 100 м возле села Ферней-Вольтер, Франция.

## 20.7. Эффект Холла

Этот эффект был открыт Е. Холлом в 1879 г. Сущность явления заключается в возникновении поперечной разности потенциалов в металле или полупроводнике, по которым течет ток, при помещении их в магнитное поле, вектор  $\vec{B}$  которого перпендикулярен направлению тока.

В основе эффекта лежит взаимодействие между электрическими зарядами и магнитными полями. Любая заряженная частица, движущаяся в магнитном поле, испытывает действие силы Лоренца, направление которой перпендикулярно направлению движения частицы и направлению магнитного поля. Величина этой силы прямо пропорциональна величине заряда  $q$ , скорости частицы  $v$  и индукции магнитного поля

$$F_{\text{л}} = qvB.$$

Для металлов и для полупроводников  $n$ -типа  $q = e$ , где  $e$  – заряд электрона. Под действием силы Лоренца электроны отклоняются к верхней грани и заряжают ее отрицательно (рис. 20.25,  $a$ ). На противоположной грани остается нескомпенсированный положительный заряд ионов кристаллической решетки. В результате этого в пластине возникает поперечное электрическое поле, направленное снизу вверх. Обозначим напряженность образовавшегося электрического поля через  $\vec{E}$ . Сила  $\vec{F} = e\vec{E}$ , действующая со стороны электрического поля на заряд, направлена в сторону, противоположную направлению силы Лоренца  $\vec{F}_{\text{л}}$ . Возникшая вследствие этого поперечная разность потенциалов  $U$  называется ЭДС Холла.



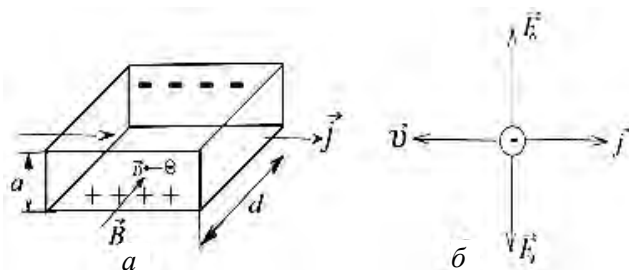


Рис. 20.25. Схема возникновения эффекта Холла

Разделение зарядов в образце продолжается до тех пор, пока силы магнитного и электрического поля не уравновесят друг друга (рис. 20.25, б), то есть

$$eE = evB,$$

откуда находим

$$E = vB. \quad (20.20)$$

В случае однородного поля

$$E = \frac{U}{a},$$

тогда

$$U = Ea,$$

где  $a$  – толщина пластинки.

С учетом выражения (20.20) получаем, что

$$U = avB. \quad (20.21)$$

Плотность тока, проходящего через кристалл

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{ad},$$

где  $d$  – ширина пластинки.

В то же время

$$j = env,$$

где  $n$  – концентрация электронов;

$v$  – средняя скорость упорядоченного движения зарядов.

Следовательно,

$$env = \frac{I}{ad}$$

и

$$v = \frac{I}{aden}. \quad (20.22)$$

Подставив (20.22) в (20.21), получим

$$U = \frac{IB}{end}. \quad (20.23)$$

Обозначим  $\frac{1}{en} = R_x$ , где  $R_x$  – постоянная, или коэффициент Холла. Знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда носителей тока. У электронных полупроводников постоянная  $R$  отрицательна, у дырочных  $R_x = \frac{1}{pe}$  – положительна, где  $p$  – концентрация дырок.

Тогда

$$U = R \frac{IB}{d}.$$

Таким образом, ЭДС Холла зависит от величины силы проходящего тока, индукции магнитного поля, ширины пластины и концентрации носителей заряда. Из (20.23) следует, что **ЭДС Холла в металлах, по сравнению с полупроводниками, намного меньше, и поэтому использование эффекта Холла началось только с применением полупроводников.**

При выводе формулы для  $U$  полагали, что все носители заряда имеют одинаковую скорость. Если учитывать распределение носителей заряда по скоростям, то необходимо ввести числовой множитель  $A$ , отличный от единицы:

$$R_x = \frac{A}{en},$$

где  $A$  – постоянная, зависящая от механизма рассеяния носителей заряда:  $A = 0,99-1,93$ .

При рассеянии электронов на тепловых колебаниях решетки  $A = \frac{3\pi}{8} = 1,18$ .

Постоянная Холла для полупроводников с носителями заряда обоих знаков

$$R_x = \frac{A}{e} \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{(\mu_p p + \mu_n n)^2}.$$

Для собственных полупроводников, у которых  $n = p = n_i$ :

$$R_x = \frac{A}{n_i e} \frac{(\mu_p - \mu_n)}{(\mu_p + \mu_n)},$$

где  $\mu_p$  и  $\mu_n$  – подвижности дырок и электронов соответственно (средняя скорость, приобретаемая носителями при напряженности электрического поля, равной единице:  $\mu = \frac{v}{E}$ ).

С помощью эффекта Холла изучают свойства полупроводниковых материалов. На основании постоянной Холла рассчитывают концентрацию и устанавливают знак носителей заряда. Измеряя постоянную Холла в некоторой области температур, можно получить температурную зависимость концентрации носителей заряда и по этой зависимости определить концентрацию примесей и энергию их активации.

Одновременное измерение постоянной Холла и удельной электропроводности полупроводника позволяет рассчитать подвижность носителей заряда. При небольших напряженностях электрического поля для полупроводников справедлив закон Ома:

$$j = \sigma E.$$

Так как

$$j = en,$$

то

$$\sigma = \frac{evn}{E} = e\mu n.$$

Умножив постоянную  $R_x$  на  $\sigma$ , получаем

$$R_x \sigma = \frac{3\pi}{8} \frac{e\mu n}{en},$$

откуда находим

$$\mu = \frac{8}{3\pi} \sigma R_x.$$

Если известно сопротивление образца  $R_{\text{обр}}$ , то входящую в выражение для  $\mu$  величину  $\sigma$  можно рассчитать по формуле

$$\sigma = \frac{l}{adR_{\text{обр}}},$$

где  $l$  – длина образца.

Эффект Холла получил широкое применение не только как средство изучения свойств носителей заряда. На его основе оказалось возможным создание ряда устройств и приборов, обладающих исключительно ценными свойствами, – приборов для измерения постоянных и переменных магнитных полей, измерения токов высокой частоты, анализа спектров, электронных усилителей, преобразователей, генераторов электрических сигналов.

## 20.8. МГД-генератор

К одной из центральных физико-технических задач энергетики принадлежит создание магнитогидродинамических генераторов (МГД-генераторов), которые непосредственно превращают тепловую энергию в электрическую.

Первый магнитогидродинамический генератор тока был испытан еще в 1832 г. английским физиком М. Фарадеем, который старался обнаружить возникновение электродвижущей силы (ЭДС) между двумя электродами, которые были погружены в воду реки Темза близ моста Ватерлоо в Лондоне. В соответствии с открытым Фарадеем законом электромагнитной индукции перемещение проводника (в данном случае солоноватой воды из реки) в магнитном поле Земли должно было сопровождаться возникновением ЭДС и электрического тока в проводниках, которые соединяли электроды. А согласно закону электромагнитной индукции, сила тока в проводниках пропорциональна индукции магнитного поля Земли и скорости течения воды в речке. Измерительная техника, которой владел Фарадей, не позволила ему обнаружить эффект, которого он ожидал, но в данном эксперименте были применены все принципиальные элементы современного МГД-генератора тока: проводниковое вещество, которое движется по каналу, поперечное магнитное поле и токоснимающие электроды. Эффект электромагнитной индукции используется и в обычных источниках тока – электромашинных генераторах, где поперек магнитного поля движутся жесткие проводники, размещенные на вращающемся роторе. В отличие от них, в МГД-генераторе жесткие проводники заменены проводниковой жидкостью или газом. МГД-генератор позволит превращать тепловую энергию в электрическую без промежуточных сложных устройств типа паровой турбины или двигателя внутреннего сгорания.

Принципиальная схема действия МГД-генератора приведена на рис. 20.26. В этой схеме между металлическими пластинами, расположенными в сильном магнитном поле, пропускается струя ионизированного газа с высокой средней кинетической энергией теплового движения частиц. При этом в соответствии с законом электромагнитной индукции появляется ЭДС, которая создает ток между электродами внутри канала генератора и во внешнем контуре.

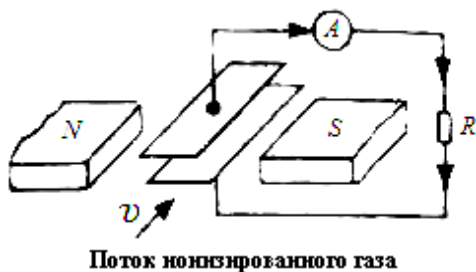


Рис. 20.26. Схема действия МГД-генератора

Пусть имеется поток свободных заряженных частиц плазмы (электронов, ионов) (рис. 20.27).

Если этот поток попадет в область магнитного поля перпендикулярно силовым линиям, то на каждую заряженную частицу будет действовать сила Лоренца. Положительно заряженные частицы будут отклоняться в одну сторону, отрицательно заряженные — в противоположную. Если в нужных местах разместить два электрода, то на них будут скапливаться разноименные заряды и возникнет ЭДС; а по проводнику, соединяющему электроды, пойдет электрический ток. Получим источник, в котором нет движущихся, вращающихся механических частей, в отличие от других известных генераторов электрической энергии. Это и есть магнитогидродинамический генератор — МГД-генератор.

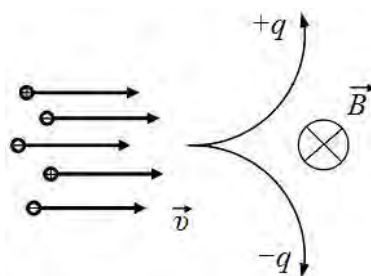


Рис. 20.27. Действие силы Лоренца на заряженные частицы плазмы

МГД предназначен для преобразования тепловой энергии в электрическую без использования тепломеханического оборудования. Для реализации такого способа необходимо наличие рабочего тела в виде плазмы. Однако плазменное состояние, например, продуктов сгорания, наступает при очень высокой температуре. Поэтому предполагалось вводить в продукты сгорания ионизирующую добавку —  $K_2SO_4$ . При реализации такого технического решения возникли большие трудности из-за высокой температуры рабочего тела.

Конструктивная схема устройства МГД-генератора показана на рис. 20.28.

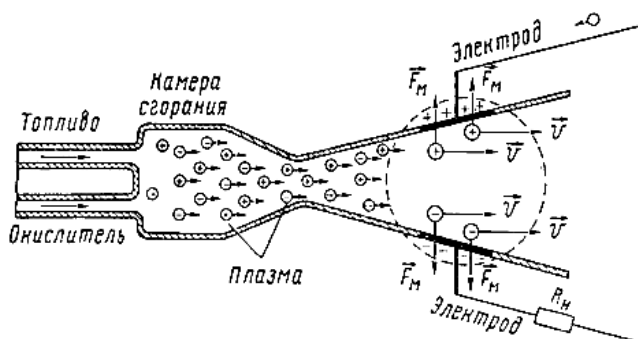


Рис. 20.28. Конструктивная схема устройства МГД-генератора

В камере сгорания при сжигании нефти, керосина или природного газа создается высокая температура (2000–3000 К), при которой газообразные продукты сгорания ионизируются, образуя электронно-ионную плазму. Для повышения электропроводности плазмы в камеру сгорания вводят легкоионизирующиеся вещества, содержащие кальций, натрий, цезий. Раскаленная плазма движется по расширяющемуся каналу в несколько метров, в котором ее внутренняя энергия превращается в кинетическую и скорость возрастает до 2000 м/с и более. Так же, как и металлический проводник, плазма в целом нейтральна. Влетая в область сильного магнитного поля, частицы разных знаков, составляющие плазму, под действием силы Лоренца разделяются, как показано на рис. 20.27. Электроны, достигнув нижнего электрода, движутся во внешней цепи по нагрузке сопротивлением  $R_H$  к другому электроду, где нейтрализуют положительные ионы.

Мощность, выделяемая во внешней цепи, может быть использована для различных практических нужд. В режиме холостого хода, когда внешняя цепь разомкнута, между электродами возникает наибольшая разность потенциалов, равная ЭДС. В зависимости от конструкции генератора она может достигать нескольких сотен или тысяч вольт.

В МГД-генераторе сильно нагрета только плазма и отсутствуют движущиеся детали, подвергаемые, подобно лопаткам турбин, одновременному воздействию больших механических напряжений и высоких температур. Возможность использования огнеупорных материалов и применения охлаждения неподвижных металлических деталей, соприкасающихся с плазмой, позволяет повысить температуру рабочего тела, а значит, и КПД установки. Для температуры плазмы, равной на входе  $T_1 = 2500$  К, а на выходе –  $T_2 = 300$  К, теоретическое значение КПД составляет примерно 90 %. Однако в реальных условиях температура отработанных газов на выходе из канала больше 300 К. Но если отработанные и уже неионизированные продукты сгорания использовать для получения пара и приведения в действие турбины обычного электромашинного генератора, то реальный КПД такой установки будет равен 50–60 %. А это почти вдвое превышает реальный КПД тепловых электростанций. Следовательно, при том же расходе топлива с помощью МГД-генератора можно получить вдвое больше электроэнергии.

## 20.9. Масс-спектрографы

Действие силы Лоренца используют и в приборах, называемых масс-спектрографами, которые предназначены для разделения заряженных частиц по их удельным зарядам – отношению  $\frac{q}{m}$  заряда частицы к ее массе.

Напомним, что при влете заряженной частицы в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору  $\vec{B}$  дальнейшее движение будет осуществляться по окружности радиусом

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (20.24)$$

Чем меньше удельный заряд частицы  $\frac{q}{m}$ , тем больше радиус траектории частицы при заданных значениях  $v$  и  $B$  (рис. 20.29).



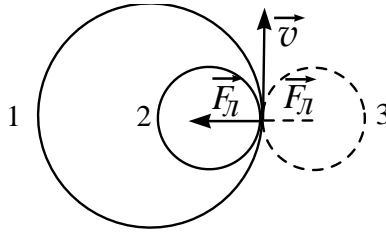


Рис. 20.29. Траектории заряженных частиц с равными начальными скоростями в однородном магнитном поле:

1 – малое отношение  $\frac{q}{m}$  (отрицательно заряженные частицы); 2 – большое отношение  $\frac{q}{m}$  (отрицательно заряженные частицы); 3 – большое отношение  $\frac{q}{m}$  (положительно заряженные частицы). Линии магнитного поля перпендикулярны к плоскости чертежа и направлены на нас

При заданных значениях  $v$  и  $B$ , измерив радиус траектории  $R$ , можно определить  $\frac{q}{m}$  – отношение заряда частицы к ее массе. Заряд частицы равен одному или нескольким элементарным зарядам. Если он известен, то может быть вычислена масса частицы. Этот принцип лежит в основе действия прибора, называемого масс-спектрографом и служащего для измерения масс мельчайших заряженных частиц – ионов и электронов.

Схема масс-спектрографа с однородным магнитным полем изображена на рис. 20.30.

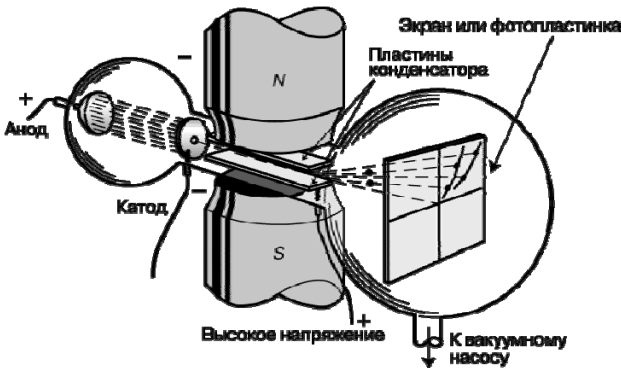


Рис. 20.30. Схема масс-спектрографа

Прибор представляет собой откачанный до высокой степени разрежения сосуд, помещенный в магнитное поле. Источником заряженных частиц является электрический разряд в газе. Разряд сопровождается интенсивной ионизацией газа. При положительной разности потенциалов из разряда будут «отсасываться» электроны и отрицательные ионы, при отрицательной разности потенциалов – положительные ионы. Заполняя источник различными газами или парами, можно получить ионы различных элементов.

Частицы попадают в магнитное поле с теми скоростями, которые им сообщает ускоряющая их разность потенциалов. Все частицы с данным отношением  $\frac{q}{m}$  приобретают равные скорости и будут в магнитном поле описывать окружности одного и того же радиуса. После отклонения пучок частиц попадает на фотопластинку, в месте попадания пучка после проявления пластинки обнаружится темная полоска. Величина  $\frac{q}{m}$  зависит от скорости частицы. Для нахождения скорости используется то, что частица влетает в магнитное поле с кинетической энергией  $\frac{mv^2}{2}$ , полученной за счет работы электрического поля, равной  $qU$ . Таким образом, приравнивая приращение кинетической энергии заряженной частицы к работе электрического поля имеем:

$$m = \frac{2qU}{v^2}.$$

Выражая скорость из формулы (20.24), окончательно получим для массы

$$m = \frac{qB^2 R^2}{2U}.$$

Подставляя в эту формулу известные значения  $q, B, U$  и измеренный радиус  $R$ , можем вычислить массу частиц, попавших в соответствующую точку пластинки.

Если в пучке, испускаемом источником, содержатся частицы с различными отношениями заряда к массе, на фотопластинке получится несколько параллельных полосок. Самая близкая к щели полоска вызвана частицами, которые движутся по окружности наименьшего радиуса. Эти частицы обладают наибольшим отношением заряда к массе. Если заряды всех частиц в пучке одинаковы, то ближайшая к щели полоска соответствует частицам наименьшей массы.

По аналогии с оптикой изображение, полученное на фотопластинке, называют спектром. Оптический спектрограф дает спектр длин волн светового пучка, то есть распределение спектральных линий по длинам волн. Масс-спектрограф дает спектр масс пучка частиц, то есть распределение частиц по массам (точнее, по отношениям  $\frac{q}{m}$ ).

## 20.10. Вихревой характер магнитного поля.

### Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

(закон полного тока для магнитного поля в вакууме)

Циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  есть величина, численно равная

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl,$$

где  $d\vec{l}$  – элемент длины контура, направленный вдоль обхода контура;

$B_l = B \cos \alpha$  – составляющая вектора  $\vec{B}$  в направлении касательной к контуру (с учетом выбранного направления обхода);

$\alpha$  – угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ .

**Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции  $\vec{B}$**  звучит следующим образом: циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k,$$

где  $n$  – число проводников с токами, охватываемыми контуром  $L$  произвольной формы. Эта теорема справедлива только для поля в вакууме, поскольку для поля в веществе надо учитывать молекулярные токи.

Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта; ток противоположного направления считается отрицательным.

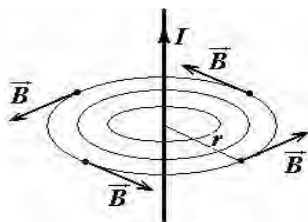


Рис. 20.31. Магнитное поле прямого тока

Рассмотрим магнитное поле прямолинейного проводника с током (рис. 20.31).

Расчет выполним на основе теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ . Замкнутый контур представим себе в виде окружности радиуса  $r$ . В каждой точке этого контура вектор  $\vec{B}$  по модулю одинаков

и направлен по касательной к окружности, тогда

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = B \oint_L dl = B 2\pi r = \mu_0 I;$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Циркуляция вектора  $\vec{E}$  электростатического поля всегда равна нулю, то есть электростатическое поле является **потенциальным**. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля не равна нулю. Такое поле называется **вихревым**.

### 20.11. Магнитное поле соленоида и тороида

**Соленоид** – это катушка индуктивности в виде намотанного на цилиндрическую поверхность изолированного проводника, по которому течет электрический ток.

Рассмотрим магнитное поле соленоида (рис. 20.32).

Выберем замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$ , как показано на рис. 20.32. Тогда по теореме о циркуляции вектора  $\vec{B}$ :

$$\int_{ABCD} B_l dl = \mu_0 NI.$$

На участках  $AB$  и  $CD$   $B_l = 0$  и вне соленоида  $B = 0$ . Тогда можно записать

$$\int_{ABCD} B_l dl = \int_{DA} B_l dl = B_l l = \mu_0 NI,$$

где  $l$  – длина соленоида.

Внутри соленоида поле однородно и  $B_l = B$ , то есть модуль магнитной индукции поля соленоида (в вакууме)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 In,$$

где  $n = \frac{N}{l}$  – число витков на единицу длины соленоида (соленоид без сердечника).

Модуль магнитной индукции поля соленоида при наличии сердечника

$$B = \mu_0 \mu In.$$

**Тороид** – кольцевая катушка с витками, намотанными на сердечник, имеющий форму тора, по которой течет ток.

Определим магнитное поле тороида (рис. 20.33). Из опыта известно, что магнитное поле сосредоточено внутри тороида (оно однородно), вне его поле отсутствует.

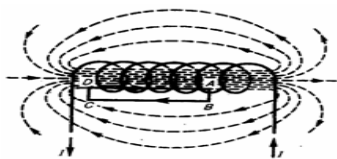


Рис. 20.32. Магнитное поле соленоида

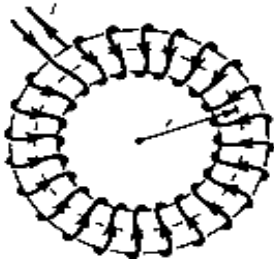


Рис. 20.33. Магнитное поле тороида

Линии вектора  $\vec{B}$  – окружности с центрами на оси тороида. В качестве контура выберем окружность радиуса  $r$ . По теореме о циркуляции вектора  $\vec{B}$

$$B2\pi r = \mu_0 I .$$

Таким образом, модуль магнитной индукции внутри тороида (в вакууме):

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} ,$$

где  $N$  – число витков тороида;  
 $r$  – радиус замкнутого контура.

### 20.12. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для потока вектора индукции магнитного поля

*Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток)* сквозь площадку  $dS$  – это скалярная физическая величина

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS ,$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на направление единичной нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  ( $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$ );

$d\vec{S} = dS\vec{n}$  – вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ . Знак потока зависит от  $\cos \alpha$ . Поток вектора  $\vec{B}$  связывают с контуром, по которому течет ток, тогда положительное направление нормали определено (оно связывается с током правилом правого винта). Магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Магнитный поток сквозь произвольную поверхность  $S$

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS.$$

Если поле однородно, поверхность плоская и перпендикулярна вектору  $\vec{B}$ , то

$$\Phi = BS.$$

Единица магнитного потока Вебер (Вб). 1 Вб (Вебер) – магнитный поток, проходящий через плоскую поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2.$$

**Теорема Гаусса для потока вектора индукции магнитного поля:** поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS = 0.$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

### 20.13. Дивергенция и ротор магнитного поля

Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии вектора  $\vec{B}$  не имеют ни начала, ни конца. Поэтому, согласно теореме Гаусса, поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность должен быть равен нулю. Таким образом, для магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности  $S$  имеет место условие

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Заменяв поверхностный интеграл в этом выражении объемным, получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0.$$

Условие, к которому пришли, должно выполняться для любого произвольно выбранного объема  $V$ . Это возможно лишь в том случае, если подынтегральная функция в каждой точке поля равна нулю. Таким образом, магнитное поле обладает таким свойством, что его дивергенция всюду равна нулю

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Теперь обратимся к циркуляции вектора  $\vec{B}$ . По определению циркуляция вектора  $\vec{B}$  равна интегралу

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l}.$$

Проще всего вычислить этот интеграл в случае поля прямолинейного проводника с током:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I,$$

где  $I$  – ток, охватываемый контуром  $L$ .

Если ток течет во всем пространстве, где расположен контур, то его можно представить в виде

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S \vec{j} \vec{n} dS.$$

Интеграл вычисляется по произвольной поверхности  $S$ , натянутой на контур. Вектор  $\vec{j}$  есть плотность тока в той точке, где расположена площадка  $dS$ ;  $\vec{n}$  – положительная нормаль к этой пло-



щадке (то есть нормаль, образующая с направлением обхода по контуру при вычислении циркуляции правовинтовую систему).

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Преобразовав левую часть по теореме Стокса, придем к равенству

$$\int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Полученное равенство должно выполняться при произвольном выборе поверхности  $S$ , по которой вычисляются интегралы. Это возможно лишь в том случае, если подынтегральные функции имеют в каждой точке одинаковые значения. Таким образом, мы приходим к выводу, что ротор вектора магнитной индукции пропорционален вектору плотности тока в данной точке:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Отметим, что это выражение справедливо для поля в вакууме в отсутствие меняющихся во времени электрических полей.

Итак, мы нашли дивергенцию и ротор магнитного поля в вакууме. Сравним полученные формулы с аналогичными формулами для электростатического поля в вакууме

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

(дивергенция  $E$  равна объемной плотности заряда  $\rho$ , деленному на  $\epsilon_0$ );

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

(ротор  $E$  равен нулю);

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

(дивергенция  $B$  равна нулю);

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

(ротор  $B$  равен  $j$ , умноженное на  $\mu_0$ ).

Сопоставление этих формул показывает, что электростатическое и магнитное поля имеют существенно разный характер. Ротор электростатического поля равен нулю; следовательно, электростатическое поле потенциально может быть охарактеризовано скалярным потенциалом  $\varphi$ . Ротор магнитного поля в тех точках, где есть ток, отличен от нуля. Соответственно циркуляция вектора  $\vec{B}$  пропорциональна току, охватываемому контуром. Поэтому магнитному полю нельзя приписать скалярный потенциал, который был бы связан с  $\vec{B}$  соотношением типа  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ . Этот потенциал не был бы однозначным – при каждом обходе по контуру и возвращении в исходную точку он получал бы приращение, равное  $\mu_0 I$ . Поле, у которого ротор отличен от нуля, называется **вихревым**, или соленоидальным.

#### 20.14. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Пусть проводник длиной  $l$  (он может свободно перемещаться) с током  $I$  находится в однородном магнитном поле (рис. 20.34), вектор магнитной индукции которого направлен на нас.

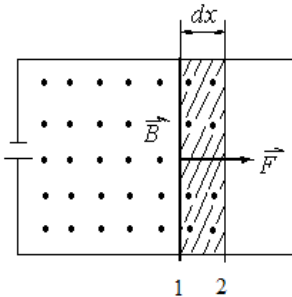


Рис. 20.34. Проводник с током в магнитном поле

Для перемещения проводника на него должна действовать внешняя сила, равная по модулю силе Ампера  $F = IBl$ . Под ее действием проводник переместился на  $dx$  из положения 1 в 2. Элементарная работа, совершаемая магнитным полем,

$$\delta A = F dx = IB l dx = IB dS = Id\Phi,$$

где  $dS = l dx$  – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;

$BdS = d\Phi$  – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

Таким образом, работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток через поверхность, пересеченную движущимся проводником.

Рассмотрим работу по перемещению контура с током в магнитном поле. Элементарная работа  $\delta A$  сил Ампера при рассматриваемом перемещении контура (рис. 20.35) равна сумме элементарных работ по перемещению проводника  $ABC$  ( $dA_1$ ) и  $CDA$ , ( $dA_2$ ), то есть  $dA = dA_1 + dA_2$ .

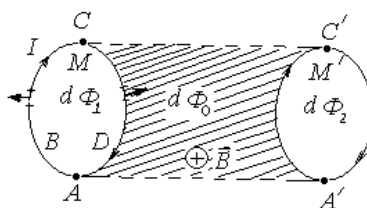


Рис. 20.35. Контур с током в магнитном поле

$$\delta A_2 = I(d\Phi_0 + d\Phi_2),$$

где  $d\Phi_0$  – поток, пересекаемый проводником  $CDA$  при движении сквозь заштрихованную поверхность;

$d\Phi_2$  – поток, пронизывающий контур в конечном положении.

$$\delta A_1 = -I(d\Phi_0 + d\Phi_1)$$

(знак минус записан потому, что силы образуют с направлением перемещения тупые углы).

Тогда

$$dA = I(d\Phi_2 + d\Phi_1).$$

**Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.**

### 20.15. Сила, действующая на контур с током в магнитном поле

Вначале рассмотрим случай, когда магнитное поле однородно ( $\vec{B} = \text{const}$ ). Согласно закону Ампера, на элемент контура  $d\vec{l}$  со стороны магнитного поля действует сила:  $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$ . Результи-

рующая таких сил будет равна  $\vec{F} = \int I[d\vec{l}, \vec{B}]$ . Выносим постоянные величины  $I$  и  $\vec{B}$  за знак интеграла, получим:  $\vec{F} = I[\int d\vec{l}, \vec{B}]$ .

Интеграл  $\int d\vec{l}$  равен нулю (векторное суммирование), поэтому  $\vec{F} = 0$ . Таким образом, результирующая сила, действующая на контур с током в однородном магнитном поле равна нулю. Это справедливо для контуров любой формы (в том числе и неплоских) при произвольном расположении контура относительно направления поля. Для равенства нулю существенной результирующей силой является лишь однородность поля.

Разумеется, что кроме силы Ампера на контур с током в магнитном поле будет действовать также вращательный момент

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}],$$

где  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$  – магнитный момент контура с током;

$I$  – величина тока в контуре;

$S$  – площадь контура;

$\vec{n}$  – положительная нормаль к контуру.

Модуль вектора вращательного момента  $M = p_m B \sin \alpha$ ,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ .

Для того чтобы угол  $\alpha$  увеличить на  $d\alpha$ , нужно совершить работу

$$dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Поворачиваясь в первоначальное положение, контур может возвращать затраченную на поворот, увеличение потенциальной энергии  $W_p$ , которой обладает контур с током в магнитном поле, то есть:  $dW_p = p_m B \sin \alpha d\alpha$ .

Интегрируя последнее выражение, можно получить, что  $W_p = -p_m B \cos \alpha$ .

Параллельная ориентация векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , согласно последнему выражению, отвечает минимуму потенциальной энергии и, сле-

довательно, положению устойчивого равновесия контура с током в магнитном поле.

Теперь рассмотрим плоский контур с током в неоднородном магнитном поле. Для простоты считаем контур круговым. Предположим, что поле изменяется быстрее всего в направлении оси  $OX$ , совпадающем с направлением вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  в том месте, где расположен центр контура, а магнитный момент контура ориентирован по полю.

Сила Ампера  $d\vec{F}$ , действующая на элемент контура, перпендикулярна к вектору  $\vec{B}$ , то есть к линии магнитной индукции в месте пересечения ее с  $d\vec{l}$ . Поэтому силы, приложенные к различным элементам контура, образуют симметричный конический веер (рис. 20.36)

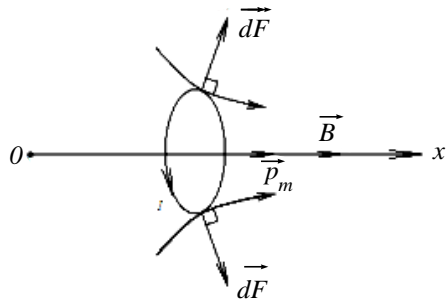


Рис 20.36. Силы, действующие на контур с током в неоднородном магнитном поле

Их результирующая  $\vec{F}$  направлена в сторону возрастания  $\vec{B}$  и, следовательно, втягивает контур в область более сильного поля. Если изменить направление тока в контуре на обратное ( $\vec{p}_m$  станет противоположным  $\vec{B}$ ), направление всех

сил  $d\vec{F}$  и их результирующей  $\vec{F}$  изменится на обратное, то есть контур будет выталкиваться из поля.

В связи с тем, что результирующая сила  $\vec{F}$  консервативна, то  $F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha$ , где  $F_x$  – проекция силы  $F$  на ось  $X$ . По нашему предположению в других направлениях поле изменяется слабо, поэтому проекциями силы  $F$  на оси  $OY$  и  $OZ$  можно пренебречь и считать

$$F = F_x = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha.$$

Таким образом, сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле, зависит от ориентации магнитного момента контура относительно направления поля. Если векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  совпадают по направлению ( $\alpha = 0$ ), сила положительна и направлена в сторону возрастания поля. В противном случае ( $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  антипараллельны,  $\alpha = \pi$ ), сила направлена в сторону убывания  $\vec{B}$ . Разумеется, что кроме силы  $\vec{F}$  на контур с током в неоднородном магнитном поле действует также вращательный момент.

## 21. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 21.1. Магнитные моменты электронов и атомов

Согласно классическим представлениям, электроны в атомах движутся по замкнутым траекториям – орбитам. Такое движение можно считать упорядоченным движением электрического заряда или электрическим током. Говорят, что электроны в атомах образуют

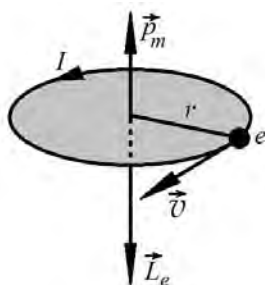


Рис. 21.1. Орбитальное движение электрона в атоме

систему замкнутых орбитальных токов (рис. 21.1). Если электрон движется со скоростью  $\vec{v}$  по круговой орбите радиусом  $r$ , то сила орбитального тока

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r} v,$$

где  $e$  – элементарный заряд;

$T$  – период обращения электрона по орбите вокруг ядра.

На рис. 21.1 стрелкой указано направление орбитального тока, созданного движением электрона. Орбитальному току соответствует магнитный момент  $\vec{p}_m$ , называемый **орбитальным магнитным моментом электрона**. Вектор орбитального момента перпендикулярен плоскости орбиты электрона, а его модуль определяется соотношением

$$p_m = IS = \frac{1}{2} e v r,$$

где  $S$  – площадь орбиты электрона.

Вращательное движение электрона по орбите вокруг ядра характеризуется **орбитальным моментом импульса**  $\vec{L}_e$ , направление которого указано на рис. 21.1, а модуль находится по формуле

$$L_e = m r v,$$

где  $m$  – масса электрона.

Векторы орбитального момента импульса  $\vec{L}_e$  и орбитального магнитного момента электрона  $\vec{p}_m$  направлены в противоположные стороны и связаны соотношением

$$\vec{p}_m = IS = \frac{e}{2m} \vec{L}_e, \quad (21.1)$$

где  $\gamma = \frac{e}{2m}$  – гиромагнитное отношение орбитальных моментов электрона.

В 1915 г. в опытах, проведенных А. Эйнштейном и В. де Гаазом, было экспериментально измерено гиромагнитное отношение электрона. Полученное значение  $\gamma_s$  отличалось от орбитального гиромагнитного отношения  $\gamma$ :

$$\gamma_s = 2\gamma = -\frac{e}{m}.$$

Этот результат имел огромное значение не только для изучения магнитных свойств веществ, но и для всего дальнейшего развития физики. Для его объяснения пришлось предположить, что электрон помимо орбитальных моментов  $\vec{L}_e$  и  $\vec{p}_m$  обладает еще и собственным моментом импульса  $\vec{L}_{es}$ , который был назван **спином элект-**

**рона**, и соответствующим ему **собственным (спиновым) магнитным моментом**

$$\vec{p}_{ms} = \gamma \vec{L}_{es} = -\frac{e}{m} \vec{L}_{es}. \quad (21.2)$$

Вначале понятие «спин» объяснялось вращением электрона вокруг своей оси, подобно суточному вращению Земли. Согласно современным представлениям, само понятие формы или размера электрона не имеет смысла, поэтому попытки объяснения спина, исходя из представлений классической механики твердого тела, неверны. Спин имеет не классическую, а квантовую природу. Он не связан с движением электрона. Он характеризует внутреннее свойство квантовой частицы. Спин электрона (как и других элементарных частиц) является такой же их неотъемлемой и естественной характеристикой, как электрический заряд или масса частицы. С наличием спина связано объяснение магнитных свойств вещества, распределение электронов по оболочкам атома, деление веществ на проводники, диэлектрики и полупроводники, явление гигантского магнитосопротивления и т. д.

Было установлено, что модуль спина электрона равен

$$L_{es} = \hbar \sqrt{s(s+1)} = \frac{\hbar \sqrt{3}}{2}, \quad (21.3)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  – постоянная Планка;

$s = \frac{1}{2}$  – спиновое квантовое число электрона.

Из (21.2) и (21.3) следует, что модуль спинового магнитного момента электрона равен

$$p_{ms} = \frac{e\hbar\sqrt{3}}{2m} = \sqrt{3}\mu_B,$$

где  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$  – магнетон Бора.



Важнейшая особенность спина электрона состоит в том, что в магнитном поле спин может быть ориентирован только двумя способами: его проекция на направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  может быть равна либо  $\frac{\hbar}{2}$ , либо  $-\frac{\hbar}{2}$ . Соответственно, проекции спиновых магнитных моментов на направление вектора магнитной индукции могут принимать значения  $\pm\mu_B$ . В первом случае говорят, что спин параллелен вектору  $\vec{B}$ , а во втором – антипараллелен ему. При этом происхождение магнитного поля не играет никакой роли. Оно может быть порождено как токами проводимости и быть внешним магнитным полем, так и орбитальным движением электронов в атомах.

**Вектор орбитального магнитного момента атома**  $\vec{P}_m$  равен векторной сумме орбитальных магнитных моментов всех его электронов

$$\vec{P}_m = \sum_{i=1}^Z \vec{p}_{mi}, \quad (21.4)$$

где  $Z$  – число электронов в атоме, равное порядковому номеру элемента в таблице Менделеева.

**Вектор орбитального момента импульса атома**  $\vec{L}$  равен сумме орбитальных моментов импульса всех электронов атома

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^Z \vec{L}_{ei}. \quad (21.5)$$

Из (21.1), (21.4) и (21.5) следует, что

$$\vec{P}_m = \gamma \vec{L}.$$

При расчете полных магнитных моментов атома необходимо учитывать орбитальные магнитные моменты электронов, спиновые магнитные моменты электронов, магнитные моменты ядер (точнее, протонов и нейтронов, входящих в их состав). Однако модули маг-

нитных моментов ядер примерно в 1000 раз меньше модулей магнитных моментов электронов, поэтому в первом приближении ими можно пренебречь и считать, что вектор магнитного момента атома равен векторной сумме как орбитальных, так и спиновых магнитных моментов электронов:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^Z (\vec{p}_{mi} + \vec{p}_{msi}).$$

В общем случае вычисление магнитного момента атома представляет нетривиальную задачу и далеко выходит за рамки классической физики.

## 21.2. Намагничивание вещества. Намагниченность. Магнитная восприимчивость. Виды магнетиков

Все вещества при рассмотрении их магнитных свойств принято называть *магнетиками*. По своим свойствам магнетики делятся на три основные группы: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

*Диамагнетиками* называют вещества, магнитный момент атомов которых в отсутствие внешнего магнитного поля равен нулю. К диамагнетикам относятся инертные газы, молекулярные азот и водород, висмут, цинк, медь, золото, серебро, кремний, германий, вода в жидком агрегатном состоянии, ацетон, глицерин и ряд других веществ.

*Парамагнетиками* называют вещества, магнитный момент атомов которых в отсутствие внешнего магнитного поля не равен нулю. К парамагнетикам относятся щелочные и щелочно-земельные металлы, молекулярный кислород, алюминий, платина и другие вещества.

*Ферромагнетики* – вещества с очень сильными магнитными свойствами, способные сохранять состояние намагничивания даже в отсутствие внешнего магнитного поля. К ферромагнетикам относятся железо, никель, кобальт, а также гадолиний, тербий, диспрозий и некоторые другие редкоземельные металлы.

**Любой магнетик при внесении во внешнее магнитное поле намагничивается, то есть создает свое собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее поле.**

В отсутствие внешнего поля суммарный магнитный момент атомов вещества равен нулю. В диамагнетиках это так, поскольку каждый атом в отдельности не имеет собственного магнитного момента. В парамагнетиках каждый из атомов имеет магнитный момент, но из-за хаотичности теплового движения магнитные моменты отдельных атомов ориентированы беспорядочно и при векторном суммировании компенсируются.

При внесении во внешнее магнитное поле в любом макроскопическом объеме магнетика возникает отличный от нуля магнитный момент. Этот процесс называют *намагничиванием*. Количественной мерой намагниченного состояния вещества является *вектор намагниченности*  $\vec{J}$ , численно равный векторной сумме магнитных моментов атомов единицы объема магнетика

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{P}_{mi},$$

где  $N$  – общее число атомов, содержащихся в объеме  $\Delta V$ ;

$\vec{P}_{mi}$  – вектор магнитного момента  $i$ -го атома.

Этот объем должен быть столь малым, чтобы в его пределах магнитное поле можно было считать однородным. В то же время в нем должно содержаться большое число атомов, чтобы к ним можно было применять статистические закономерности.

Для любых типов магнетиков вектор намагниченности вещества связан с индукцией внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  соотношением

$$\vec{J} = \frac{\chi' \vec{B}}{\mu_0}, \quad (21.6)$$

где  $\chi'$  – не используемый на практике безразмерный коэффициент пропорциональности, зависящий от природы магнетика;

$\mu_0$  – магнитная постоянная.

По исторически сложившейся традиции обычно вместо коэффициента  $\chi'$  для характеристики магнитных свойств среды исполь-

зуется *магнитная восприимчивость среды*  $\chi$ , связанная с  $\chi'$  соотношением

$$1 + \chi = \frac{1}{1 - \chi'}. \quad (21.7)$$

*Магнитная восприимчивость среды* – безразмерный численный коэффициент, определяющий магнитные свойства среды и ее отклик на воздействие внешнего магнитного поля.

### 21.3. Диамагнетики. Парамагнетики

*Диамагнетиками* называют вещества, которые при помещении во внешнее магнитное поле намагничиваются против направления магнитной индукции ( $\vec{J} \uparrow \downarrow \vec{B}$ ). Магнитная восприимчивость диамагнетиков отрицательна  $\chi < 0$  и по модулю слабо отличается от нуля:  $\chi \approx 10^{-6} - 10^{-5}$ .

Строгое описание диамагнетизма (как и вообще магнитных свойств вещества) возможно лишь в рамках квантовой механики, поэтому приведем качественное объяснение этого явления.

Атомы диамагнетика не имеют собственного магнитного момента. Однако каждый из электронов атома обладает магнитным моментом и моментом импульса. Движение электрона по орбите вокруг ядра представляет собой замкнутый электрический ток. При помещении во внешнее магнитное поле на плоскость орбиты электрона начинает действовать вращающий момент силы. Этот момент силы приводит к дополнительному вращательному движению всей плоскости орбиты электрона целиком (и связанных с ней векторов магнитного момента и момента импульса) вокруг направления магнитной индукции  $\vec{B}$  (рис. 21.2). Такое дополнительное движение называется *прецессией Лармора*. Иллюстрация прецессии Лармора – прецессия оси вращения юлы в поле силы тяжести. Юла быстро вращается вокруг своей оси, а сама ось вращения медленно прецессирует вокруг направления силы тяжести. Электрон в атоме, помещенном в магнитное поле, быстро вращается по орбите, а плоскость орбиты медленно поворачивается вокруг направления магнитной

индукции. Ларморова прецессия приводит к возникновению дополнительного движения электрона, следовательно, к возникновению у него дополнительного магнитного момента  $\Delta \vec{p}_m$ . Вектор дополнительного магнитного момента всегда направлен против вектора магнитной индукции внешнего поля.

Таким образом, при помещении в магнитное поле у атомов диамагнетика возникает дополнительный магнитный момент, направленный против вектора магнитной индукции внешнего поля. Поэтому диамагнетики намагничиваются против внешнего поля ( $\vec{J} \uparrow \downarrow \vec{B}$ ). Магнитные свойства диамагнетиков практически не зависят от температуры.

После выключения внешнего магнитного поля ларморова прецессия прекращается, атомы диамагнетика утрачивают приобретенный магнитный момент и вещество размагничивается в течение очень короткого промежутка времени.

Диамагнитные материалы выталкиваются из области магнитного поля. Существует эффект диамагнитной левитации. Например, магнит с индукцией порядка 1 Тл может висеть между двух пластин висмута, а в поле с индукцией порядка 10 Тл человеческие пальцы могут удерживать на весу маленький магнит, не касаясь его.

**Парамагнетиками** называют вещества, которые при помещении во внешнее магнитное поле намагничиваются по направлению магнитной индукции ( $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{B}$ ). Магнитная восприимчивость диамагнетиков положительна  $\chi > 0$ , однако слабо отличается от нуля:  $\chi \approx 10^{-5} - 10^{-3}$ .

Атомы парамагнетика имеют собственный магнитный момент, однако в отсутствие внешнего магнитного поля из-за хаотичности теплового движения атомов их магнитные моменты ориентированы беспорядочно и компенсируются (рис. 21.3, а). При помещении во внешнее магнитное поле на магнитные моменты атомов начинает действовать вращательный момент силы, поворачивающий их в сто-

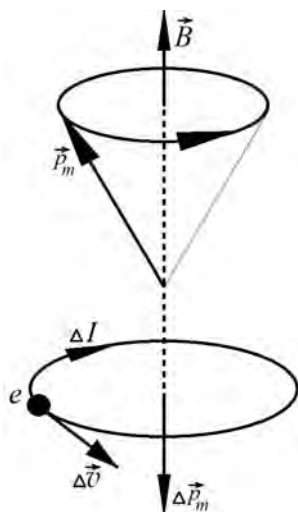


Рис. 21.2. Прецессия орбиты электрона в магнитном поле

рону внешнего поля (рис. 21.3, б). Тепловое движение препятствует повороту, поэтому магнитные моменты атомов ориентируются не точно в сторону внешнего поля, а преимущественно по его направлению. Очевидно, что чем больше температура вещества, тем интенсивнее происходит тепловое движение и тем менее точно магнитные моменты атомов поворачиваются в сторону внешнего магнитного поля. Поэтому, в отличие от диамагнетиков, магнитные свойства парамагнетиков сильно зависят от температуры. Чем больше индукция внешнего магнитного поля, тем больше момент сил, действующих на атомы, и тем сильнее их магнитные моменты поворачиваются в сторону вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  (рис. 21.3, в).

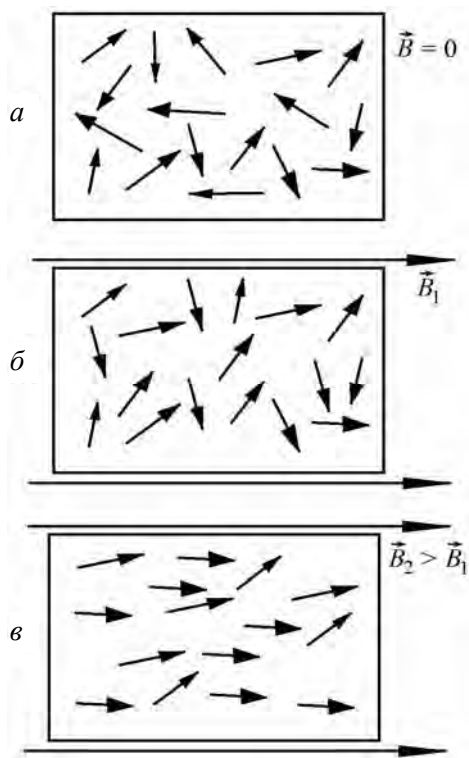


Рис. 21.3. Поворот магнитных моментов атомов в магнитном поле:  
 а – при  $B = 0$ ; б – при  $B = B_1$ ; в – при  $B = B_2 > B_1$

Классическая теория парамагнетизма была разработана П. Ланже-  
венем. Он рассмотрел задачу о системе молекулярных токов в одно-  
родном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Оказалось, что намагничен-  
ность  $\vec{J}$  парамагнетика в поле зависит от параметра  $a = \frac{\vec{P}_m \vec{B}}{kT}$ , где  $k$  –  
постоянная Больцмана;  $T$  – термодинамическая температура:

$$\vec{J} = n\vec{P}_m F(a),$$

где  $n$  – концентрация атомов парамагнетика;

$F(a)$  – классическая функция Ланжевена.

Классическая функция Ланжевена имеет вид

$$F(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a}.$$

График функции  $F(a)$  представлен на рис. 21.4.

При  $a \gg 1$  все магнитные  
моменты атомов ориентируются  
практически точно по полю и  
дальнейшее увеличение индукции  
поля не приводит к увеличению  
намагниченности. Наступает со-  
стояние магнитного насыщения  
парамагнетика. Насыщение воз-  
можно в сверхсильных магнит-  
ных полях (порядка 100 Тл) и  
при достаточно низких темпера-  
турах (до 300 К).

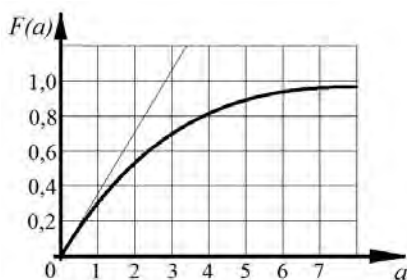


Рис. 21.4. Классическая функция  
Ланжевена

Обычно  $a \ll 1$  и  $F(a) \approx \frac{a}{3} = \frac{\vec{P}_m \vec{B}}{3kT}$ . Данное условие выполняется

при значениях индукции внешнего магнитного поля до 1 Тл и тем-  
пературах до 1000 К.

В слабых полях (до 1 Тл) намагниченность изотропного парамагнетика пропорциональна магнитной индукции внешнего поля:

$$\bar{J} = \frac{nP_m^2 \bar{B}}{3kT} = \frac{\chi' \bar{B}}{\mu_0},$$

где  $\chi' = \frac{nP_m^2 \mu_0}{3kT}$ .

Величина  $\chi'$  для парамагнетиков близка к нулю, поэтому их магнитная восприимчивость  $\chi$  практически не отличается от  $\chi'$ :

$$\chi = \frac{nP_m^2 \mu_0}{3kT}.$$

Это соотношение выражает **закон Кюри**: магнитная восприимчивость парамагнетиков обратно пропорциональна их термодинамической температуре.

После выключения внешнего поля тепловое движение в течение очень короткого промежутка времени разворачивает атомы хаотично и их магнитные моменты утрачивают преимущественное направление в пространстве. Вещество размагничивается.

Таким образом, и диа-, и парамагнетики обладают весьма слабыми магнитными свойствами и не могут сохранять состояние намагниченности в отсутствие внешнего магнитного поля.

Классическая физика не объясняет ни диа-, ни парамагнетизм. Так, в рамках классической физики невозможно устойчивое вращение электрона по орбите вокруг ядра, а парамагнитный эффект, связанный с поворотом магнитных моментов атомов во внешнем магнитном поле, полностью компенсируется диамагнитным эффектом, вызванным ларморовой прецессией. Невозможность объяснения магнитных свойств вещества в рамках классической физики выражается **теоремой Н. Бора–Й. Ван Лёвен**, которая гласит, что, согласно классической статистической физике, намагниченность системы электронов в постоянном внешнем магнитном поле в состоянии термодинамического равновесия равна нулю.



## 21.4. Напряженность магнитного поля. Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля).

### Магнитная проницаемость вещества

При изучении магнитного поля в веществе необходимо рассматривать два типа электрических токов: микротоки и макротоки. Под **макротоками** понимают электрические токи проводимости, а также конвекционные токи, связанные с движением макроскопических заряженных тел. **Микротоками** или **молекулярными токами** называют токи, обусловленные движением электронов по орбитам в атомах, ионах или молекулах.

В веществе на магнитное поле макротоков (или внешнее магнитное поле) накладывается дополнительное магнитное поле микротоков (его называют внутренним). Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  в веществе равен геометрической сумме векторов магнитной индукции внешнего  $\vec{B}_0$  и внутреннего  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  полей

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{внутр}}.$$

Таким образом, вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  в веществе должен зависеть от магнитных свойств вещества.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме можно обобщить для магнитного поля в веществе. В вакууме магнитное поле создается только макротоками, а в веществе – макротоками и микротоками. Следовательно, для магнитного поля в веществе

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}), \quad (21.8)$$

где  $I_{\text{макро}}$  и  $I_{\text{микро}}$  – алгебраические суммы макро- и микротоков соответственно, охватываемых замкнутым контуром  $L$ , то есть результирующие макро- и микротоки, протекающие сквозь поверхность, натянутую на контур  $L$ .

Величину микротока  $I_{\text{микро}}$  можно рассчитать, основываясь на предположении, что молекула с магнитным моментом  $p_m$  эквивалентна замкнутому «витку» молекулярного тока

$$I_{\text{мол}} = \frac{p_m}{S},$$

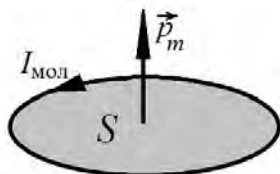


Рис. 21.5. Молекулярный «виток» с током и созданный им магнитный момент

где  $S$  – площадь «витка» (рис. 21.5). В случае парамагнитной среды  $\vec{p}_m$  – собственный магнитный момент атома, а в случае диамагнитной среды – наведенный в результате ларморовой прецессии магнитный момент  $\Delta p_m$ . Вклад в суммарный микроток  $I_{\text{микро}}$  дают только те молекулярные токи, «витки» которых нанизаны на контур  $L$ , как бусы на нитку. В самом деле, молекулярные токи, не удовлетворяющие этому условию, либо вообще не пересекают поверхность, натянутую на контур  $L$  (закрашенная область на рис. 21.6, «виток» *a*), либо пересекают ее дважды («виток» *b*) в взаимно противоположных направлениях.

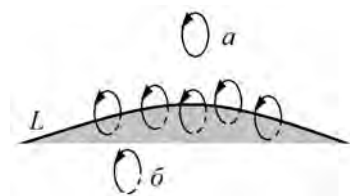


Рис. 21.6. К расчету суммарного микротока через контур  $L$

Для нахождения суммарного микротока  $I_{\text{микро}}$  рассмотрим магнитное поле в диамагнетике. Во внешнем магнитном поле молекулы этого вещества приобретают наведенные в результате ларморовой прецессии магнитные моменты  $\Delta \vec{p}_m$ , направленные строго упорядоченно – в сторону, противоположную вектору

магнитной индукции  $\vec{B}$ . Пусть  $\alpha$  – угол между вектором  $d\vec{l}$  малого элемента замкнутого контура  $L$  и вектором наведенного магнитного момента  $\Delta \vec{p}_m$ . На элемент  $d\vec{l}$  контура нанизаны молекулярные токи всех  $dN$  молекул, находящихся в объеме косо́го цилиндра (рис. 21.7)

с образующей  $dl$  и основанием площадью  $S$ , нормаль к которому составляет угол  $\alpha$  с образующей цилиндра

$$dN = nSdl \cos \alpha,$$

где  $n$  – концентрация атомов диамагнетика.

Таким образом, малому элементу  $d\vec{l}$  контура  $L$  соответствует охватываемый этим контуром микроток

$$dI_{\text{микро}} = I_{\text{мол}} n s d l \cos \alpha = n \Delta p_m d l \cos \alpha = \vec{J} d\vec{l},$$

где  $\vec{J} = n \Delta \vec{p}_m$  – намагниченность вещества.

Интегрируя это выражение по всему замкнутому контуру  $L$ , находим

$$I_{\text{микро}} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}. \quad (21.9)$$

Для парамагнитной среды расчет суммарного микротока  $I_{\text{микро}}$  более сложный, так как из-за теплового движения магнитные моменты атомов ориентированы неодинаково. Однако можно показать, что и в этом случае для  $I_{\text{микро}}$  справедливо выражение (21.9).

**Итак, сумма микротоков, охватываемых замкнутым контуром, равна циркуляции вектора намагниченности вдоль этого контура.**

Разделим обе части выражения (21.8) на магнитную постоянную  $\mu_0$  и подставим в него выражение для суммы микротоков в форме (21.9)

$$\oint_L \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = I_{\text{макро}} + \oint_L \vec{J} d\vec{l}.$$

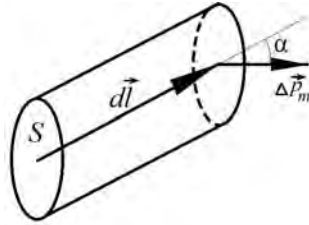


Рис. 21.7. Элемент объема диамагнетика

После преобразований получаем

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I_{\text{макро}}. \quad (21.10)$$

Вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (21.11)$$

называют **вектором напряженности магнитного поля**. В системе СИ единицей измерения напряженности магнитного поля является 1 А/м.

В результате формулу (21.10) можно переписать в форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{макро}}.$$

Это выражение является обобщением закона полного тока для магнитного поля в вакууме при рассмотрении магнитного поля в веществе. Оно выражает **закон полного тока для магнитного поля в среде. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура равна результирующему макротoku, протекающему сквозь поверхность, натянутую на этот контур.**

В случае изотропной среды векторы магнитной индукции и намагниченности связаны соотношением (21.6)

$$\vec{J} = \frac{\chi' \vec{B}}{\mu_0}.$$

Поэтому из (21.11) следует, что векторы напряженности и индукции магнитного поля в изотропной среде связаны формулой

$$\vec{H} = \frac{(1 - \chi') \vec{B}}{\mu_0},$$

или с учетом (21.7)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{(1 + \chi)\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}, \quad (21.12)$$

где  $\mu = 1 + \chi$  – *магнитная проницаемость среды*. Как и магнитная восприимчивость  $\chi$ , магнитная проницаемость – это безразмерный числовой коэффициент, характеризующий магнитные свойства вещества.

Для диамагнетиков  $\chi < 0$  и  $\mu < 1$ . Для парамагнетиков  $\chi > 0$  и  $\mu > 1$ . Магнитная проницаемость этих веществ не зависит от индукции магнитного поля, в котором они находятся. Из численных данных для магнитной восприимчивости следует, что для диа- и парамагнетиков магнитная проницаемость слабо отличается от единицы ( $\mu \approx 1$ ). Это связано с тем, что внутренние магнитные поля в таких веществах намного слабее тех внешних полей, которые вызывают их намагничивание.

## **21.5. Ферромагнетики. Домены. Спиновая теория магнетизма.**

**Обменные силы. Кривая намагничивания.**

**Магнитный гистерезис. Точка Кюри.**

**Антиферромагнетики. Точка Нееля. Ферриты**

*Ферромагнетиками* называются твердые вещества, обладающие в определенном интервале температур самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью, которая сильно зависит от внешних факторов: наличия магнитного поля, деформации, изменения температуры.

Ферромагнетики являются сильномагнитными средами: индукция внутреннего магнитного поля в них может многократно (в сотни и тысячи раз) превосходить по модулю индукцию внешнего магнитного поля. К ферромагнетикам относятся переходные металлы (железо, кобальт, никель), некоторые редкоземельные элементы, ряд сплавов, ферриты, некоторые металлические стекла.

Свойства ферромагнетиков были экспериментально изучены А. Г. Столетовым в 1872 г. Он исследовал зависимость намагничен-

ности мягкого железа от напряженности внешнего магнитного поля. Результаты экспериментального изучения свойств ферромагнетиков приведены на рис. 21.8–21.10. На рис. 21.8 показана зависимость намагниченности ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля. Начиная с некоторого значения  $H_n$  модуля напряженности поля, модуль вектора намагниченности остается постоянным и равным  $J_n$ . Это явление называется **магнитным насыщением**.

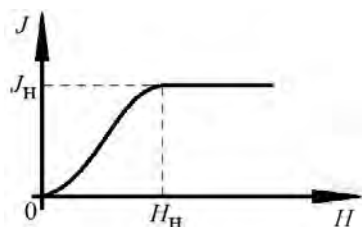


Рис. 21.8. Зависимость намагниченности ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля

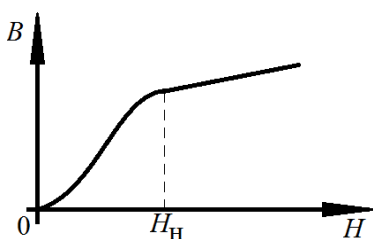


Рис. 21.9. Зависимость индукции магнитного поля в ферромагнетике от напряженности внешнего магнитного поля

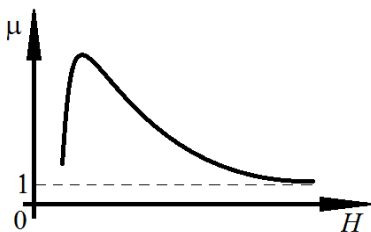


Рис. 21.10. Зависимость магнитной проницаемости ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля

График зависимости индукции поля в веществе от напряженности внешнего поля (рис. 21.9) отличается от графика  $J = f(H)$  отсутствием горизонтальной части. Как только наступает насыщение, магнитная индукция  $B = \mu_0(J + H)$  растет по линейному закону в зависимости от напряженности внешнего магнитного поля.

Существенной особенностью ферромагнетиков является нелинейная зависимость магнитной проницаемости от характеристик внешнего магнитного поля. Магнитная проницаемость ферромагнетика  $\mu$  вначале быстро растет с возрастанием модуля напряженности внешнего поля  $H$ , достигает максимума, а затем убывает, стремясь к единице в очень сильных полях (рис. 21.10). Последнее объясняется тем, что при очень

больших значениях  $H$  в формуле  $B = \mu_0(J + H)$  можно пренебречь слагаемым  $\mu_0 J$  по сравнению со слагаемым  $\mu_0 H$ . Тогда  $B = \mu_0 \mu H \approx \mu_0 H$  и  $\mu \approx 1$ . Максимальные значения магнитной проницаемости для ферромагнетиков очень велики: до  $10^5$ – $10^6$ .

Опыты показали, что зависимость намагниченности  $J$  ферромагнитного образца от напряженности  $H$  внешнего поля существенно зависит от того, каким предварительным воздействием подвергался этот образец. Графики, приведенные на рис. 21.8–21.10, соответствуют намагничиванию образца, который предварительно был полностью размагничен.

Это связано с тем, что ферромагнетики обладают способностью частично сохранять намагниченность после их удаления из внешнего магнитного поля. У ферромагнетиков наблюдается явление *магнитного гистерезиса* (рис. 21.11).

Пусть ферромагнитный образец предварительно полностью размагничен. Тогда при помещении во внешнее магнитное поле намагниченность образца возрастает по начальной кривой намагничивания  $Oa$  от  $J = 0$  при  $H = 0$  до состояния магнитного насыщения  $J = J_n$  при  $H = H_n$  в точке  $a$ . Если затем уменьшать модуль напряженности внешнего магнитного поля  $H$ , то модуль намагниченности  $J$  изменяется по кривой, лежащей выше  $Oa$ . При уменьшении модуля напряженности внешнего поля до  $H = 0$  образец обладает намагниченностью  $J = J_r$ , которая обращается в нуль лишь при помещении в размагничивающее внешнее поле напряженностью  $H = H_c$ . Знак « $\leftarrow$ » указывает на то, что размагничивающее поле должно быть направлено против намагничивающего. Дальнейший ход зависимости  $J = f(H)$  показан на рис. 21.11. Зависимость  $J = f(H)$  представляет собой *петлю магнитного гистерезиса*. Величины  $J_r$  и  $H_c$  называются соответственно *остаточной намагниченностью* и *коэрцитивной силой*. Они характеризуют способность ферромагнитного материала сохранять намагниченное состояние.

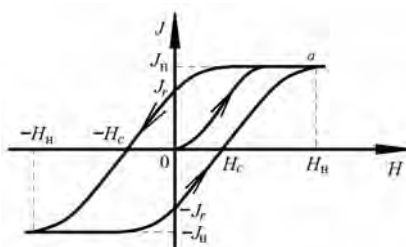


Рис. 21.11 Кривая намагничивания предварительно намагниченного ферромагнитного образца

Аналогичная петля магнитного гистерезиса для зависимости  $B = f(H)$  показана на рис. 21.12. Величина  $B_r$  называется остаточной индукцией. Можно показать, что площадь петли гистерезиса на рис. 21.12 пропорциональна количеству теплоты, выделяющемуся в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания.

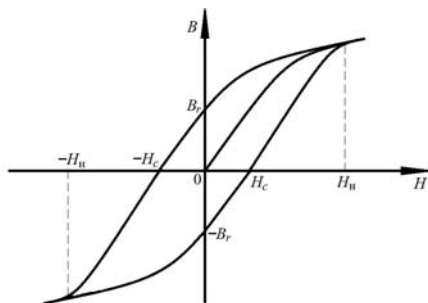


Рис. 21.12. Зависимость индукции внутреннего магнитного поля от напряженности внешнего поля для предварительно намагниченного ферромагнитного образца

Их применяют для изготовления постоянных магнитов.

Остаточная намагниченность ферромагнитного образца может быть нарушена при его деформации, сотрясении или механической обработке. Поэтому постоянные магниты следует беречь от механических воздействий. К аналогичным последствиям приводит и нагревание ферромагнетика. При повышении температуры ферромагнитного образца его остаточная намагниченность уменьшается. При температуре  $T_k$ , называемой **точкой Кюри**, она исчезает полностью. При температурах выше точки Кюри ферромагнетик ведет себя во внешних магнитных полях, как парамагнетик. Он утрачивает свои ферромагнитные свойства, а также у него скачкообразно меняются теплоемкость, удельное электрическое сопротивление и другие физические характеристики. Переход ферромагнетика в парамагнитное состояние при температуре Кюри не сопровождается выделением или поглощением теплоты, поэтому является примером фазового перехода второго рода. Точка Кюри железа составляет, например, 1043 К; кобальта – 1403 К; никеля – 631 К.

В зависимости от значения коэрцитивной силы различают магнитно-мягкие и магнитно-твердые материалы. Первые отличаются малым значением коэрцитивной силы (порядка 0,8–8 А/м) и очень малыми потерями энергии при перемагничивании. Их используют при изготовлении трансформаторов, сердечников электрических машин и т. д. Магнитно-твердые материалы характеризуются высоким значением коэрцитивной силы



Классическая теория ферромагнетизма была разработана П. Вейсом в 1907 г. Согласно этой теории весь объем ферромагнетика при температуре ниже точки Кюри разбит на небольшие области, называемые доменами, которые самопроизвольно (спонтанно) намагничены до насыщения, то есть внутри каждого из доменов все магнитные моменты всех атомов ориентированы одинаково. Линейные размеры доменов порядка  $10^{-3}$ – $10^{-2}$  см. В размагниченном ферромагнетике в отсутствие внешнего магнитного поля все магнитные моменты доменов ориентированы хаотично, и результирующая намагниченность равна нулю. Намагничивание такого образца при помещении во внешнее поле происходит благодаря двум процессам: повороту магнитных осей доменов и слиянию доменов, сопровождающемуся их укрупнением. Наиболее выражено увеличиваются те домены, которые спонтанно намагничены в направлениях, близких к направлению вектора магнитной индукции внешнего поля.

За формирование ферромагнитного порядка (объединение атомов в домены) отвечает обменное взаимодействие магнитных моментов атомов. Это специфическое квантовое взаимодействие тождественных частиц, приводящее к зависимости значения энергии системы частиц от ее полного спина. Оно представляет собой чисто квантовый эффект и не объясняется в рамках классической физики. Обменное взаимодействие связано не с магнитным, а с электрическим взаимодействием электронов.

При нагревании выше точки Кюри энергия теплового движения превышает энергию обменного взаимодействия магнитных моментов и доменная структура ферромагнетика разрушается.

Таким образом, как диа- и парамагнетизм, ферромагнетизм имеет квантовую природу и связан с наличием у электрона спина. В атоме электроны распределяются по оболочкам, на каждой из которых не может находиться больше определенного числа электронов. Все оболочки атома (кроме ближайшей к ядру) разделяются на электронные орбитали. Электроны распределяются по оболочкам и орбиталиям так, чтобы энергия атома была минимальной. Результирующие спиновые и орбитальные магнитные моменты всех электронов, находящихся на целиком заполненной оболочке или орбитали, равны нулю. Атомы ферромагнетиков принадлежат к числу переходных элементов таблицы Д. И. Менделеева. В этих атомах нарушается последовательность

заполнения электронами мест на оболочках и орбиталях. Прежде чем заполнится «нижняя» оболочка, начинается заполнение следующей оболочки. Поэтому в переходных атомах имеются не полностью занятые электронами внутренние оболочки и орбитали. В результате на внутренних оболочках таких атомов возникает нескомпенсированный спиновый магнитный момент. Таким образом, ферромагнетиками могут быть только элементы, имеющие недостроенные внутренние электронные оболочки.

**Антиферромагнетизм** – одно из магнитных состояний вещества, отличающееся тем, что магнитные моменты соседних частиц вещества ориентированы навстречу друг другу (антипараллельно), и поэтому намагниченность тела в целом очень мала. Этим антиферромагнетизм отличается от ферромагнетизма, при котором внутри одного домена все магнитные моменты атомов сонаправлены. Вещество может быть антиферромагнитным при температурах ниже определенной, называемой *точкой Нееля*. Антиферромагнетиками являются, например, твердый кислород, ряд редкоземельных элементов (диспрозий, гольмий, эрбий, тулий, тербий). Антиферромагнетики являются перспективными для создания ячеек памяти. Так, при низких температурах на базе антиферромагнетика возможно создание ячеек памяти, в которых для хранения 1 бита информации будут задействованы 12 атомов. Для сравнения, в современных жестких дисках для хранения 1 бита информации с помощью ферромагнитной записи необходимо порядка 1 миллиона атомов.

Среди магнетиков следует выделить **ферриты** – химические соединения оксида железа  $Fe_2O_3$  с оксидами других металлов, обладающие высокой намагниченностью и полупроводниковыми или диэлектрическими свойствами. Благодаря такому сочетанию свойств, ферриты широко распространены в радиотехнике и вычислительной технике.

## 21.6. Граничные условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим границу раздела двух однородных изотропных магнетиков. Найдем соотношения между индукцией и напряженностью магнитного поля в этих средах в произвольной точке  $A$ , лежащей на границе раздела сред. Проведем в точке  $A$  единичные векторы,

направленные по касательной  $\vec{\tau}$  к границе раздела двух сред и по нормали  $\vec{n}$  к ней. Построим вблизи точки  $A$  замкнутый контур  $L$ , имеющий форму прямоугольника, две стороны которого параллельны границе раздела сред и равны  $dl$ , а две перпендикулярны ей и равны  $h$  (рис. 21.13).

Предположим, что по поверхности раздела сред не текут макротоки. Тогда по теореме о циркуляции магнитного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0,$$

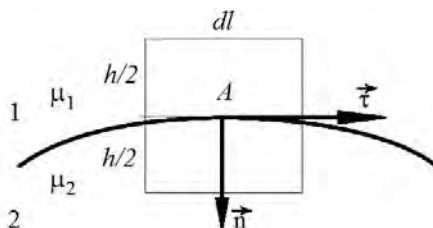


Рис. 21.13. К выводу граничных условий для магнитного поля

причем это равенство должно выполняться при любой толщине контура интегрирования  $h$ . Перейдем к пределу при  $h \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

В пределе при  $h \rightarrow 0$  длины боковых сторон прямоугольного контура  $L$  и значения криволинейного интеграла  $\int \vec{H} d\vec{l}$  вдоль этих сторон также стремятся к нулю, а верхняя и нижняя границы контура интегрирования неограниченно приближаются к поверхности раздела сред. Поэтому при обходе контура  $L$ , например, против часовой стрелки, имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_L \vec{H} d\vec{l} = (H_{2\tau} - H_{1\tau}) dl = 0,$$

откуда

$$H_{2\tau} = H_{1\tau}.$$

Итак, при переходе через границу раздела двух однородных изотропных магнетиков касательная (тангенциальная) составляющая вектора напряженности магнитного поля не изменяется.

Учитывая связь векторов напряженности и индукции магнитного поля (21.12), находим условие для тангенциальной составляющей вектора магнитной индукции:

$$\frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1}.$$

Для получения второй пары условий выберем вокруг точки  $A$  небольшой участок поверхности раздела сред площадью  $dS$ . Построим замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую этот участок границы раздела сред 1 и 2, имеющую вид поверхности прямого цилиндра, образующие которого длиной  $h$  параллельны вектору нормали  $\vec{n}$  к поверхности раздела, а основания перпендикулярны этому вектору (рис. 21.14).

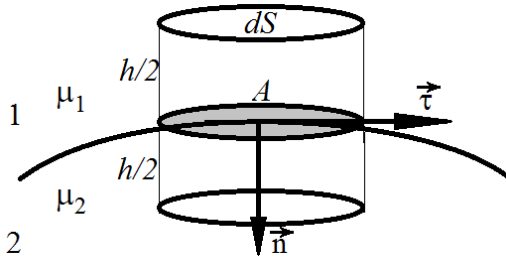


Рис. 21.14. К выводу граничных условий для магнитного поля

По теореме Остроградского–Гаусса для магнитного поля

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Перейдем к пределу при  $h \rightarrow 0$ , то есть устремим к нулю объем цилиндра

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

С учетом того, что в пределе  $h \rightarrow 0$  площадь боковой поверхности цилиндра и, следовательно, поверхностный интеграл  $\int_S \vec{B} d\vec{S}$  через нее стремятся к нулю, получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \vec{B} d\vec{S} = (B_{2n} - B_{1n})dS = 0.$$

Следовательно, второе условие для магнитного поля на границе раздела магнетиков имеет вид

$$B_{2n} = B_{1n},$$

**то есть при переходе через границу раздела двух однородных изотропных магнетиков нормальная составляющая вектора магнитной индукции не изменяется.**

Учитывая связь векторов напряженности и индукции магнитного поля (21.12), находим условие для нормальной составляющей вектора напряженности магнитного поля:

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}.$$

В частности, если граница раздела сред ортогональна линиям магнитной индукции, то  $B_{2n} = B_{1n}$ ,  $B_{2\tau} = B_{1\tau} = 0$  и модуль вектора магнитной индукции не изменяется при переходе из одной среды в другую.

## 22. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### 22.1. Опыты Фарадея

В 1831 г. английский физик Майкл Фарадей провел ряд опытов, благодаря которым было установлено явление электромагнитной индукции. Рассмотрим классические опыты Фарадея.

Первый опыт заключался в следующем. Электрическая цепь состояла из катушки, на которую был намотан провод, и гальванометра (рис. 22.1). Следует отметить, что цепь не была подключена к источнику тока, и, следовательно, электрический ток в цепи отсутствовал. Внутри катушки помещался постоянный магнит. При перемещении магнита внутри катушки гальванометр фиксировал появление в цепи электрического тока. Такой ток называется **индукционным**. При этом индукционный ток возникал как при введении магнита внутрь катушки, так и при выведении из нее.

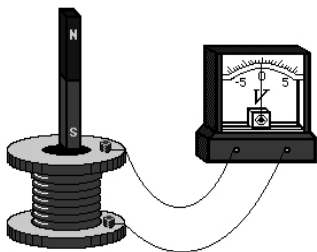


Рис. 22.1. Опыт Фарадея с перемещением магнита внутри катушки с проводом

Также оказалось, чем больше скорость движения магнита относительно катушки, тем больше отклонение стрелки гальванометра. Изменение полюсов магнита при перемещении внутри катушки изменяло направление отклонения стрелки гальванометра. Появление индукционного тока достигалось и в случае, если магнит оставался неподвижным, а катушка перемещалась относительно него.

Другой опыт, проведенный Майклом Фарадеем, представлял собой модификацию первого опыта за счет введения в катушку другой катушки без электрического тока, подключенной к источнику тока. Гальванометр фиксировал индукционный ток в цепи в момент включения или выключения электрического тока в катушке, вводимой во внутрь, а также в моменты увеличения или уменьшения электрического тока или при перемещении катушек относительно друг друга (рис. 22.2).

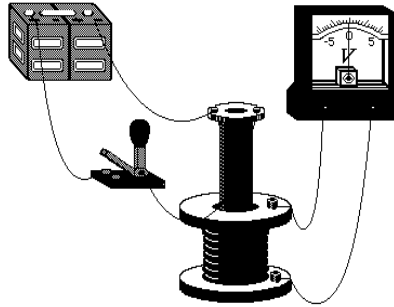


Рис. 22.2. Опыт Фарадея с перемещением катушки с током внутри катушки без электрического тока

Таким образом, Майклу Фарадею впервые удалось индуцировать электрический ток в цепи с помощью магнитного поля и установить причину возникновения индукционного тока – появление ЭДС индукции.

## 22.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея

*Электромагнитной индукцией* называется явление возникновения индукционного электрического тока в замкнутом проводящем контуре при всяком изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром.

**Закон электромагнитной индукции Фарадея:** в замкнутом проводящем контуре ЭДС индукции  $\mathcal{E}$ , порождающая индукционный ток  $I_i$ , пропорциональна скорости изменения магнитного потока  $\Phi$  через любую поверхность, ограниченную данным контуром:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (22.1)$$

Знак минус в выражении (22.1) соответствует правилу Ленца, которое будет более подробно рассмотрено ниже.

Выведем закон электромагнитной индукции Фарадея. Рассмотрим контур с подвижной металлической перемычкой 1–2 длиной  $l$  (рис 22.3).

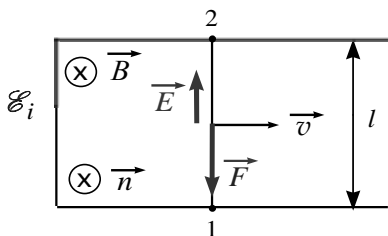


Рис. 22.3. К выводу закона электромагнитной индукции Фарадея

Поместим контур в однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  ( $\vec{B} = \text{const}$ ), которое направлено перпендикулярно плоскости контура. Приведем перемычку в движение с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Электроны в перемычке, заряд которых  $e$ , будут перемещаться вместе с перемычкой с такой же скоростью относительно магнитного поля  $\vec{B}$ . Тогда на каждый электрон  $e$  со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, направленная вдоль перемычки согласно правилу буравчика:

$$\vec{F} = -e[\vec{v}, \vec{B}].$$

Действие силы Лоренца эквивалентно действию на электрон поля напряженностью

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{-e} = [\vec{v}, \vec{B}].$$

Это поле не электростатического происхождения и его циркуляция по замкнутому контуру дает величину ЭДС, индуцируемую в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \int_L \vec{E} d\vec{l} = \int_L [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{l} = \int_{1-2} [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{l}.$$

Так как движется перемычка, то данный интеграл отличен от нуля только на участке 1–2. Вектор  $[\vec{v}, \vec{B}]$  есть величина постоянная, поэтому

$$\mathcal{E}_i = [\vec{v}, \vec{B}] \int_1^2 d\vec{l} = [\vec{v}, \vec{B}] l.$$



После циклической перестановки получаем

$$\mathcal{E} = [\vec{v}, \vec{B}] \vec{l} = \vec{B} [\vec{l}, \vec{v}] = \frac{\vec{B} [\vec{l}, \vec{v} dt]}{dt}.$$

Из рис. 22.4 видно, что

$$[\vec{l}, \vec{v} dt] = -\vec{n} dS = -d\vec{S},$$

где  $dS$  – приращение площади контура при движении перемычки;

$\vec{n}$  – вектор нормали к элементу поверхности  $dS$ .

Для ЭДС индукции получаем

$$\mathcal{E} = -\frac{\vec{B} d\vec{S}}{dt}.$$

Так как поток вектора магнитной индукции по определению

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S},$$

то в результате получаем закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея послужил для Максвелла отправной точкой в его теории электромагнитного поля.

### 22.3. Правило Ленца. Вихревые токи (токи Фуко)

**Правило Ленца:** индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим магнитным полем создавать магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную данным контуром.

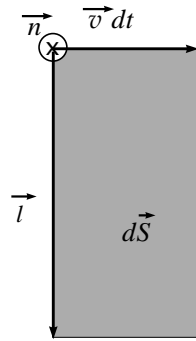


Рис. 22.4. Приращение площади контура  $d\vec{S}$

Поясним, как применять правило Ленца. Пусть изменение магнитного потока  $\Phi$  происходит за счет изменения величины магнитного поля, пронизывающего контур постоянной площади (рис. 22.5, а), который не меняет своей ориентации по отношению к направлению вектора  $\vec{B}$ .

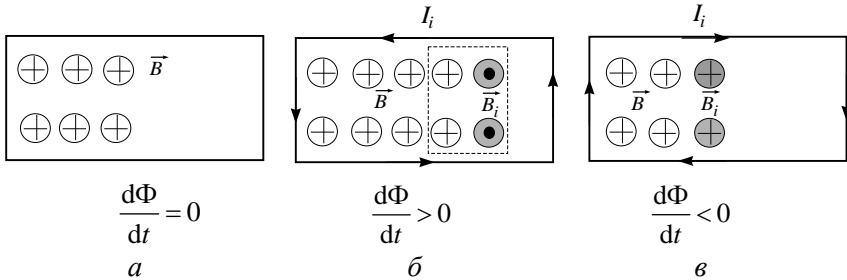


Рис. 22.5. К пояснению правила Ленца:

а – магнитный поток не изменяется; б – увеличивается; в – уменьшается

Изменение магнитного потока  $\Phi$  означает либо увеличение магнитного потока, либо его убыль. Если магнитный поток увеличивается (рис. 22.5, б), то магнитное поле  $\vec{B}_i$  индукционного тока своим магнитным потоком должно препятствовать этому росту. Следовательно, вектор  $\vec{B}_i$  должен быть направлен противоположно вектору магнитного поля  $\vec{B}$ , что и показано серыми кружками с точкой на рис. 22.5, б. В этом случае поток поля индукционного тока будет ослаблять нарастание потока  $\Phi$  внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  ровно настолько, насколько происходит его увеличение в данный момент времени.

Если магнитный поток убывает (рис. 22.5, в), то магнитное поле  $\vec{B}_i$  индукционного тока должно создавать магнитный поток, компенсирующий данную убыль. Поэтому вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}_i$  будет направлен в ту же сторону, что и вектор  $\vec{B}$ . В этом случае векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{B}_i$  складываются. При этом результирующий магнитный поток, создаваемый полями  $\vec{B}$  и  $\vec{B}_i$ , остается неизменным. Зная направление вектора  $\vec{B}_i$ , по правилу буравчика определяется направление индукционного тока  $I_i$  (рис. 22.5, б, в).

Таким образом, чтобы по правилу Ленца определить направление индукционного тока необходимо:

1. Определить, возрастает или уменьшается магнитный поток, пронизывающий поверхность, ограниченную контуром.

2. Изобразить вектор  $\vec{B}$  внешнего магнитного поля, в котором находится проводящий контур.

3. Изобразить вектор  $\vec{B}_i$  магнитного поля индукционного тока  $I_i$ .

При увеличении магнитного потока  $\Phi$  векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{B}_i$  будут направлены в противоположные стороны, при убыли – сонаправлены.

4. Применить правило буравчика: поступательное движение буравчика должно совпадать с направлением вектора  $\vec{B}_i$  индукционного тока, тогда направление вращения ручки буравчика покажет направление протекания индукционного тока  $I_i$  по контуру.

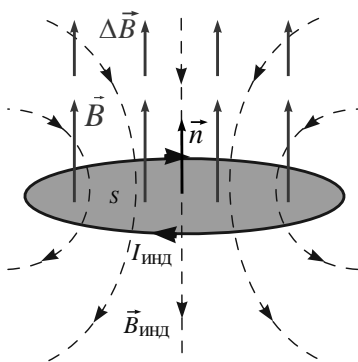


Рис. 22.6. Направление индукционного тока согласно правила Ленца

Правило Ленца для кругового витка показано на рис. 22.6.

Согласно явлению электромагнитной индукции, индукционный ток возникает в замкнутом контуре. Поэтому величину силы индукционного тока можно определить по закону Ома для замкнутой цепи

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R},$$

где  $R$  – сопротивление контура.

Явление электромагнитной индукции имеет широкое практическое применение. На этом явлении основана работа генераторов переменного тока. В генераторах изменение магнитного потока осуществляется, как правило, за счет изменения угла ориентации контура по отношению к направлению постоянного магнитного поля (вращающаяся рамка – ротор, покоящийся магнит – статор). Если контур вращается с циклической частотой  $\omega$  относительно линий индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ , то магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий контур площадью  $S$ , записывается в виде

$$\Phi = BdS \cos \omega t,$$

где  $t$  – текущее время.

Тогда, в соответствии с законом Фарадея для электромагнитной индукции, в рамке возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -BS \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

Из последнего выражения видно, что максимальная ЭДС индукции составляет

$$\mathcal{E}_{i \max} = BS\omega.$$

Таким образом, в генераторах ЭДС индукции изменяется по гармоническому закону и зависит от циклической частоты  $\omega$  вращения контура. Максимальная ЭДС индукции, возникающая во вращающемся контуре, определяется величиной индукции внешнего магнитного поля  $B$ , площадью контура  $S$  и частотой его вращения  $\omega$ .

**Токами Фуко**, или **вихревыми токами**, называются индукционные токи, возбуждаемые в сплошных массивных проводниках. Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах. Принцип действия индукционной печи основан на разогреве проводящего вещества в катушке, на которую подается электрический ток высокой частоты и большой силы. При этом массивные куски вещества могут разогреваться до температуры плавления, а при использовании в качестве среды инертных газов можно получить высокочистые металлы.

## 22.4. Индуктивность контура с током. Явление самоиндукции. Электродвижущая сила самоиндукции

Явление электромагнитной индукции возникает в результате изменения магнитного потока, вызванного внешними причинами: изменением внешнего магнитного поля, вращением контура, изменением площади поверхности контура. При этом первоначально в кон-

туре электрический ток отсутствует. Однако индукционный ток может возникать в замкнутом контуре в силу «внутренней» причины, согласно которой изменение магнитного потока связано с электрическим током, текущим в контуре. Такое явление получило название явления самоиндукции.

Таким образом, *явлением самоиндукции* называется явление возникновения индукционного тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, связанного с электрическим током, текущим в контуре.

При этом в замкнутом контуре может протекать как переменный, так и постоянный электрический ток.

Рассмотрим, как связан магнитный поток с силой тока, текущего в контуре. Магнитный поток, пронизывающий контур с током, пропорционален магнитной индукции:  $\Phi \sim B$ .

Из закона Био–Савара–Лапласа следует, что величина индукции магнитного поля  $B$  проводника с током пропорциональна силе тока  $I$ , текущего по проводнику:  $B \sim I$ . Следовательно, магнитный поток, связанный с текущим в контуре током, пропорционален силе тока  $I$ :

$$\Phi \sim I.$$

Вводя коэффициент пропорциональности  $L$ , называемый индуктивностью контура, для магнитного потока получаем

$$\Phi = LI. \quad (22.2)$$

Из (22.2) следует, что **индуктивность  $L$  контура численно равна магнитному потоку, сцепленному с контуром, при силе тока в контуре, равной 1 А.**

За единицу измерения индуктивности в СИ принят 1 генри (Гн). Контур имеет **индуктивность 1 Гн, если сила тока в контуре в 1 А приводит к возникновению магнитного потока в 1 Вб через любую поверхность, ограниченную контуром.**

Индуктивность является характеристикой контура, поэтому зависит от формы и его геометрических размеров, а также от магнитных свойств среды, в которую помещен контур.

При изменении магнитного потока возникает ЭДС самоиндукции и, следовательно, индукционный ток. Подставляя (22.2) в (22.1), получим выражение для ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(IL)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}. \quad (22.3)$$

Из (22.3) следует, что появление индукционного тока  $I_i$  в контуре происходит по следующим схемам:

- для переменного тока  $I \rightarrow \frac{dI}{dt} \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \mathcal{E}_s \rightarrow I_i$  при  $L = \text{const}$ ;
- постоянного тока  $L \rightarrow \frac{dL}{dt} \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \mathcal{E}_s \rightarrow I_i$  при  $I = \text{const}$ .

Нужно четко различать ток  $I$ , первоначально текущий в контуре, и индукционный ток  $I_i$ , порожденный ЭДС самоиндукции.

Если  $L = \text{const}$ , то (22.3) примет вид

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}. \quad (22.4)$$

Знак минус в (22.3) и (22.4) показывает, что направление индукционного тока определяется правилом Ленца так же, как и в случае явления электромагнитной индукции.

**Правило Ленца для тока самоиндукции: ток самоиндукции всегда направлен так, чтобы своим магнитным полем создавать магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, связанного с текущим в контуре электрическим током.**

Если переменный ток в проводнике нарастает, то согласно (22.2) магнитный поток будет увеличиваться. Индукционный ток должен быть направлен так, чтобы своим магнитным полем создавать магнитный поток, препятствующий росту магнитного потока первоначально текущего по контуру тока. В этом случае магнитные потоки первоначального и индукционного токов вычитаются. Следовательно, индукционный ток будет течь в сторону, противоположную направлению первоначального тока (рис. 22.7, а).

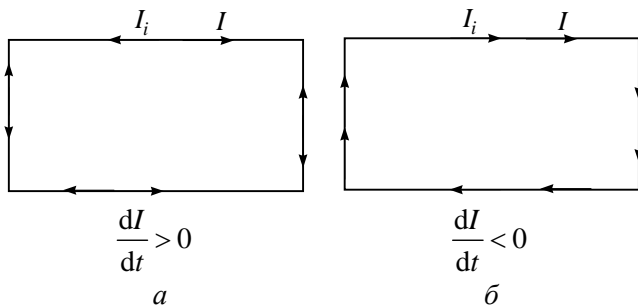


Рис. 22.7. Применение правила Ленца к определению направления индукционного тока:  
*a* – ток в контуре возрастает; *б* – ток в контуре уменьшается

В случае, когда переменный ток убывает, его магнитный поток уменьшается. Поэтому индукционный ток должен быть направлен так, чтобы препятствовать его убыли. То есть он будет сонаправлен с первоначальным током (рис. 22.7, *б*). В этом случае магнитные потоки будут складываться.

На явлениях самоиндукции и взаимной индукции основан принцип работы трансформаторов.

## 22.5. Токи при замыкании и размыкании цепи

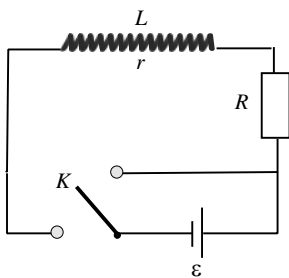


Рис. 22.8. Электрическая цепь

Рассмотрим электрическую цепь (рис. 22.8), состоящую из резистора сопротивлением  $R$ , источника постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ , катушки индуктивностью  $L$  и омическим сопротивлением  $r$ , ключа  $K$ . Внутренним сопротивлением источника тока пренебрегаем.

### 1. Экстраток при замыкании электрической цепи.

При замыкании ключа  $K$  в цепи, содержащей катушку, ток не сразу достигает своего постоянного значения  $I_0$ , определяемого законом Ома

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

а нарастает постепенно. Следовательно, можно говорить о том, что индуктивность замкнутого контура является мерой инертности контура по отношению к изменению в нем силы тока, то есть понятие индуктивности в цепи аналогично понятию массы в механике.

Поскольку электрический ток, протекающий через катушку, монотонно возрастает, то и магнитный поток, пронизывающий катушку, также монотонно возрастает. Изменение магнитного потока приводит к возникновению в катушке ЭДС самоиндукции и соответствующего ей индукционного тока.

Индукционный ток, который возникает в катушке в момент замыкания или размыкания электрической цепи, называется *экстраток* замыкания или размыкания.

Согласно правилу Ленца, **экстраток замыкания направлен против основного тока, а экстраток размыкания – по направлению основного тока.**

Таким образом, в электрической цепи, содержащей катушку, в момент замыкания цепи наряду с ЭДС источника постоянного тока действует ЭДС самоиндукции. С учетом ЭДС самоиндукции закон Ома для замкнутой цепи имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_s}{R + r}, \quad (22.5)$$

где  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ .

Подставим  $\mathcal{E}_s$  в (22.5):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} - \frac{L}{R + r} \frac{dI}{dt}. \quad (22.6)$$

Умножив левую и правую части уравнения (22.6) на  $\frac{R + r}{L}$ , получаем



$$I \frac{R+r}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{dI}{dt}$$

или

$$\frac{dI}{dt} + I \frac{R+r}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (22.7)$$

Уравнение (22.7) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной  $I$ . Введем обозначение

$$\tau = \frac{L}{R+r}, \quad (22.8)$$

где  $\tau$  представляет собой постоянную времени электрической цепи.

Уравнение (22.7) с учетом (22.8) примет вид

$$\frac{dI}{dt} + \frac{I}{\tau} = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (22.9)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (22.9) будем искать как

$$I = I_1 + I_2,$$

где  $I_1$  – решение однородного уравнения вида  $\frac{dI}{dt} + \frac{I}{\tau} = 0$ ;

$I_2$  – частное решение неоднородного уравнения вида  $\frac{dI}{dt} + \frac{I}{\tau} = \frac{\mathcal{E}}{L}$ .

Найдем решение  $I_1$  однородного уравнения

$$\frac{dI}{dt} + \frac{I}{\tau} = 0.$$

Разделим переменные и получим

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= -\frac{I}{\tau}; \\ \frac{dI}{I} &= -\frac{dt}{\tau}.\end{aligned}\tag{22.10}$$

Проинтегрируем (22.10):

$$\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{dt}{\tau}.$$

Получим

$$\ln I = -\frac{t}{\tau} + \ln C,$$

где  $\ln C$  – константа интегрирования.

Тогда

$$\begin{aligned}\ln I - \ln C &= -\frac{t}{\tau}; \\ \ln \frac{I}{C} &= -\frac{t}{\tau}.\end{aligned}$$

По определению логарифма

$$\frac{I}{C} = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Тогда решение однородного уравнения имеет вид

$$I_1 = Ce^{-\frac{t}{\tau}}.\tag{22.11}$$

Частное решение неоднородного уравнения можно записать как

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{L}\tau.\tag{22.12}$$

Сумма двух решений (22.11) и (22.12) дает общее решение дифференциального уравнения (22.9):

$$I = I_1 + I_2 = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\mathcal{E}}{L}\tau.$$

Учитывая замену (22.8) для постоянной времени  $\tau$  цепи, имеем

$$I = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\mathcal{E}}{R+r}\tau = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + I_0.$$

Определим постоянную  $C$  из граничных условий. При  $t = 0$  сила тока  $I = 0$ , тогда

$$0 = C + I_0, \quad C = -I_0.$$

Общее решение уравнения (22.9) примет вид

$$I = I_0 \left( 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (22.13)$$

Выражение (22.13) представляет зависимость изменения тока в цепи с катушкой индуктивностью  $L$  от времени  $t$  после замыкания ключа, то есть после подключения источника постоянного тока. Вид выражения (22.13) показан на рис. 22.9.

Данная зависимость представляет собой результат сложения основного тока и экстратока замыкания. В начальный момент времени  $t = 0$  множитель  $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1$  и ток  $I = 0$ . С течением времени электрический ток достигнет своего максимального значения  $I_0$  и станет постоянным.

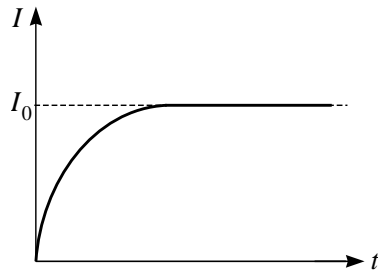


Рис. 22.9. Вид функции нарастания тока при замыкании цепи

Рассмотрим, от чего зависит и как быстро в электрической цепи устанавливается постоянный ток  $I_0$  после замыкания ключа. Из анализа выражения (22.13) следует, что  $I \rightarrow I_0$ , если функция  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  стремится к нулю. Для этого показатель экспоненты

$$\frac{t}{\tau} = \frac{t}{L}(R+r)$$

должен быть бесконечно большим.

Это возможно в следующих случаях:

1. Электрическая цепь имеет большие омические сопротивления резистора  $R$  и катушки  $r$  при малой индуктивности катушки  $L$ . Тогда отношение  $\frac{R+r}{L}$  становится бесконечно большой величиной

и  $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$ , а  $I \rightarrow I_0$ .

2. Время установления постоянного тока велико. Тогда можно полагать, что  $t$  стремится к бесконечности,  $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$ , а  $I \rightarrow I_0$ .

Из первого пункта следует, **что время, в течение которого в электрической цепи устанавливается постоянный ток, определяется величиной омического сопротивления цепи и ее индуктивностью.**

### **2. Экстраток при размыкании электрической цепи.**

Определим характер изменения силы тока при размыкании электрической цепи, изображенной на рис. 22.8. Когда ключ замкнут, сила тока в цепи постоянна и равна  $I_0$ . При размыкании ключа ток постепенно начинает убывать. По мере убывания тока в катушке убывает магнитное поле, что приводит к возбуждению в катушке ЭДС самоиндукции, а следовательно, и индукционного тока, который и представляет собой экстраток размыкания. Выражения для закона Ома при размыкании цепи примет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}_s}{R+r}. \quad (22.14)$$

Подставив в (22.14)  $\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}$ , имеем

$$I = -\frac{L}{R+r} \frac{dI}{dt}. \quad (22.15)$$

Умножив левую и правую части уравнения (22.15) на  $\frac{R+r}{L}$ , получим

$$\frac{dI}{dt} = -I \frac{R+r}{L}.$$

С учетом выражения (22.8) разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{\tau}, \quad \int \frac{dI}{I} = -\int \frac{dt}{\tau}.$$

$$\ln I = -\frac{t}{\tau} + \ln C.$$

Из условия  $I = I_0$  при  $t = 0$  получаем

$$\ln I_0 = -\frac{0}{\tau} + \ln C, \quad \ln C = \ln I_0.$$

Тогда

$$\ln I = -\frac{t}{\tau} + \ln I_0, \quad \ln I - \ln I_0 = -\frac{t}{\tau};$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{t}{\tau}.$$

В итоге получаем зависимость, согласно которой изменение электрического тока при размыкании электрической цепи происходит по экспоненте

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (22.16)$$

Из выражения (22.16) определим физический смысл постоянной времени  $\tau$  электрической цепи. Пусть  $t = \tau$ , тогда

$$I = \frac{I_0}{e} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Следовательно, **постоянная времени электрической цепи** – это физическая величина, численно равная времени, в течение которого электрический ток при размыкании цепи убывает в  $e$  раз (2,7 раза).

График зависимости (22.16) представлен на рис. 22.10. Приведенная кривая описывает характер изменения электрического тока при размыкании электрической цепи, содержащей замкнутый контур индуктивностью  $L$ . В начальный момент времени при  $t = 0$  множитель  $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1$  и  $I = I_0$ . При  $t \rightarrow \infty$  множитель  $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$  и ток  $I \rightarrow 0$ .

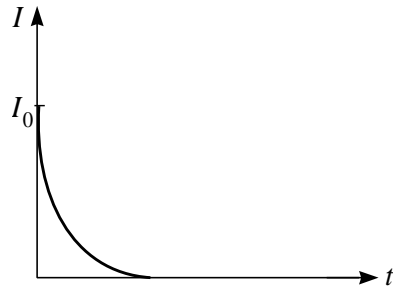


Рис. 22.10. Вид функции изменения тока при размыкании цепи

На основании выражения (22.16) можно определить ЭДС самоиндукции при размыкании цепи. Дифференцируем по времени выражение (22.16)

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{t}{\tau} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Тогда для величины ЭДС самоиндукции при размыкании цепи получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S &= -L \frac{dI}{dt} = -L \left( -\frac{t}{\tau} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{L}{\tau} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; \\ \mathcal{E}_S &= \frac{L(R+r)}{L} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = (R+r) I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}} = \mathcal{E} e^{-\frac{t(R+r)}{L}}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{E}$  – ЭДС источника постоянного тока.

Таким образом, ЭДС самоиндукции определяется отношением омического сопротивления цепи к индуктивности катушки и может достигать значений, в несколько раз превышающих ЭДС источника постоянного тока, что может вызывать пробой в электрической цепи.

## 22.6. Взаимная индуктивность

**Потокосцепление**, или **полный магнитный поток**  $\Psi$  – это суммарный магнитный поток, сцепленный со всеми витками катушки индуктивности:

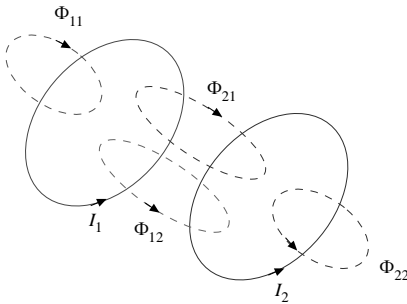
$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i,$$

где  $N$  – число витков в катушке;

$\Phi_i$  – поток, создаваемый  $i$ -м витком катушки.

В случае, если потоки в каждом витке катушки одинаковы, то потокосцепление катушки

$$\Psi = N\Phi,$$



где  $\Phi$  – поток, создаваемый током в одном витке катушки.

Рассмотрим два контура, по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 22.11). Ток  $I_1$  в первом контуре создает магнитный поток  $\Phi_1$ . Он проходит как через первый, так и через второй контур

Рис. 22.11. К определению взаимной индуктивности контуров

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12},$$

где  $\Phi_{11}$  – часть потока  $\Phi_1$ , проходящая только через первый контур;

$\Phi_{12}$  – часть потока  $\Phi_1$ , проходящая через первый и второй контур.

Аналогично можно записать для потока  $\Phi_2$ , создаваемого током  $I_2$ , текущим во втором контуре:

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21},$$

где  $\Phi_{22}$  – часть потока  $\Phi_2$ , проходящая только через второй контур;

$\Phi_{21}$  – часть потока  $\Phi_2$ , проходящая через второй и первый контур.

Пусть имеется две катушки индуктивности с количеством витков  $N_1$  и  $N_2$  соответственно. Тогда потокосцепления первой и второй катушки соответственно равны

$$\Psi' = N_1(\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = N_1\Phi_1 \pm N_1\Phi_{21} = \Psi_1 \pm \Psi_{21};$$

$$\Psi'' = N_2(\Phi_1 \pm \Phi_{12}) = N_2\Phi_2 \pm N_2\Phi_{12} = \Psi_2 \pm \Psi_{12}.$$

Знак «+» соответствуют сонаправленному направлению магнитного потока от своего тока и потока, создаваемого током в соседней катушке. Знак «-» соответствуют встречному направлению потоков. Потокосцепление  $\Psi_{21}$  пропорционально току  $I_2$ , а  $\Psi_{12}$  – току  $I_1$ :

$$\Psi_{21} = N_1\Phi_{21} = L_{21} I_2; \quad (22.17)$$

$$\Psi_{12} = N_2\Phi_{12} = L_{12}I_1. \quad (22.18)$$

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  (Гн) называют взаимной индуктивностью:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \frac{\Psi_{12}}{I_1}.$$

**Взаимная индуктивность двух катушек** – это общий поток индукции магнитного поля двух катушек при силе тока в одной из катушек, равной единице.

Взаимная индуктивность зависит от взаимного расположения катушек, числа витков, геометрических размеров катушек и от магнитной проницаемости  $\mu$  сердечников, на которые они намотаны. Если  $\mu = \text{const}$ , то взаимная индуктивность не зависит от величины токов.



**Явлением взаимоиנדукции** называется явление индукцирования ЭДС взаимоиנדукции в одной катушке при изменении тока в другой.

Полные ЭДС, индукцированные в первой и второй катушке, соответственно равны

$$\mathcal{E}_{M1} = -\frac{d}{dt}(\Psi_1 \pm \Psi_{21});$$

$$\mathcal{E}_{M2} = -\frac{d}{dt}(\Psi_2 \pm \Psi_{12}).$$

Потокоцепления первой и второй катушек пропорциональны токам  $I_1$  и  $I_2$ :

$$\Psi_1 = L_1 I_1, \quad \Psi_2 = L_2 I_2,$$

где  $L_1, L_2$  – индуктивности первой и второй катушек соответственно.

Тогда с учетом выражений (22.17) и (22.18) окончательно получаем

$$\mathcal{E}_{M1} = -\frac{d}{dt}(L_1 I_1 \pm L_{21} I_2) = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \mp L_{21} \frac{dI_2}{dt},$$

$$\mathcal{E}_{M2} = -\frac{d}{dt}(L_2 I_2 \pm L_{12} I_1) = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \mp L_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

Таким образом, ЭДС, индукцируемые в катушках, определяются скоростями изменения токов в них.

## 22.7. Энергия магнитного поля.

### Объемная плотность энергии

Рассмотрим цепь, представленную на рис. 22.12. Полагаем индуктивность катушки  $L = \text{const}$ . При замкнутом ключе К в катушке течет ток  $I_0$ . Если ключ К разомкнуть, в цепи будет течь убывающий ток, при этом совершится работа

$$dA = -Id\Phi = -LI dI.$$

После интегрирования, получим

$$dA = -L \int_{I_0}^0 IdI = \frac{LI_0^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии эта работа совершается током за счет энергии магнитного поля в катушке

$$W_M = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (22.19)$$

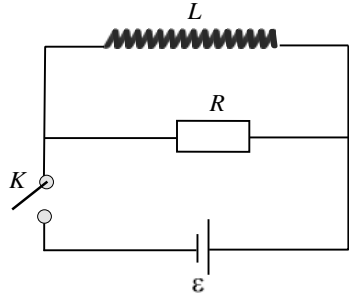


Рис. 22.12. К определению энергии магнитного поля

Выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие само магнитное поле. Индуктивность катушки определяется следующим образом:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (22.20)$$

где  $n$  – число витков на единицу длины;

$V$  – объем катушки.

Напряженность магнитного поля внутри катушки

$$H = nI_0,$$

откуда

$$I_0 = \frac{H}{n}. \quad (22.21)$$

Подставим выражения (22.20), (22.21) в формулу (22.19):

$$W_M = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V.$$

**Объемная плотность энергии** – это энергия, приходящаяся на единицу объема

$$w = \frac{W_M}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Учитывая, что  $B = \mu_0 \mu H$ , получим соотношения для объемной плотности энергии

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

Таким образом, объемная плотность энергии магнитного поля определяется характеристиками самого поля.

## 22.8. Трансформаторы. Работа перемагничивания ферромагнетика

30 ноября 1876 г. выдающийся русский электротехник и изобретатель Павел Николаевич Яблочков получил французский патент, в котором был описан принцип действия и способ применения трансформатора.

**Трансформатор** – это статическое электромагнитное устройство, имеющее две или более индуктивно связанные обмотки на магнитопроводе и предназначенное для преобразования переменного тока одного напряжения в переменный ток другого напряжения той же частоты (рис. 22.13).

Принцип действия трансформатора заключается в следующем. При включении первичной обмотки в цепь с переменным напряжением по ней начнет протекать переменный ток, который создаст вокруг обмотки переменное магнитное поле. Это поле пронизывает витки первичной обмотки и наводит в ней ЭДС самоиндукции. Основная часть созданного магнитного потока будет замыкаться по сердечнику, пронизывать витки вторичной обмотки и создавать в ней ЭДС взаимной индукции. При подключении нагрузки к вторичной обмотке в ней будет протекать переменный ток.

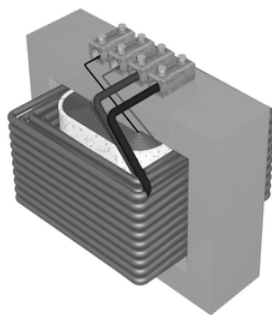


Рис. 22.13. Трансформатор

Основными частями конструкции трансформатора являются:

– магнитопровод – закрытый сердечник из листов электротехнической стали, изолированных друг от друга лаком, пермаллоя или феррита, исполняемых в различной геометрической конструкции. По типу конструкции различают тороидальный, стержневой и броневой магнитопровод (рис. 22.14). Тип конструкции не влияет на эксплуатационные характеристики трансформатора;

– обмотки, которые выполняются из электрического проводника круглого или прямоугольного сечения;

– изоляция (лаки, бумага и пр.);

– система охлаждения;

– элементы для монтажа, доступа к выводам обмоток, защиты трансформатора и т. п.

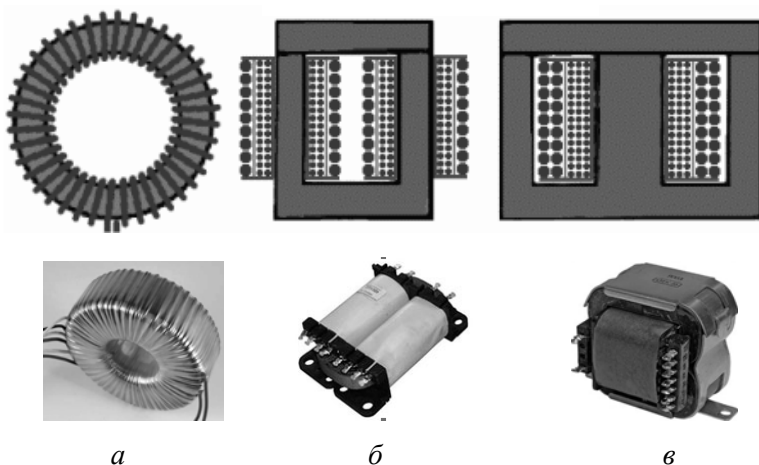


Рис. 22.14. Трансформаторы:  
*а* – тороидальный; *б* – стержневой; *в* – броневой

Рассмотрим принцип действия трансформатора. Мгновенные значения напряжения  $U$ , тока  $I$ , ЭДС  $\mathcal{E}$ , число витков  $N$ , относящиеся к первичной и вторичной обмоткам, обозначим индексами 1 и 2 соответственно:  $U_1, I_1, \mathcal{E}_1, N_1$  и  $U_2, I_2, \mathcal{E}_2, N_2$  (рис. 22.15). Переменное напряжение  $U_1$ , подаваемое на первичную обмотку, создает в ней ток  $I_1$ , который в магнитопроводе создает магнитный поток  $\Phi$ .

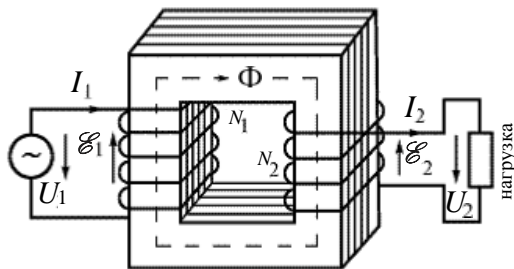


Рис. 22.15. Принцип действия трансформатора

Если напряжение  $U_1$  – синусоидальное, то и магнитный поток также будет синусоидальным:

$$\Phi = \Phi_{\max} \sin \omega t,$$

где  $\Phi_{\max}$  – максимальный магнитный поток;

$\omega$  – циклическая частота напряжения, подаваемого на первичную обмотку.

Мгновенные значения ЭДС в первичной и вторичной обмотке соответственно будут равны

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt};$$

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi$  – суммарный магнитный поток через один виток обмотки.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -N_1 \frac{d\Phi}{dt} = N_1 \frac{d}{dt} (\Phi_{\max} \sin \omega t) = N_1 \omega \Phi_{\max} \cos \omega t = \\ &= N_1 \omega \Phi_{\max} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = N_2 \frac{d}{dt}(\Phi_{\max} \sin \omega t) = N_2 \omega \Phi_{\max} \cos \omega t = \\ &= N_2 \omega \Phi_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Из последних выражений следует, что ЭДС, возбуждаемые в обмотках, отстают по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  от магнитного потока.

Амплитудные значения ЭДС

$$\mathcal{E}_{\max 1} = N_1 \omega \Phi_{\max}, \quad \mathcal{E}_{\max 2} = N_2 \omega \Phi_{\max}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{\max 1} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{\max 2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, действующие значения ЭДС в обмотках будут равны:

$$\mathcal{E}_{\Delta 1} = \frac{\mathcal{E}_{\max 1}}{\sqrt{2}} = \frac{N_1 \omega \Phi_{\max}}{\sqrt{2}} = 4,44 N_1 \nu \Phi_{\max};$$

$$\mathcal{E}_{\Delta 2} = \frac{\mathcal{E}_{\max 2}}{\sqrt{2}} = \frac{N_2 \omega \Phi_{\max}}{\sqrt{2}} = 4,44 N_2 \nu \Phi_{\max},$$

где  $\omega = 2\pi\nu$ ;

$\nu$  – частота переменного напряжения  $U_1$ , подаваемая в первичную обмотку.

Отношение действующих значений ЭДС первичной и вторичной обмотки называется **коэффициентом трансформации**:

$$k = \frac{\mathcal{E}_{\Delta 1}}{\mathcal{E}_{\Delta 2}} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Трансформатор работает в следующих режимах: холостого хода, нагрузки, короткого замыкания. Холостой ход трансформатора – это работа трансформатора при разомкнутой вторичной обмотке. По первичной обмотке протекает ток холостого хода. Исследование работы холостого хода трансформатора позволяет определить действительный коэффициент трансформации, силу тока холостого хода, реальные потери в сердечнике, электрическое сопротивление холостого хода трансформатора. При холостом ходе  $I_2 = 0$ ,  $U_{д2} = \mathcal{E}_{д2}$ , ток  $I_1$  мал, падение напряжения в первичной обмотке также незначительно, поэтому  $U_{д1} \approx \mathcal{E}_{д1}$  и отношение ЭДС можно заменить отношением действующих напряжений  $\frac{U_{д1}}{U_{д2}} = \frac{\mathcal{E}_{д1}}{\mathcal{E}_{д2}} = k$ .

Реальные потери в сердечнике трансформатора происходят по причине совершения работы магнитным полем по перемагничиванию ферромагнетика. Перемагничивание ферромагнетика происходит нелинейным образом по петле гистерезиса. Можно показать, что величина работы магнитного поля за один цикл перемагничивания численно равна площади петли гистерезиса. Эта работа затрачивается на увеличение внутренней энергии сердечника, то есть на его нагревание. В механизме перемагничивания ферромагнетика участвуют два процесса. Первый связан со смещением доменных границ и увеличением размеров доменов, ориентированных по полю. Второй связан с вращением вектора намагниченности доменов в направлении внешнего магнитного поля. Так как в трансформаторе поле является переменным, то эти процессы приводят к существенному нагреванию сердечника трансформатора. Поэтому для трансформаторов необходимо предусматривать систему охлаждения.

В режиме нагрузки во вторичной цепи трансформатора подключена нагрузка. Во вторичной обмотке протекает ток нагрузки, а в первичной – ток, который можно представить как сумму тока нагрузки и тока холостого хода. Данный режим является основным рабочим для трансформатора.

Режим короткого замыкания получается в результате замыкания вторичной цепи накоротко. Исследование короткого замыкания трансформатора позволяют определить потери на нагрев обмоток в цепи трансформатора.

Максимальное значение КПД в трансформаторах большой мощности очень высок: 0,98–0,99. КПД максимален при такой нагрузке, при которой электрические потери в обмотках равны магнитным потерям в сердечнике.

В электросетях при передаче электроэнергии на большие расстояния применение трансформаторов позволяет контролировать высокие напряжения. Также трансформаторы используются для устранения угрозы поражения электрическим током (при одновременном касании человеком фазового провода или корпуса прибора с плохой изоляцией и заземленного предмета тело человека замыкает электрическую цепь). Прибор, включенный в сеть через трансформатор, безопасен, поскольку вторичная цепь трансформатора контакта с «землей» не имеет.

Трансформаторы используются в источниках питания электроприборов для преобразования необходимого для питания напряжения из напряжения электросети. В современных блоках питания используется схема, согласно которой переменное напряжение сети сначала выпрямляют, после чего преобразуют в высокочастотные импульсы. Использование импульсных трансформаторов позволяет передавать форму импульсов напряжения в неискаженном виде.

Измерительные трансформаторы применяют для измерения переменных напряжений и токов в цепях релейной защиты и автоматики. Измерительно-силовые трансформаторы используются в схемах генераторов переменного тока малой и средней мощности для стабилизации выходного напряжения генератора.



## 23. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Среди различных электрических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряд на конденсаторе, сила электрического тока в цепи, напряжение на конденсаторе, напряжение на катушке, энергия электрического поля и энергия магнитного поля) изменяются периодически. Электромагнитные колебания используют в различных важных технических устройствах. Технические переменные токи также являются электрическими колебаниями. Можно также указать, что световые явления представляют собой не что иное, как электромагнитные колебания. Электромагнитные колебания могут возникать в электрической цепи, содержащей индуктивность и емкость.

### 23.1. Колебательный контур

Рассмотрим колебательный контур, представляющий собой электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных конденсатора  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и активного (омического) сопротивления  $R$  (рис. 23.1).

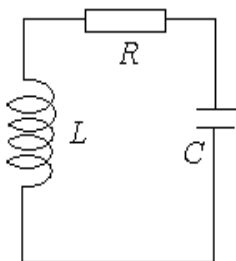


Рис. 23.1. Электромагнитный колебательный контур

Обозначим через  $q$  заряд на обкладках конденсатора в данный момент времени,  $U$  – разность потенциалов на его пластинах,  $U = \frac{q}{C}$ .

Воспользуемся вторым правилом Кирхгофа (законом Ома для неоднородного участка цепи), согласно которому сумма падений напряжений на участках в замкнутом контуре равна сумме имеющихся в контуре ЭДС. В рассматриваемом контуре действует ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$ , возникающая в катушке индуктивности при изменении силы тока. Следовательно, уравнение Кирхгофа для данного колебательного контура имеет вид

$$IR + U = -L \frac{dI}{dt}, \quad (23.1)$$

где  $IR$  – падение напряжения на активном сопротивлении  $R$ ;  
 $I$  – сила тока в цепи.

Так как сила тока  $I = \frac{dq}{dt}$ , уравнение (23.1) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (23.2)$$

С учетом обычно применяемых обозначений  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (собственная частота колебательного контура) и  $\beta = \frac{R}{2L}$  (коэффициент затухания) уравнение (23.2) можно переписать в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (23.3)$$

Это уравнение позволяет описать динамику изменения заряда конденсатора в рассматриваемом контуре в отсутствие внешней ЭДС.

### **23.2. Свободные гармонические колебания в идеальном колебательном контуре**

Если активное сопротивление контура  $R$  равно нулю, то коэффициент  $\beta$  также равен нулю и уравнение (23.3) превращается в дифференциальное уравнение, описывающее свободные электромагнитные колебания в так называемом идеальном колебательном контуре:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (23.4)$$

Это уравнение хорошо знакомо из учения о механических колебаниях. Его решением является гармоническая функция:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (23.5)$$

В этом легко убедиться путем подстановки (23.5) в (23.4), которая превращает (23.4) в тождество. Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ . Эта частота называется собственной частотой контура.

Основное свойство колебательных движений – повторяемость через равные промежутки времени. Математически это означает, что

$$q(t) = q(t + T),$$

где  $T$  – период колебаний.

Воспользовавшись явным видом зависимости  $q(t)$  (23.5) получим

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) = q_m \cos(\omega_0(t + T) + \alpha). \quad (23.6)$$

Учитывая, что период функции косинус равен  $2\pi$ , соотношение будет выполняться, если аргументы косинусов в левой и правой частях соотношения (23.6) отличаются на  $2\pi$ . После несложных преобразований получаем

$$\omega_0 t + \alpha + 2\pi = \omega_0 t + \omega_0 T + \alpha,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC};$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (23.7)$$

Соотношение (23.7) носит название *формула Томсона*.

Из (23.5) можно получить выражения для напряжения на конденсаторе  $U$  и силы тока в контуре  $I$ :

$$U = \frac{q}{C} = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad (23.8)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (23.9)$$

где  $U_m = \frac{q_m}{C}$  и  $I_m = \omega_0 q_m$  – амплитудные значения напряжения и силы тока;

$\alpha$  – начальная фаза колебаний.

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется со временем гармонически с частотой  $\omega_0$ . Сила тока (23.9) опережает по фазе напряжение (23.8) и заряд на конденсаторе на  $\frac{\pi}{2}$ , то есть в момент времени, когда ток достигает наибольшего значения, заряд и напряжение на конденсаторе обращаются в ноль и наоборот. Когда конденсатор заряжен до максимальной разности потенциалов

$U_m = \frac{q_m}{C}$ , в его электрическом поле сосредоточена энергия

$W_{\text{эл}} = \frac{CU^2}{2}$ , а ток отсутствует. В момент, когда разность потенциалов и энергия электрического поля между обкладками конденсатора равны нулю, ток в контуре максимален и в магнитном поле катушки

индуктивности запасена энергия  $W_M = \frac{LI^2}{2}$ . Колебания в контуре сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного поля, при этом в идеальном контуре выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{LI^2}{2} \quad (23.10)$$

и колебания в этом случае являются незатухающими, то есть их амплитуда (23.10) не изменяется со временем.

### 23.3. Свободные затухающие колебания в колебательном контуре

Всякий реальный колебательный контур обладает активным сопротивлением  $R$ . В отсутствие внешней ЭДС ( $\varepsilon = 0$ ) энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется на этом сопротивлении на его нагревание в соответствии с законом Джоуля–Ленца ( $Q = I^2 R t$ ), вследствие чего колебания постепенно затухают. Уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид (23.3). Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением затухающих механических колебаний. При условии  $\beta^2 = \omega_0^2$ , то есть  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$  решение (23.3) имеет вид

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (23.11)$$

В том, что (23.11) действительно является решением уравнения (23.3), просто убедиться, подставляя (23.11) в (23.3). Выражение (23.11) показывает, что величина заряда конденсатора совершает затухающие колебания, где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний, которая меньше собственной частоты колебательного контура  $\omega_0$ , и  $q = q_m e^{-\beta t}$  – амплитуда затухающих колебаний. Для напряжения на конденсаторе  $U = \frac{q}{C}$ , соответственно, имеем

$$U = U_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (23.12)$$

Дифференцируя (23.11) по времени, найдем силу тока в контуре, обладающем сопротивлением  $R$

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)]. \quad (23.13)$$

Используя дополнительные преобразования ( $\frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 1$ ) и умножая правую часть уравнения (23.13) на это выражение, получим

$$I = \omega_0 q_m e^{-\beta t} \left[ -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right]. \quad (23.14)$$

Обозначим  $\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\beta}{\omega_0}$ ,  $\sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}$ , тогда уравнение (23.14) можно представить в виде

$$I = \omega_0 q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi), \quad (23.15)$$

где значение  $\psi$  заключено в пределах  $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ .

Окончательное выражение для тока (23.15) показывает, что если в контуре присутствует активное сопротивление, то сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе (23.12) более, чем на  $\frac{\pi}{2}$  (при  $R = 0$  опережение составляет  $\frac{\pi}{2}$ ).

Период затухающих колебаний теперь равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (23.16)$$

Выражение (23.16) показывает, что с увеличением сопротивления контура  $R$  период колебаний возрастает и при  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  обращается в бесконечность.

Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления также имеет место колебательный процесс, однако частота колебаний отличается от частоты свободных колебаний и амплитуда колебаний экспоненциально убывает со временем.

Следует отметить, что решение (23.11) уравнения (23.3) не является строго периодической функцией, так как  $q(t) = q(t+T)$ . Говорить о периоде этой функции можно лишь в том смысле, что заряд принимает нулевые значения через равные промежутки времени. (Соответственно, это относится и к току, и к напряжению).

Отметим, что коэффициент затухания  $\beta$  определяет быстроту убывания амплитуды колебания. Обозначим  $\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}$ . Эта величина имеет размерность времени и носит название времени релаксации. Это время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e = 2,71\dots$  раз.

Наряду с коэффициентом затухания  $\beta$  для количественной характеристики затухающих колебаний вводят новые физические величины: декремент затухания и логарифмический декремент затухания.

Пусть  $q_n$  и  $q_{n+1}$  – максимальные значения заряда конденсатора (рис. 23.2) в двух последовательных максимумах с номерами  $n$  и  $n+1$ . Они достигаются в моменты времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$ , причем  $t_{n+1} = t_n + T$  (см. рис. 23.2). Тогда согласно (23.11) и  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , где  $T$  – период (см. рис. 23.2), имеем

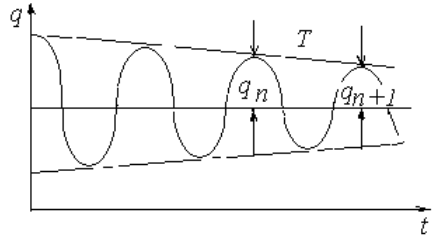


Рис. 23.2. Затухание заряда с течением времени

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha);$$

$$q_{n+1} = q_m e^{-\beta(t_n+T)} \cos \left[ \omega \left( t_n + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \alpha \right] = q_m e^{-\beta(t_n+T)} \cos(\omega t_n + \alpha).$$

Разделим эти равенства друг на друга, получим

$$\delta = \frac{q_n}{q_{n+1}} = e^{\beta T}.$$

Эта величина носит название *декремент затухания*. Мы видим, что отношение двух последовательных максимальных значений заряда не зависит от номера максимумов. Натуральный логарифм отношения  $\lambda = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}}$  принимают за меру затухания колебаний и называют *логарифмическим декрементом затухания*. Введенный логарифмический декремент затухания также равен произведению коэффициента затухания  $\beta$  на период колебаний  $T$ .

Действительно:

$$\lambda = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Логарифмический декремент затухания  $\lambda$  можно определить иначе. Обозначим через  $t_1$  время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Тогда

$$e^{-\beta t_1} = \frac{1}{e},$$

а следовательно,  $\beta t_1 = 1$ . Деля почленно  $\lambda = \beta T$  на это соотношение, получим

$$\frac{T}{t_1} = \frac{1}{N} = \lambda,$$

где  $N$  – число полных колебаний, происходящих за время  $t_1$ .

Таким образом, логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N,$$

называемая *добротностью колебательной системы*.



Как видно из ее определения, добротность пропорциональна числу колебаний  $N$ , совершаемых системой за время, за которое амплитуда колебаний (заряда, тока, напряжения) уменьшается в  $e$  раз, то есть характеризует быстроту затухания электрических колебаний. Следовательно, чем слабее затухание колебаний в нем, тем выше добротность контура.

Добротностью характеризуют качество колебательного контура, так как чем больше добротность, тем меньше потери энергии в контуре за один период колебания. Действительно, если учесть, что полная энергия колеблющейся системы пропорциональна квадрату амплитуды колебания (например, колебания энергии электрического поля конденсатора), то в соответствии с этим энергия контура при затухающих колебаниях убывает со временем по закону (учитывая  $W_k = \frac{q^2}{2C}$  и (23.11))

$$W = W_0 e^{-2\beta t},$$

где  $W_0$  – значение энергии при  $t = 0$ .

Продифференцировав это выражение по времени, получим скорость изменения энергии системы

$$\frac{dW}{dt} = -2\beta W_0 e^{-2\beta t} = -2\beta W.$$

Изменив знак на обратный, найдем скорость убывания энергии

$$-\frac{dW}{dt} = 2\beta W. \quad (23.17)$$

Если энергия мало изменяется за время, равное периоду колебаний, убывание энергии за период можно найти, умножив (23.17) на  $T$ :

$$-\Delta W = 2\beta T W$$

(напомним, что  $\Delta W$  обозначает приращение, а  $\Delta W$  – убыль энергии).

Наконец, приняв во внимание формулы  $\lambda = \beta T$  и  $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N$ , придем к соотношению

$$\frac{W}{-\Delta W} = \frac{Q}{2\pi},$$

из которого следует, что при слабом затухании колебаний добротность с точностью до множителя  $2\pi$  равна отношению энергии, запасенной в контуре в данный момент, к убыли этой энергии за один период колебаний.

### 23.4. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение

Колебания, в процессе которых колебательная система подвергается внешнему периодически изменяющемуся воздействию, называются *вынужденными колебаниями*. В электрическом колебательном контуре внешнее воздействие обычно обусловлено подключением к контуру внешней периодически изменяющейся со временем электродвижущей силы  $\varepsilon(t)$ , которая создает в контуре переменное электрическое напряжение (рис. 23.3). Уравнение

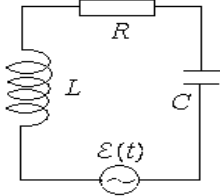


Рис. 23.3. Колебательный контур с источником внешней периодически изменяющейся со временем электродвижущей силой

Кирхгофа с учетом внешней ЭДС  $\varepsilon(t)$  и ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$ , возникающей в катушке индуктивности  $L$ , имеет вид

$$IR + U = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon(t), \quad (23.18)$$

где  $I$  – сила тока в цепи;

$R$  – электрическое сопротивление;

$U$  – напряжение на конденсаторе;

$L$  – индуктивность.

С учетом того, что сила тока  $I = \frac{dq}{dt}$ , а напряжение  $U = \frac{q}{C}$ , уравнение (23.18) может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{\varepsilon(t)}{L}. \quad (23.19)$$

С учетом обычно применяемых обозначений  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (собственная частота колебательного контура) и  $\beta = \frac{R}{2L}$  уравнение (23.19) можно переписать в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon(t)}{L}. \quad (23.20)$$

Рассмотрим случай, когда к контуру подключается ЭДС  $\varepsilon(t)$ , изменяющаяся гармонически

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (23.21)$$

Из теории дифференциальных уравнений следует, что общее решение уравнения (23.20) представляется в виде суммы двух членов: общего решения соответствующего уравнения без правой части (23.11) и частного решения уравнения (23.20). Общим решением (23.11) уравнения (23.3), описывающим свободные затухающие колебания в контуре, можно пренебречь, так как по истечении малого промежутка времени после начала колебаний экспоненциальный множитель  $e^{-\beta t}$  становится очень малым и им можно пренебречь.

Следовательно, установившиеся вынужденные колебания могут быть описаны функцией с учетом (23.21)

$$q = q_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (23.22)$$

что и будет в данном случае частным решением уравнения (23.20).

Чтобы определить амплитуду  $q_m$  и сдвиг фаз  $\varphi$  этих вынужденных колебаний, подставим (23.22) в уравнение (23.20). Подстановка дает

$$-\omega^2 q_m \sin(\omega t + \varphi) + 2\beta\omega q_m \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 q_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\varepsilon_m \sin \omega t}{L}.$$

После простых тригонометрических преобразований получим

$$\left[ (-\omega^2 + \omega_0^2) q_m \cos \varphi - 2\beta\omega q_m \sin \varphi - \frac{\varepsilon_m}{L} \right] \sin \omega t + \left[ (-\omega^2 + \omega_0^2) q_m \sin \varphi + 2\beta\omega q_m \cos \varphi \right] \cos \omega t = 0,$$

откуда найдем два уравнения для определения  $q_m$  и  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \left[ (-\omega^2 + \omega_0^2) \cos \varphi - 2\beta\omega \sin \varphi \right] q_m &= \frac{\varepsilon_m}{L}; \\ \left[ (-\omega^2 + \omega_0^2) \sin \varphi + 2\beta\omega \cos \varphi \right] q_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.23)$$

Чтобы найти  $q_m$ , возведем оба уравнения в квадрат и сложим:

$$\left[ (-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2 \right] q_m^2 = \frac{\varepsilon_m^2}{L^2}$$

или

$$q_m = \frac{\varepsilon_m / L}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} = \frac{\varepsilon_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (23.24)$$

Величина  $\varphi$  определяется из второго уравнения (23.23) как

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (23.25)$$

Подстановка полученных выражений в (23.22) дает

$$q = \frac{\varepsilon_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \sin \left( \omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

Эта функция описывает установившиеся в контуре вынужденные колебания. Эти колебания являются гармоническими с частотой, равной частоте вынуждающей силы (то есть электродвижущей силы).

Как видно из (23.24), амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы (ЭДС источника в контуре). Для данного контура (определенных  $\omega_0$  и  $\beta$ ) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы (ЭДС источника). Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания  $\varphi$  также зависит от частоты вынуждающей силы (23.25). Проведенный анализ позволяет утверждать, что при некоторой определенной для данного контура частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой.

Найдем максимум функции (23.24). Для этого продифференцируем это выражение по частоте  $\omega$  и приравняем к нулю. Получим

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Это уравнение имеет три решения:  $\omega = 0$  и  $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . Решение, равное нулю, соответствует максимуму знаменателя уравнения (23.24). Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено, как не имеющее смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, получаем резонансную частоту контура

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (23.26)$$

Подставив это значение частоты в (23.24), получаем выражение для амплитуды при резонансе

$$q_p = \frac{\varepsilon_m / L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Графически зависимость вынужденных колебаний амплитуды от частоты колебаний (график функции (23.24)) представлена на рис. 23.4.

Для сравнения на рисунке показаны резонансные кривые двух колебательных контуров с различными коэффициентами затухания.

Отметим, что, согласно (23.26) при  $\beta = 0$  (идеальный контур), резонансная частота совпадает с собственной частотой контура.

В рассматриваемом колебательном контуре, в котором действует ЭДС, изменяющаяся по закону (23.21), сила тока при установившихся вынужденных колебаниях описывается выражением

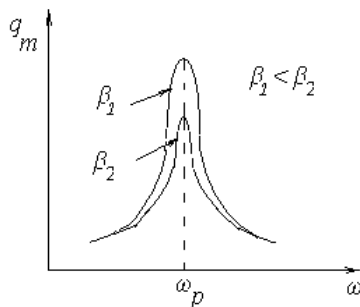


Рис. 23.4. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний заряда  $q_m$  от частоты колебаний  $\omega$

$$I = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $I_m$  — амплитуда силы тока в контуре.

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}. \quad (23.27)$$

Угол  $\varphi$ , определяющий сдвиг фаз между  $\varepsilon_m$  и силой тока в цепи определяется как

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (23.28)$$

Уравнение (23.27) называется **законом Ома для переменного тока**.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \text{полное электрическое сопротивление}$$

контура или его импеданс.

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} - \text{реактивное сопротивление контура.}$$

Допустим, что мы изменяем частоту колебания  $\omega$ . Как показывают формулы (23.27), (23.28), это означает изменение амплитуды тока  $I_m$  и сдвига фазы  $\varphi$ .

Анализируя выражения (23.27) и (23.28), можно увидеть, что когда индуктивное и емкостное сопротивления равны

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (23.29)$$

то угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в ноль ( $\varphi = 0$ ), то есть колебания силы тока совершаются в фазе с колебаниями внешней ЭДС.

Условию (23.29) удовлетворяет частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

В данном случае полное сопротивление цепи  $Z$  становится минимальным, равным активному сопротивлению  $R$  цепи, и ток в цепи определяется этим сопротивлением, принимая максимальное значение ( $I_m = \frac{\varepsilon_m}{R}$ ). При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи ( $U_R = \varepsilon$ ), а падение напряжения на конденсаторе  $U_C$  и на катушке индуктивности  $U_L$  одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление резкого возрастания амплитуды силы тока в контуре при совпадении частоты внешнего воздействия  $\omega$  с собственной частотой колебательной системы  $\omega_0$  также называется **резонансом напряжений**, а частота  $\omega_p$  — **резонансной частотой**.

Зависимость  $I_m$  от  $\omega$  графически изображена на рис. 23.5, где показаны три кривые, соответствующие трем различным значениям активного сопротивления  $R$ .

Чем меньше  $R$  (то есть чем меньше декремент затухания  $\delta$  или чем больше добротность контура  $Q$ ), тем больше при прочих равных условиях  $I_m$  и тем острее максимумы кривых.

В радиотехнических устройствах при передаче и приеме модулируемых сигналов колебательный контур при настройке в резонанс с частотой внешнего сигнала должен не только осуществлять выделение основной частоты  $\omega_{рез}$ , но и некоторой полосы частот  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

На явлении «избирательного отбора» колебательным контуром наиболее близкого к резонансной частоте спектра частот вынуждающей внешней ЭДС основана работа всех радиоприемных устройств. Поэтому колебательный контур является неотъемлемой частью таких приспособлений, причем резонансная частота приемных контуров регулируется путем изменения его индуктивности или емкости

$$(\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}).$$

Чем уже резонансная кривая, тем выше «избирательность» колебательного контура, то есть способность контура выделить определенную частоту из многих сигналов различной частоты. Избирательность контура принято характеризовать полосой пропускания. Под **полосой пропускания контура** понимают ширину резонансной кривой, выраженную в герцах и определенную по уровню 0,7 от максимальной амплитуды колебаний ( $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ ) (рис. 23.6).

Добротность контура может быть определена по виду резонансной кривой по формуле

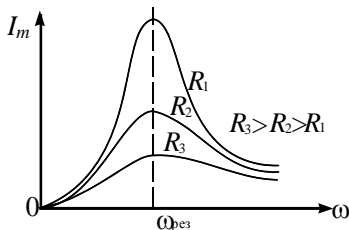


Рис. 23.5. Зависимость амплитуды тока от частоты колебаний при различных значениях сопротивления контура



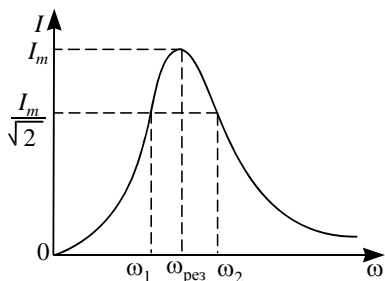


Рис. 23.6. Зависимость амплитуды тока от частоты (резонансная кривая)

$$Q = \frac{\omega_p}{\Delta\omega},$$

где  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  – полоса пропускания контура.

Чем меньше полоса пропускания контура, тем больше добротность  $Q$ . Отсюда следует, что  $Q$  является характеристикой «избирательного» воздействия внешней вынуждающей периодической

ЭДС с частотой  $\omega$  на колебательный контур.

Из формулы  $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N$  видно, что добротность  $Q$  харак-

теризует также затухание электрических колебаний, а значит и быстроту уменьшения энергии контура.

### 23.5. Переменный ток. Закон Ома для переменного тока.

#### Резонанс напряжений. Резонанс токов.

#### Мощность в цепи переменного тока.

#### Действующие значения тока и напряжения

**Переменный ток** – это электрический ток, периодически изменяющийся с течением времени по величине и направлению по произвольному закону. Ограничимся случаем изучения тока, изменяющегося во времени по синусоидальному закону. Выше было показано, что такой ток возникает, например, в колебательном контуре.

Если напряжение источника в цепи, состоящей из нескольких последовательно соединенных элементов, меняется по синусоидальному закону, то сила тока не успевает мгновенно принимать одно и то же значение во всей цепи. На передачу взаимодействия между заряженными частицами вдоль цепи требуется некоторое время.

Во многих практических случаях можно считать силу тока одинаковой во всех элементах цепи, как и в случае постоянного тока.

Возьмем, к примеру, стандартное бытовое напряжение частоты  $\nu = 50$  Гц. Период колебаний напряжения  $T = 1/\nu = 0,02$  с. Взаимо-

действие между зарядами передается со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. За время, равное периоду колебаний, это взаимодействие распространяется на расстояние  $s = cT = 6 \cdot 10^6$  м = 6000 км. Поэтому в тех случаях, когда длина цепи на несколько порядков меньше данного расстояния, можно пренебречь временем распространения взаимодействия и считать, что сила тока мгновенно принимает одно и то же значение во всей цепи.

В общем случае, когда напряжение колеблется с циклической частотой  $\omega$ , период колебаний  $T = 2\pi/\omega$  и за это время взаимодействие между зарядами передается на расстояние  $s = cT$ . Если длина цепи  $l$ , то при условии, что  $l \ll cT$ , временем распространения взаимодействия можно пренебречь. Неравенство  $l \ll cT$  называется условием квазистационарности.

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных с переменным источником ЭДС  $\varepsilon(t)$  омического сопротивления, катушки индуктивности и конденсатора. Формально эта цепь разомкнута, и ее концами являются обкладки конденсатора, поэтому для нее можно написать закон Ома для участка цепи, содержащей ЭДС, полагая, что условие квазистационарности выполнено. Тогда

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum_k \varepsilon_k, \quad (23.30)$$

где  $\varphi_1 - \varphi_2 = U_C$  – напряжение на конденсаторе, а суммарная ЭДС складывается из ЭДС источника тока и ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_L$ :

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}.$$

Обычно величину  $L \frac{dI}{dt}$  называют падением напряжения на индуктивности и обозначают  $U_L$ , произведение  $IR = U_R$  – падением напряжения на сопротивлении. С учетом этого уравнение (23.30) можно преобразовать:

$$U_R + U_L + U_C = \varepsilon(t).$$

Вспоминая, что  $U_C = \frac{q}{C}$ , и заменяя величины  $U_C$  и  $U_L$ , получим

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon(t). \quad (23.31)$$

Предположим, что ток в нашей цепи изменяется по синусоидальному закону:

$$I = I_0 \sin \omega t.$$

Тогда

$$U_R = I_0 R \sin \omega t;$$

$$U_L = \omega L I_0 \cos \omega t = \omega L I_0 \sin(\omega t - \pi/2);$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I_0 \sin \omega t = -\frac{\omega I_0}{C} \cos \omega t = \frac{\omega I_0}{C} \sin(\omega t + \pi/2).$$

Эти соотношения должны быть справедливыми в любой момент времени, поэтому они справедливы и для амплитудных значений, то есть

$$(U_R)_0 = I_0 R;$$

$$(U_L)_0 = \omega L I_0;$$

$$(U_C)_0 = I_0 / \omega C.$$

Трактуя эти равенства как закон Ома для участка цепи, можно заметить, что величины  $Z_L = \omega L$  и  $Z_C = \frac{1}{\omega C}$  аналогичны размерности сопротивлению  $R$ . Используя такую интерпретацию, можно видеть, что уравнение (23.31) приобретает тригонометрический смысл: напряжения на емкости и индуктивности оказываются сдвинутыми по фазе на  $\pm\pi/2$  относительно напряжения на сопротивлении  $R$ . Здесь удобнее использовать векторное представление колебаний. Любое гармоническое колебание  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  можно

представить в векторном виде: длина вектора определяется амплитудой колебаний  $A$ , начальная фаза определяет угол отклонения вектора от горизонтальной оси, а  $\omega$  – частотой, с которой вектор вращается вокруг начала координат. В этом представлении напряжение на сопротивлении  $R$  изображается в виде горизонтального вектора (рис. 23.7), а напряжения на емкости и индуктивности оказываются повернутыми относительно него в разные стороны на  $90^\circ$ .

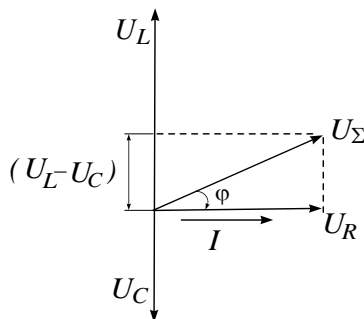


Рис. 23.7. Векторная диаграмма для последовательной цепи переменного тока для случая  $U_L > U_C$

В последовательной цепи действующее в ней общее напряжение складывается из падения напряжений на всех участках. Поэтому оно может быть найдено как геометрическая сумма падения напряжений на индуктивности, емкости и сопротивления. Тогда согласно теореме Пифагора можно записать, что

$$U_{\Sigma}^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2,$$

или, выражая  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  через произведения тока на соответствующие сопротивления,

$$U_{\Sigma}^2 = I^2 \left[ R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right].$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего равенства, получим:

$$U = I \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (23.32)$$

При выводе этого выражения учтено, что для последовательной цепи  $I_R = I_L = I_C = I$ . Полученное выражение по своей структуре ана-

логично закону Ома для цепи постоянного тока. Поэтому оно называется **законом Ома для переменного тока**. Важно отметить, что между током и напряжением существует сдвиг фаз, величина которого определяется из рис. 23.7:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Величина  $\omega L - \frac{1}{\omega C}$  имеет размерность сопротивления и получила название **реактивного сопротивления**.

Из анализа выражения (23.32) следует, что при последовательном соединении ЭДС и элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  напряжение в цепи достигает максимального значения при совпадении частоты внешней ЭДС  $\omega$  с собственной частотой колебательного контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

При этом значения напряжений на реактивных элементах  $U_L = U \frac{Z_L}{R}$  и  $U_C = U \frac{Z_C}{R}$  равны по модулю и могут значительно превышать напряжение источника, если  $(Z_L = Z_C) \gg R$ . Данное явление получило название **резонанса напряжений**.

Рассмотрим теперь электрическую цепь, состоящую из параллельно соединенных источников ЭДС, активного сопротивления, катушки индуктивности и конденсатора. Проводимость такой цепи определяется выражением

$$Y = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Очевидно, что при выполнении условия  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  сила тока в цепи  $I = UY$  имеет минимальное значение, а текущие через ин-

дуктивность и конденсатор токи противоположны по фазе и могут значительно превышать ток источника при выполнении условия  $(\frac{1}{\omega L} = \omega C) \gg 1/R$ . Это явление получило название *резонанса токов*.

Действие переменного тока оценивается согласно выделяющейся на активном сопротивлении тепловой энергии. *Действующим значением силы переменного тока* называют величину силы постоянного тока, который за время, равное периоду колебаний переменного тока, выделяет в активном сопротивлении  $R$  такое же количество теплоты.

Определим мощность переменного синусоидального тока  $I = I_0 \sin \omega t$ . Пусть сдвиг фазы напряжения относительно тока составляет некоторую величину  $\varphi$ . Тогда мгновенное значение мощности запишется как  $W = IU = I_0 U_0 \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)$ . Однако, с практической точки зрения, более полезно вычислить среднюю мощность за единицу времени. Определим среднее значение за время одного колебания любой переменной величины  $y(t)$  как интеграл, средний за период:  $\langle y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \{ \sin^2 \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi \} dt = \\ &= \frac{U_0 I_0}{2T} \cos \varphi \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt + \frac{U_0 I_0}{2T} \sin \varphi \int_0^T \sin 2\omega t dt = \\ &\quad - \frac{U_0 I_0}{2T} \cos \varphi \int_0^T \cos 2\omega t dt + \frac{U_0 I_0}{2T} \sin \varphi \int_0^T \sin 2\omega t dt. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\langle W \rangle = -\frac{U_0 I_0}{2T} \cos \varphi \int_0^T \cos 2\omega t dt + \frac{U_0 I_0}{2T} \sin \varphi \int_0^T \sin 2\omega t dt + \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi.$$

Интегралы в последнем выражении равны нулю, так как среднее значение за период любой периодической величины равно нулю. Поэтому

$$\langle W \rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi = U_{\text{эфф}} I_{\text{эфф}} \cos \varphi,$$

где  $U_{\text{эфф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ ;  $I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  – действующие значения напряжения и силы тока.

Формула мощности для переменного тока отличается от аналогичной формулы для постоянного тока лишь коэффициентом  $\cos \varphi$ , который принято называть *коэффициентом мощности*. Увеличение этого коэффициента является важной практической задачей. Там, где сдвиг фаз между током и напряжением достигает  $90^\circ$ , средняя мощность оказывается равной нулю.

## 24. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Теория Джеймса Клерка Максвелла в электродинамике играет такую же основополагающую роль, как и теория Ньютона в классической механике.

Система уравнений Максвелла – это система уравнений в дифференциальной или интегральной форме, которая описывает электромагнитное поле и его связь с электрическими зарядами и токами в вакууме и сплошных средах.

В начале XIX века был сделан целый ряд экспериментальных открытий. В 1820 г. Ханс Христиан Эрстед установил, что проходящий по проводу электрический ток отклоняет магнитную стрелку компаса. В этом же году Жан Батист Био и Феликс Савар экспериментальным путем получили выражение для магнитной индукции порождаемого током магнитного поля (закон Био–Савара). Андре Мари Ампер, обнаружив, что между двумя проводниками, по которым пропускается ток, возникает взаимодействие, выдвинул гипотезу, что природный магнетизм связан с существованием в веществе круговых молекулярных токов. Влияние электрического тока

на магнит, установленное Эрстедом, натолкнуло Майкла Фарадея на мысль об обратном влиянии магнита на электрические токи. Фарадей установил, что перемещающийся возле проводника магнит порождает в проводнике электрический ток. В научных исследованиях Максвелла результаты экспериментов Фарадея сыграли очень важную роль.

### 24.1. Вихревое электрическое поле

Опыты Фарадея по изучению явления электромагнитной индукции показали, что **электродвижущая сила индукции не зависит от материала проводника, его состояния и температуры**. Этот факт натолкнул Максвелла на мысль, что причиной возникновения электромагнитной индукции является само электрическое поле, а проводники играют второстепенную роль и служат только прибором, обнаруживающим это поле. Электроны в проводнике под действием электрического поля приходят в движение, и в замкнутой цепи контура возникает индукционный ток. Согласно закону Ома в дифференциальной форме, вектор плотности тока  $\vec{j}$  прямо пропорционален вектору напряженности  $\vec{E}$  электрического поля

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Следовательно, для существования электрического тока необходимо электрическое поле. Это позволило Максвеллу заключить, что переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле, под действием которого и возникает индукционный ток.

Таким образом, **изменяющееся во времени магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве изменяющееся во времени электрическое поле, являющееся причиной возникновения индукционного тока в контуре**.

Особенность электрического поля, возбужденного переменным магнитным полем в том, что оно не является электростатическим. Переменное электрическое поле не удовлетворяет также и условию потенциальности. Линии напряженности переменного электрического поля не начинаются и не заканчиваются на электрических за-



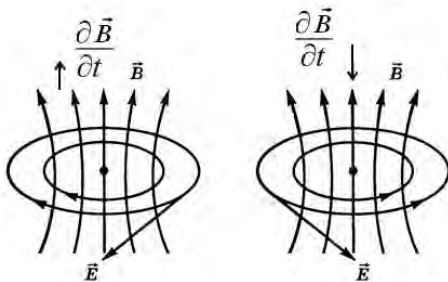


Рис. 24.1. Вихревое электрическое поле

лось, что работа по перемещению заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории. Поле с таким свойством называют *потенциальным*. В электростатическом поле **работа по перемещению заряда по замкнутому контуру  $L$  равна нулю, поэтому циркуляция вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру равна нулю:**

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Если у векторного поля линии тока замкнуты, то циркуляция векторного поля вдоль этих линий не будет равна нулю, так как циркуляция есть мера непотенциальности поля. **Ротором (rot) векторного поля  $\vec{E}$**  называют предел отношения циркуляции векторного поля  $\vec{E}$  по замкнутому контуру к площади  $\Delta S$ , охватываемой контуром при стремлении этой площади к нулю:

$$\text{rot } \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S}.$$

**Ротор** – это оператор векторного поля  $\vec{E}$ , показывающий, как сильно и в какую сторону закручены силовые линии поля в каждой точке.

Для электростатического поля

$$\text{rot } \vec{E} = 0.$$

рядах, а образуют замкнутые кривые (рис. 24.1). Переменное электрическое поле называют **вихревым электрическим полем**.

Рассмотрим более подробно особенности вихревого электрического поля. При изучении свойств электростатического поля отмечалось,

Для вихревого электрического поля

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Так как производная  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  – величина переменная, то переменным является и электрическое поле, которое порождается переменным магнитным полем. Поскольку магнитное поле является основным и обязательным признаком всякого электрического тока, то Максвелл назвал изменяющееся во времени электрическое поле током смещения.

**Током смещения в диэлектрике** является движение зарядов, представляющее собой смещение зарядов в атомах и молекулах диэлектрика при его поляризации. **Ток смещения в вакууме** – это переменное электрическое поле.

Согласно рассуждениям Дж. Максвелла должно было существовать и обратное явление: **переменное электрическое поле должно порождать в пространстве изменяющееся вихревое магнитное поле.**

Опыты по исследованию магнитного поля токов смещения провел в 1903 г. русский ученый А. А. Эйхенвальд. Целью его исследований стало создание модели токов смещения и доказательство того, что ток смещения создает вокруг себя магнитное поле.

В опытах А. Эйхенвальда (рис. 24.2) диэлектрический диск Д вращался между четырьмя (А, А', В, В') неподвижными заряженными полудисками.

Направление электрического поля в нижней части схемы противоположно направлению электрического поля в ее верхней части. Как известно, диэлектрик во внешнем электрическом поле поляризуется.

При прохождении части диска Д через область зазора между верхними и нижними полудисками происходит смена знака поляризационного заряда, что эквивалентно движению положительных зарядов слева направо. Это аналогично тому, что в области

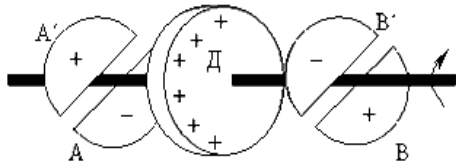


Рис. 24.2. Схема опыта А.А. Эйхенвальда

зазора будет течь ток смещения. В эксперименте также было установлено наличие магнитного поля вокруг данной части диска Д. **Этим опытом было доказано, что изменяющееся электрическое поле в диэлектрике или вакууме создает изменяющееся вихревое магнитное поле.**

## 24.2. Ток смещения. Плотность тока смещения. Полный ток

Вспомним, что такое токи проводимости и токи смещения. Токи проводимости – это токи, текущие в проводниках и представляющие собой направленное упорядоченное движение заряженных частиц. Ток смещения, согласно рассуждениям Максвелла, связан с изменяющимся во времени электрическим полем.

Током смещения в диэлектрике является движение зарядов, представляющее собой смещение зарядов в атомах и молекулах диэлектрика. Ток смещения в вакууме – переменное электрическое поле.

Известно, что конденсатор представляет собой систему двух проводников, пространство между которыми заполнено диэлектриком. Так как ток смещения возникает в диэлектриках, то логично предположить, что в конденсаторе должны наблюдаться токи смещения.

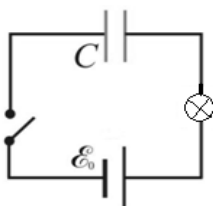


Рис. 24.3. Конденсатор в цепи постоянного тока

Рассмотрим плоский конденсатор  $C$ , который находится в электрической цепи с источником постоянного тока (рис. 24.3). Для постоянного тока конденсатор, включенный в цепь последовательно, обладает бесконечно большим сопротивлением, так как между пластинами конденсатора находится диэлектрик, который не проводит электрический ток. В месте, где находится конденсатор, наблюдается разрыв электрической цепи, и постоянный электрический ток в данной цепи не протекает. При замыкании ключа (см. рис. 24.3) лампочка, включенная в цепь, гореть не будет.

**Таким образом, в электрической цепи с источником постоянного тока, в которую включен конденсатор, ток не протекает.**

Токи смещения наблюдаются в конденсаторе, включенном в цепь переменного тока (рис. 24.4). Переменный ток в электрической це-

пи представляет собой электромагнитные колебания, происходящие по закону синуса или косинуса. Если цепь с конденсатором питать переменным током, то в цепи за каждый период происходит зарядка (рис. 24.4, рис. 24.5, а) и разрядка (рис. 24.5, б; рис. 24.6) конденсатора.

Напомним, что за направление тока проводимости выбирается направление движения положительных зарядов. Согласно схеме (рис. 24.4, а) через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от правой обкладки к левой. Следовательно, при зарядке конденсатора на его правой пластине появляется положительный заряд, а на левой – отрицательный (рис. 24.4, б). Переменное электрическое поле конденсатора (вектор электрического смещения  $\vec{D}$ ) направлено от положительно заряженной обкладки конденсатора к отрицательно заряженной (см. рис. 24.5, а).

Таким образом, при зарядке конденсатора через проводник, соединяющий обкладки, ток проводимости течет от правой (положительно заряженной) обкладки к левой (отрицательно заряженной); так как заряд на обкладках при зарядке увеличивается, электрическое поле в конденсаторе также растет.

При разрядке конденсатора (рис. 24.6, а) в электрическую цепь с левой пластины начинают уходить положительные заряды. Через проводник, соединяющий обкладки, ток проводимости течет уже от левой обкладки к правой. Так как заряд на пластинах уменьшается, то электрическое поле в конденсаторе ослабляется (рис. 24.6, б).

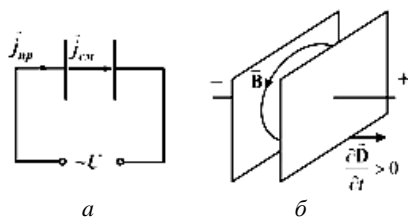


Рис. 24.4. Ток смещения в конденсаторе, включенном в цепь переменного тока, при зарядке конденсатора

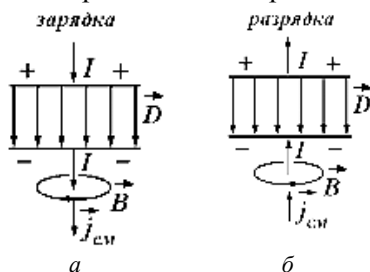


Рис. 24.5. Ток смещения: а – при зарядке конденсатора; б – при разрядке конденсатора

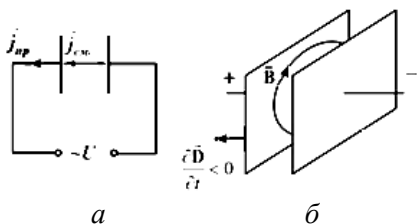


Рис. 24.6. Ток смещения в конденсаторе, включенном в цепь переменного тока, при разрядке

электрическое поле, поэтому, согласно Максвеллу, через конденсатор «протекают» токи смещения, причем в тех участках, где отсутствуют проводники.

Найдем количественную связь между изменяющимся электрическим полем (током смещения) и вектором электрического смещения  $\vec{D}$  конденсатора.

По Максвеллу переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора существовал ток смещения, равный току в подводящих проводах. Тогда можно утверждать, что силы токов проводимости и смещения равны  $I_{см} = I$ .

Пусть генератор переменного тока, напряжение которого  $U$ , заряжает конденсатор емкостью  $C$  (см. рис. 24.4). Заряд конденсатора

$$Q = CU = \sigma S,$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора;  $S$  – площадь пластин конденсатора.

Так как конденсатор плоский, его емкость определяется как

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d},$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, которым заполнен конденсатор;

$\epsilon_0$  – электрическая постоянная;

$d$  – расстояние между пластинами.

Согласно теории Максвелла, конденсатор в цепи переменного тока надо рассматривать не как разрыв цепи, а как участок цепи с другим механизмом проводимости. Рассмотренные процессы показали, что между обкладками заряжающегося и разряжающегося конденсатора есть переменное

Согласно закону сохранения электрического заряда, изменение заряда конденсатора равно силе тока проводимости. Сила тока проводимости вблизи обкладок конденсатора

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS = \int_S \frac{d}{dt} \sigma dS = \int_S \frac{dD}{dt} dS. \quad (24.1)$$

В выражении (24.1) учтено, что поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на обкладках равна электрическому смещению  $D$  в конденсаторе

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{U}{d} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{Qd}{\varepsilon \varepsilon_0 dS} = \frac{Q}{S} = \sigma.$$

Если обкладки конденсатора неподвижны и не деформируются, то в (24.1) от полной производной по времени можно перейти к частной производной

$$I = \int_S \frac{dD}{dt} dS.$$

Учитывая, что сила тока смещения выражается через плотность тока смещения как

$$I = I_{\text{см}} = \int_S j_{\text{см}} dS,$$

и сравнивая два последних выражения, получаем

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (24.2)$$

Таким образом, **вектор плотности тока смещения равен частной производной по времени от вектора электрического смещения в конденсаторе, то есть от скорости изменения вектора электрического смещения в конденсаторе.**

Определим, каково же направление векторов плотностей токов проводимости  $\vec{j}$  и смещения  $\vec{J}_{\text{см}}$ .

При зарядке конденсатора (см. рис. 24.4 и рис. 24.5, *a*) через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от правой обкладки к левой. Поле в конденсаторе усиливается, и следовательно, скорость изменения вектора электрического смещения в конденсаторе  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} > 0$ , поэтому вектор  $\vec{J}_{\text{см}}$  направлен в ту же сторону, что и вектор  $\vec{D}$ . Из рис. 24.5, *a* видно, что направления векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{J}_{\text{см}}$  совпадают. При разрядке конденсатора через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от левой обкладки к правой; поле в конденсаторе ослабляется; следовательно,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$ , то есть вектор  $\vec{J}_{\text{см}}$  направлен противоположно вектору  $\vec{D}$  (см. рис. 24.5, *b*).

Таким образом, из рассмотренных примеров следует, что направление вектора  $\vec{J}_{\text{см}}$  совпадает с направлением вектора  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

В диэлектрике вектор электрического смещения равен

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

где  $\vec{P}$  – вектор поляризации.

Используя выражение (24.2) для плотности тока смещения в диэлектрике, получим

$$\vec{J}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (24.3)$$

Из выражения (24.3) следует, что плотность тока смещения в диэлектрике состоит из двух слагаемых:

$\frac{d\vec{P}}{dt}$  – плотность тока смещения, вызванного смещением молекулярных зарядов в диэлектрике (токи поляризации);

$\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$  – плотность тока смещения, определяемого скоростью

изменения напряженности внешнего электрического поля. Эта составляющая существует в вакууме: любое переменное электрическое поле порождает магнитное поле.

Таким образом, **из физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно – способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле.**

В проводящей среде полный ток складывается из суммы тока проводимости и тока смещения. Тогда плотность полного тока

$$\vec{j}_\Pi = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}.$$

В заключении, обобщая все выше сказанное, отметим различия и сходства токов проводимости и токов смещения.

Сходства токов проводимости и токов смещения:

– способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле;

– плотности токов проводимости и токов смещения измеряются в одних и тех же единицах измерения (Кл/м<sup>2</sup>).

Различия токов проводимости и токов смещения:

– токи проводимости – это упорядоченное направленное движение электрических зарядов, а токи смещения – это переменное электрическое поле;

– при прохождении токов проводимости по проводникам проводники нагреваются, количество теплоты определяется по закону Джоуля–Ленца; токи смещения не сопровождаются выделением джоулевой теплоты.

### **24.3. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме**

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Теория Максвелла не только объясняла все разрозненные явления электричества и магне-



тизма (причем с единой точки зрения), но и предсказала ряд новых явлений. Она предсказала совершенно новый эффект, наблюдавшийся в свободном от материальных тел пространстве, – электромагнитное излучение. Максвелл предсказал существование электромагнитных волн и из равенства скорости их распространения скорости света сделал вывод о том, что световые волны являются электромагнитными по своей природе. Из этого предположения Максвелла вытекало важное следствие: изменяющиеся магнитные и электрические поля могут распространяться в вакууме, перенося импульс и энергию.

Согласно теории Максвелла, изменяющееся во времени электромагнитное поле можно представить в виде плоских монохроматических волн, каждая из которых характеризуется своей частотой и распространяется в определенном направлении с определенной скоростью. Теория предсказывала величину этой скорости, а также ее независимость от частоты.

Из теории Максвелла также следовало, что быстро колеблющиеся электрические заряды порождают электромагнитные волны. Генрих Герц подтвердил это, сконструировав первый генератор и первый приемник радиоволн – электромагнитных колебаний с длиной волны больше 100 мкм.

Таким образом, Максвелл показал, что электромагнитное поле – это совокупность взаимосвязанных электрических и магнитных полей; предсказал существование электромагнитных волн, распространяющихся в пространстве от точки к точке с конечной скоростью; показал, что световые волны являются электромагнитными волнами; связал воедино электричество, магнетизм и оптику.

Теория Максвелла представляет собой последовательную теорию единого электромагнитного поля произвольной системы электрических зарядов и токов. Она позволяет решить основную задачу электродинамики – по заданному распределению зарядов и токов определить характеристики их электрических и магнитных полей. Теория Максвелла является обобщением важнейших законов для электрических и электромагнитных явлений – теоремы Остроградского–Гаусса, закона полного тока и закона электромагнитной индукции.

В теории Максвелла не рассматривается дискретное строение среды и механизм процессов, проходящих в веществе (среде), находя-

щемся в электромагнитном поле. Свойства среды – относительная диэлектрическая проницаемость, относительная магнитная проницаемость и удельная электрическая проводимость определяются экспериментальным путем.

В теории изучаются макроскопические электромагнитные поля таких систем зарядов и токов, пространственные размеры которых много больше размеров атомов и молекул. Макроскопические поля в теории Максвелла представляют собой усредненные непрерывно изменяющиеся микрополя, создаваемые микроскопическими зарядами и токами. Усреднение производится по интервалам времени, значительно превышающим периоды внутриатомных процессов, и по объемам, значительно превышающим размеры атомов и молекул. Теория базируется также на том, что электрические и магнитные взаимодействия осуществляются посредством электромагнитного поля и распространяются со скоростью света.

Основу теории Максвелла составляют уравнения, названные уравнениями Максвелла.

Эти уравнения в сжатой форме выражают всю совокупность сведений об электромагнитном поле и являются постулатами электродинамики, полученными путем обобщения опытных фактов.

**Первое уравнение Максвелла** является обобщением закона электромагнитной индукции. В интегральной форме оно имеет вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (24.4)$$

**Циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна потоку скорости изменения вектора магнитной индукции через площадку, охваченную данным контуром, взятому со знаком минус.**

Согласно (24.4) множитель  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , стоящий под знаком интеграла в правой части выражения, указывает на то, что магнитное поле изменяется с течением времени. Следовательно, можно заключить, **что электрическое поле порождается как неподвижными зарядами, при этом циркуляция вектора напряженности электриче-**

ского поля по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна нулю, так и переменным магнитным полем, тогда циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру нулю не равна.

Выражение (24.4) можно записать, используя закон электромагнитной индукции

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

и, учитывая, что магнитный поток

$$\Phi = \vec{B}\vec{S}.$$

Неравенство нулю циркуляции вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру в (24.4) означает, что возбуждаемое переменным магнитным полем электрическое поле является вихревым, как и само магнитное поле.

Из первого уравнения Максвелла следует, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле.

По теореме Стокса можно перейти от интеграла по контуру  $L$  к интегрированию по площади поверхности  $S$ , охватываемой данным контуром

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S},$$

где ротор вектора  $\vec{E}$  выражается определителем

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Используя теорему Стокса, получаем

$$-\oint_L \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S},$$

или

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Последнее выражение представляет собой первое уравнение в дифференциальном виде.

**Второе уравнение Максвелла** является обобщением закона полного тока

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0(I + I_{\text{см}}),$$

где  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ,  $\mu = 1$ .

Второе уравнение Максвелла основано на предположении, что **всякое изменение электрического поля вызывает возникновение в окружающем пространстве вихревого магнитного поля**. Количественной мерой магнитного действия переменного электрического поля является ток смещения.

Второе уравнение Максвелла в интегральной форме имеет вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + I_{\text{см}}.$$

**Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру  $L$  определяется суммой токов: тока проводимости  $I$  и тока смещения  $I_{\text{см}}$ .**

Из второго уравнения Максвелла следует, что магнитное поле может порождаться либо проводниками с токами проводимости  $I$ , либо переменным электрическим полем (током смещения  $I_{\text{см}}$ ).

Используя теорему Стокса, циркуляцию вектора напряженности магнитного поля можно записать как

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S}.$$

Тогда второе уравнение Максвелла примет вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = I + I_{\text{cm}} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{\text{cm}}) d\vec{S} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Сравнивая выражения, стоящие под знаками интегралов, получаем

$$\text{rot } \vec{H} = \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Последнее равенство представляет собой второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Для областей поля, где отсутствуют токи проводимости  $\vec{j}$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

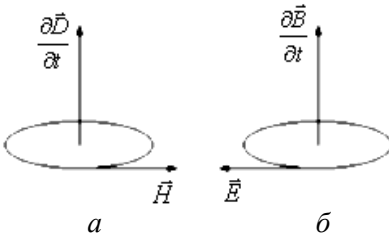


Рис. 24.7. Система координат:

*a* – правинтовая для векторов  $\vec{H}$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ;

*б* – левинтовая для векторов  $\vec{E}$  и  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Знак минус в первом уравнении Максвелла означает, что векторы  $\vec{E}$  и  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  соответствуют левовинтовой системе координат (рис. 24.7, б), а векторы  $\vec{H}$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  – правовинтовой (рис. 24.7, а).

**Третье и четвертое уравнения Максвелла** представляют собой обобщение теоремы Остроградского–Гаусса для электрического и магнитного полей. В интегральной форме эти уравнения имеют вид

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{охв}}^{\text{своб}},$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

где величина свободных зарядов  $q_{\text{своб}}^{\text{своб}}$ , охватываемых замкнутой поверхностью  $S$ , выражается через объемную плотность свободных зарядов  $\rho$  как

$$q_{\text{своб}}^{\text{своб}} = \int_V \rho dV.$$

Поток вектора электрического смещения, исходя из третьего уравнения Максвелла в интегральной форме, через произвольную замкнутую поверхность численно равен алгебраической сумме свободных зарядов, охваченных этой поверхностью. Значит, постоянное электрическое поле в вакууме порождается свободными электрическими зарядами. Магнитный поток (поток вектора  $\vec{B}$ ) через произвольную замкнутую поверхность, согласно четвертому уравнению Максвелла в интегральной форме, тождественно равен нулю. Это означает, что магнитное поле является вихревым (силовые линии магнитного поля замкнуты).

Используя теорему Остроградского–Гаусса, из векторного анализа получаем

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{D} dV, \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{B} dV,$$

где дивергенция векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  определяется выражениями

$$\text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z};$$

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Так как объемы и поверхности, по которым производится интегрирование, произвольны, то можно приравнять подынтегральные функции и получить уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

В дифференциальной форме третье и четвертое уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Дивергенция произвольного векторного поля определяет число стоков и истоков в единице объема, в которых начинаются или заканчиваются силовые линии поля. Следовательно, исходя из третьего уравнения Максвелла в дифференциальной форме, можно заключить, что источниками электрического поля являются электрические заряды, на которых начинаются или заканчиваются силовые линии поля. Для магнитного поля, согласно четвертому уравнению Максвелла, число стоков и истоков равно нулю, что позволяет заключить, что на данном этапе развития науки мы не можем говорить о существовании магнитных зарядов.

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме включает четыре уравнения

$$1. \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad 2. \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$3. \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad 4. \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Из первых двух уравнений следует, что переменные электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом, образуя единое электромагнитное поле. Разные знаки в правых частях первых двух уравнений обеспечивают устойчивость электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Если же существуют поверхности разрыва (где свойства среды меняются скачком), то необходимо использовать систему интегральных уравнений.

Для стационарных электрического и магнитного полей

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, эти поля существуют независимо друг от друга и описываются уравнениями электростатики

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

и магнитостатики

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Система уравнений Максвелла включает также «материальные уравнения», которые характеризуют электрические и магнитные свойства среды

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E};$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H};$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

а также граничными условиями

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma;$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau};$$

$$B_{1n} = B_{2n};$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j^{\text{пов}},$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды;

$\mu$  – магнитная проницаемость среды;

$\gamma$  – удельная электропроводность;

$\sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов;

$D_{1n}$ ,  $B_{1n}$  – нормальные составляющие вектора электрического смещения и вектора магнитной индукции соответственно в первой среде;

$D_{2n}$ ,  $B_{2n}$  – нормальные составляющие вектора электрического смещения и вектора магнитной индукции соответственно во второй среде;



$E_{1\tau}$ ,  $H_{1\tau}$  – тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля и вектора напряженности магнитного поля соответственно в первой среде;

$\vec{j}^{\text{пов}}$  – вектор линейной плотности поверхностного тока проводимости.

Таким образом:

– электрическое и магнитное поля взаимосвязаны, то есть они не могут существовать друг без друга. Существует единое электромагнитное поле;

– уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца, то есть их вид не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой;

– уравнения Максвелла несимметричны.

Теория Максвелла применима:

– для расстояний между зарядами, превышающими внутриатомные расстояния  $> 10^{-10}$  м;

– частот изменения поля не более  $10^{14}$ – $10^{15}$  Гц (это ограничение связано с проявлением на высоких частотах квантовых свойств излучения);

– полей, напряженность которых менее  $10^5$  В/м (это ограничение связано с тем, что энергия, получаемая заряженными частицами, должна быть меньше, по сравнению со средней энергией беспорядочного движения частиц среды).

#### **24.4. Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. Относительный характер разделения электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля**

В 1632 г. в книге «Диалог о двух главнейших системах мира – Птолемеевой и Коперниковой» Галилей сформулировал тезис, согласно которому никаким механическим опытом невозможно определить, движется ли инерциальная система отсчета или нет, если наблюдатель находится в этой системе. Осознание относительности движения привело к установлению принципа, согласно которому описание физического явления не должно зависеть от выбора инерциальной системы отсчета (принцип инвариантности). Физически этот принцип требует,

чтобы уравнения электродинамики, в частности, записанные в «неподвижной» системе отсчета, имели бы точно такой же вид в системе отсчета, двигающейся в пространстве с постоянной скоростью. При переходе из одной системы отсчета в другую координаты точки наблюдения и физические величины подвергаются преобразованиям. В классической механике Ньютона–Лагранжа преобразования Галилея являлись выражением принципа относительности Галилея.

Система уравнений классической электродинамики, созданная трудами Д. Максвелла, Г. Герца и О. Хевисайда, была записана для «неподвижной» системы отсчета. Г. Лоренц поставил перед собой задачу: найти преобразования, которые позволили бы записать уравнения Максвелла в системе отсчета, движущейся относительно наблюдателя, причем форма записи этих уравнений через новые переменные должна совпадать с формой записи в исходной системе отсчета.

Рассмотрим систему отсчета  $K$ , условно неподвижную, и систему отсчета  $K'$ , которая движется вдоль оси  $x$  системы  $K$  с постоянной скоростью  $v$ , причем в какой-то момент времени система координат  $K'$  совпадала (для удобства выкладок) с системой координат  $K$ . Напомним, что обе системы координат декартовы.

Преобразования Лоренца для координат точки наблюдения и времени имеют вид (для рассматриваемого случая)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (24.5)$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Обратные преобразования получаются из (24.5) сменой знака  $v$  и заменой величин со штрихом на величины без штриха, а величин без штриха – на величины со штрихом:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (24.6)$$

Для компонент вектора напряженности электрического поля преобразования Лоренца имеют вид

$$E'_{x'} = E_x, \quad E'_{y'} = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E'_{z'} = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (24.7)$$

Для компонент вектора индукции магнитного поля преобразования Лоренца имеют вид

$$B'_{x'} = B_x, \quad B'_{y'} = \frac{B_y + \frac{vE_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_{z'} = \frac{B_z - \frac{vE_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (24.8)$$

Для компонент вектора поляризованности среды  $\vec{P}$  имеют место соотношения

$$P'_{x'} = P_x, \quad P'_{y'} = \frac{P_y - \frac{vJ_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad P'_{z'} = \frac{P_z + \frac{vJ_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (24.9)$$

Похожие соотношения верны и для вектора намагниченности  $\vec{J}$

$$J'_{x'} = J_x, \quad J'_{y'} = \frac{J_y - \frac{vP_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad J'_{z'} = \frac{J_z + \frac{vP_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (24.10)$$

Для объемной плотности заряда имеем

$$\rho' = \frac{\rho + \frac{vJ_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (24.11)$$

а для объемной плотности тока  $\vec{J}$

$$J'_{x'} = \frac{J_x + v\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad J'_{y'} = J_y, \quad J'_{z'} = J_z. \quad (24.12)$$

Заметим, что в силу преобразований Лоренца объем

$$V' = V\sqrt{1-\beta^2},$$

поэтому при  $J_x = 0$  получаем, что электрический заряд

$$q' = \rho'V' = \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}V\sqrt{1-\beta^2} = \rho V = q.$$

**Величина электрического заряда является инвариантом относительно преобразований Лоренца.**

Соотношений (24.7)–(24.12) достаточно, чтобы рассчитать значения всех компонент электромагнитного поля в системе отсчета  $K'$ . Если принять их как постулат, система уравнений Максвелла «со штрихом» сводится к системе уравнений Максвелла «без штриха», исходной системе отсчета. Справедливо и обратное: если инвариантность записи системы уравнений Максвелла требовать как условие, то при преобразовании координат и времени (24.5)–(24.6) получим соотношения (24.7)–(24.12).

Дифференциальная форма уравнений Максвелла содержит частные производные по пространственным переменным и времени.

Переменные  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  и  $t'$  можно в общем случае рассматривать как переменные, от которых зависят «исходные» координаты и время

$$x = x(x', y', z', t'), \quad y = y(x', y', z', t'),$$

$$z = z(x', y', z', t'), \quad t = t(x', y', z', t').$$

В этом случае из математического анализа следует

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'}; \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y'}; \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z'}.\end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial t}; & \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z}; & \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}\tag{24.13}$$

Рассмотрим проекцию уравнения на ось  $x$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

то есть

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}.\tag{24.14}$$

Если имеет место инвариантность, то

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'}.\tag{24.15}$$

В уравнении (24.15) используем соотношения (24.7) и (24.10) и операторные соотношения (24.13) следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = - \left( \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial B_x}{\partial t} \right).$$

Получаем

$$v \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t}.$$

Поскольку  $\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ , приходим к уравнению (24.14).

Подобным образом можно убедиться в том, что при справедливости соотношений (24.5)–(24.12) система уравнений Максвелла в одной системе координат переходит в систему уравнений Максвелла во второй системе координат.

Из соотношений (24.7)–(24.12) непосредственно следует, что электромагнитное поле обладает двумя инвариантными величинами по отношению к преобразованиям Лоренца:

$$\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 = \operatorname{inv}, \quad (24.16)$$

$$\vec{E} \vec{B} = \operatorname{inv}. \quad (24.17)$$

Из соотношения (24.17), в частности, следует, что если в какой-либо инерциальной системе отсчета электрическое поле  $\vec{E}$  в точке наблюдения в заданный момент времени окажется перпендикулярным магнитному полю  $\vec{B}$  (то есть  $\vec{E} \vec{B} = 0$ ), то это свойство будет иметь место для всех инерциальных систем.

Если левая часть соотношения (24.16) равна нулю в некоторой инерциальной системе отсчета, что характерно для плоской электромагнитной волны в вакууме, для которой выполнено и вышеописанное условие, то отмеченное свойство будет иметь место во всех инерциальных системах отсчета. Последнее означает, что плоская электромагнитная волна в выбранной системе отсчета будет снова плоской электромагнитной волной в любой другой инерциальной системе отсчета. Соотношения (24.7)–(24.12) подчеркивают относительный (не абсолютный) характер понятий «электрическое поле» и «магнитное поле». Особенно ярко это проявляется в том факте,

что если в системе отсчета  $K$  поле  $\vec{E}$  равно нулю, то в системе отсчета  $K'$  оно отлично от нуля, если в системе  $K$  поле  $\vec{B}$  равно нулю, то в системе  $K'$  оно отлично от нуля.

Интересно и то, что подобными свойствами обладают и векторы поляризованности среды  $\vec{P}$  и намагниченности  $\vec{J}$ . Иногда говорят, что «электрические» свойства среды превращаются в «магнитные» и наоборот при переходе от системы  $K$  к системе  $K'$  и обратно. Здесь требуется известная осторожность: поляризованность среды, по определению, не есть свойство среды, а результат воздействия электрического поля. Отсутствие результата воздействия в частном случае совсем не означает потерю свойства среды. Подобное исследование можно было бы провести относительно величин  $\rho$  и  $\vec{J}$ .

Заметим, что для инерциальных систем отсчета, медленно движущихся относительно выбранной системы отсчета, если выполнено условие  $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ , то преобразования Лоренца для координат и времени сводятся к преобразованиям Галилея:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Для компонент электрического поля получаем из (24.7)

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\vec{B}. \quad (24.18)$$

В соотношении (24.18) легко просматривается выражение для силы Лоренца – ее определение лежало в основе понятий электрического и магнитного поля в самом начале курса. Теперь становится ясным, что сила Лоренца (соотношение (24.18)) по форме записи справедлива только для «медленных» движений заряженной материальной точки.

Приведенные выше общие утверждения подкреплены анализом простейшей физической ситуации: система  $K'$  двигалась относительно системы  $K$  весьма специфическим образом. Если скорость  $\vec{v}$  системы  $K'$  относительно системы  $K$  имеет произвольное направление, то (преобразования Лоренца для координат) можно записать в виде

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}} + \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) (\vec{r}\vec{v}) \frac{\vec{v}}{v^2};$$

$$t' = \frac{t - \frac{(\vec{r}\vec{v})}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Результаты преобразования Лоренца для составляющих векторов электрического и магнитного поля достаточно громоздки и не добавляют ничего принципиально нового к тому, что можно получить из рассмотренной выше схемы.

Таким образом, уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца: их вид не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя рассмотренные векторные величины в них преобразуются по определенным правилам.

Из принципа относительности вытекает, что отдельное рассмотрение электрического и магнитного поля имеет относительный смысл. Так, если электрическое поле создается системой неподвижных зарядов, то эти заряды, являясь неподвижными относительно одной инерциальной системы отсчета, движутся относительно другой и, следовательно, будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле. Аналогично неподвижный относительно одной инерциальной системы отсчета проводник с постоянным током, возбуждая в каждой точке пространства постоянное магнитное поле, движется относительно других инерциальных систем, и создаваемое им переменное магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле.

Теория Максвелла, ее экспериментальное подтверждение, а также принцип относительности Эйнштейна приводят к единой теории электрических, магнитных и оптических явлений, базирующейся на представлении об электромагнитном поле.



## 25. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### 25.1. Основные свойства электромагнитных волн

Длина электромагнитной волны  $\lambda$ , ее частота  $\nu$  и скорость распространения  $c$  связаны стандартным для всех волн соотношением:

$$c = \lambda\nu.$$

Эксперименты показали, что электромагнитным волнам присущи те же основные свойства, что и другим видам волновых процессов.

1. **Отражение волн.** Электромагнитные волны отражаются от любой поверхности. Угол отражения при этом равен углу падения.

2. **Поглощение волн.** Электромагнитные волны частично поглощаются при прохождении сквозь диэлектрик.

3. **Преломление волн.** Электромагнитные волны меняют направление распространения при переходе из воздуха в диэлектрик (и вообще на границе двух различных диэлектриков).

4. **Интерференция волн.** Герц наблюдал интерференцию двух волн: первая приходила к приемному вибратору непосредственно от излучающего вибратора, вторая – после предварительного отражения от металлического листа. Меняя положение приемного вибратора и фиксируя положения интерференционных максимумов, Герц измерил длину волны  $\lambda$ . Частота  $\nu$  собственных колебаний в приемном вибраторе была Герцу известна. По формуле он вычислил скорость распространения электромагнитных волн и получил приближенно  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с. Именно такой результат предсказывала теория, построенная Максвеллом.

5. **Дифракция волн.** Электромагнитные волны огибают препятствия, размеры которых соизмеримы с длиной волны. Например, радиоволны, длина волны которых составляет несколько десятков или сотен метров, огибают дома или горы, находящиеся на пути их распространения.

### 25.2. опыты Герца и Лебедева

Теория Максвелла не только предсказала существование электромагнитных волн, но и указала условия, необходимые для успеха

опытов: достаточно высокая частота электрических колебаний и открытая форма цепи. Первое экспериментальное подтверждение электромагнитной теории Максвелла было дано в опытах Герца. Для получения электромагнитных волн Герц применил прибор, состоящий из двух стержней, разделенных искровым промежутком (вibrator Герца) (рис. 25.1), к концам которого подводится напряжение от повышающего трансформатора. Возбуждение колебаний в этой цепи происходит так, что в вибраторе возникают регулярно повторяющиеся вспышки высокочастотных затухающих колебаний. Период этих колебаний и, следовательно, длина излучаемых электромагнитных волн задаются размерами вибратора.

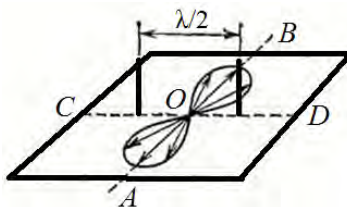


Рис. 25.1. Схема вибратора Герца

Для обнаружения волн Герц использовал второй вибратор, который имел гораздо меньшую длину искрового промежутка (доли миллиметра вместо 7,5 мм в излучающем вибраторе). Кроме такого приемного вибратора, применялся и приемный виток, согнутый из проволоки в виде прямоугольника и тоже прерванный очень малым искровым промежутком (рис. 25.2). Под действием электромагнитной волны в этих приемниках возникают вынужденные электромагнитные колебания. Если приемники (вibrator или виток) настроены в резонанс на частоту излучателя, то при определенных условиях в их искровых промежутках проскакивают очень маленькие и слабые искорки. Наблюдая появление или отсутствие таких искорок при различных условиях излучения и распространения волн, а также при различных расположениях приемников, можно было судить о свойствах наблюдаемых волн. О сложности этих опытов говорит, например, то, что искорки в приемниках большей частью можно было видеть только в темноте и неутомленным глазом.

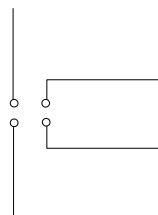


Рис. 25.2. Приемные vibrator и виток для опытов Герца

В своих опытах Герц реализовал получение электромагнитных волн и воспринял с этими волнами все явления, типичные для лю-

бых волн: образование «тени» позади хорошо отражающих (металлических) предметов, отражение от металлических листов, преломление в большой призме, изготовленной из асфальта, образование стоячей волны в результате интерференции волны, падающей отвесно на металлический лист, со встречной волной, отраженной этим листом. Он также исследовал направления векторов напряженностей электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  поля в электромагнитных волнах. Оказалось, что электромагнитные волны имеют такие же свойства, как и световые.

Таким образом, опыты Герца стали прочной основой теории Максвелла: электромагнитные волны, описанные теорией Максвелла, оказались реализованными на опыте.

Выдающегося успеха в исследовании электромагнитных волн достиг русский физик П. Н. Лебедев (1866–1912). В 1895 г. он получил с помощью вибраторов миллиметровых размеров волны длиной около 2–6 мм, которые, как сам он писал, «...были ближе к более длинным волнам теплового спектра, чем к электрическим волнам, которыми вначале пользовался Герц,...». С такими волнами Лебедев получил все «оптические» явления – интерференцию, поляризацию, отражение, преломление и двойное преломление в призме, вырезанной из кристаллической серы.

### 25.3. Шкала электромагнитных волн

Спектр электромагнитных волн необычайно широк: длина волны может измеряться тысячами километров, а может быть меньше пикометра. Весь этот спектр можно разделить на несколько характерных диапазонов длин волн, внутри каждого диапазона электромагнитные волны обладают схожими свойствами и способами излучения.

Рассмотрим эти диапазоны в порядке убывания длины волны. Диапазоны плавно переходят друг в друга, четкой границы между ними нет. Поэтому граничные значения длин волн порой весьма условны.

**Радиоволны** ( $\lambda > 1$  мм) могут значительно различаться по длине – от нескольких сантиметров до сотен и даже тысяч километров, что сопоставимо с радиусом Земного шара (около 6400 км). Волны всех радиодиапазонов широко используются в технике – дециметровые и ультракороткие метровые волны применяются для телевидения

и радиовещания в диапазоне ультракоротких волн с частотной модуляцией (УКВ/FM), обеспечивая высокое качество приема сигнала в пределах зоны прямого распространения волн.

**Сверхдлинные волны** ( $\lambda > 10$  км) хорошо распространяются в воде, поэтому используются для связи с подводными лодками.

**Длинные волны** ( $1 \text{ км} < \lambda < 10 \text{ км}$ ) используются в радиосвязи, радиовещании, радионавигации.

**Средние волны** ( $100 \text{ м} < \lambda < 1 \text{ км}$ ) используются в радиовещании, радиосвязи на расстоянии не более 1500 км.

**Короткие волны** ( $10 \text{ м} < \lambda < 100 \text{ м}$ ) используются радиовещании.

**Метровые волны** ( $1 \text{ м} < \lambda < 10 \text{ м}$ ) используются в местном радиовещании в УКВ-диапазоне.

**Дециметровые волны** ( $10 \text{ см} < \lambda < 1 \text{ м}$ ) используются в телевидении, микроволновых печах и т. д.

**Сантиметровые волны** ( $1 \text{ см} < \lambda < 10 \text{ см}$ ) используются в области радиолокации и спутниковых телеканалов.

**Миллиметровые волны** ( $1 \text{ мм} < \lambda < 1 \text{ см}$ ) используются в радиолокации, космических линиях связи. Здесь подходим к длинноволновой границе инфракрасного излучения.

**Инфракрасное излучение** ( $780 \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ мм}$ ) человек ощущает непосредственно кожей, как тепло. Если вы протягиваете руку в направлении огня или раскаленного предмета и чувствуете жар, исходящий от него, вы воспринимаете как жар именно инфракрасное излучение. Поскольку большинство объектов на поверхности Земли излучает энергию в инфракрасном диапазоне волн, детекторы инфракрасного излучения играют немаловажную роль в современных технологиях обнаружения. Инфракрасные окуляры приборов ночного видения позволяют людям «видеть в темноте», и с их помощью можно обнаружить не только людей, но и технику, сооружения, нагретые за день и отдающие ночью свое тепло в окружающую среду в виде инфракрасных лучей. Детекторы инфракрасных лучей широко используются спасательными службами, например, для обнаружения живых людей под завалами после землетрясений или иных стихийных бедствий и техногенных катастроф.

**Видимый свет** ( $380 \text{ нм} < \lambda < 780 \text{ нм}$ ). Человеческий глаз представляет собой идеальный инструмент для регистрации и анализа электромагнитных волн указанного диапазона. Это обусловлено

двумя причинами. Во-первых, волны видимой части спектра практически беспрепятственно распространяются в прозрачной для них атмосфере. Во-вторых, температура поверхности Солнца (около 5000 °С) такова, что пик энергии солнечных лучей приходится именно на видимую часть спектра. Таким образом, наш главный источник энергии излучает огромное количество энергии именно в видимом световом диапазоне, а окружающая среда в значительной мере прозрачна для этого излучения. Неудивительно, что человеческий глаз в процессе эволюции сформировался таким образом, чтобы улавливать и распознавать именно эту часть спектра электромагнитных волн.

С физической точки зрения видимый свет представляет собой всего лишь узкую полоску в широком спектре излучаемых волн. Для нас он столь важен лишь постольку, поскольку человеческий мозг оснащен инструментом для выявления и анализа электромагнитных волн именно этой части спектра.

**Ультрафиолетовое излучение** ( $10 \text{ нм} < \lambda < 380 \text{ нм}$ ). Мягкие ультрафиолетовые лучи в солнечном спектре (с длинами волн, приближающимися к видимой части спектра), например, вызывают в умеренных дозах загар, а в избыточных – тяжелые ожоги. Жесткий (коротковолновой) ультрафиолет губителен для биологических клеток и поэтому используется в медицине для стерилизации хирургических инструментов и медицинского оборудования, убивая все микроорганизмы на их поверхности.

Все живое на Земле защищено от губительного влияния жесткого ультрафиолетового излучения озоновым слоем земной атмосферы, поглощающим большую часть жестких ультрафиолетовых лучей в спектре солнечной радиации. Если бы не этот естественный щит, жизнь на Земле едва ли бы вышла на сушу из вод Мирового океана. Однако, несмотря на защитный озоновый слой, определенная часть жестких ультрафиолетовых лучей достигает поверхности Земли и способна вызвать рак кожи, особенно у людей, от рождения склонных к бледности и плохо загорающих на солнце.

**Рентгеновское излучение** ( $5 \text{ пм} < \lambda < 10 \text{ нм}$ ) проникает сквозь мягкие ткани организма и поэтому незаменимо в медицинской диагностике. Как и в случае с радиоволнами временной разрыв между их открытием в 1895 г. и началом практического применения (по-

лучение в одной из парижских больниц первого рентгеновского снимка) составил считанные годы.

**Гамма-излучение** ( $\lambda < 5$  пм) состоит из фотонов сверхвысоких энергий и используется сегодня в онкологии для лечения раковых опухолей (а точнее, для умерщвления раковых клеток). Однако их влияние на живые клетки столь губительно, что приходится соблюдать крайнюю осторожность, чтобы не причинить вреда здоровым тканям и органам.

Все электромагнитные волны в любой части спектра представляют собой распространяющиеся в вакууме или среде поперечные колебания электрического и магнитного поля, все они распространяются в вакууме со скоростью света  $c$  и отличаются друг от друга лишь длиной волны и, как следствие, энергией, которую они переносят. Вся шкала электромагнитных волн является свидетельством того, что все излучения обладают одновременно квантовыми и волновыми свойствами. Эти свойства в этом случае не исключают, а дополняют друг друга. Волновые свойства ярче проявляются при малых частотах и менее ярко – при больших. И наоборот, квантовые свойства ярче проявляются при больших частотах и менее ярко – при малых.

Следовательно, чем меньше длина волны, тем ярче проявляются квантовые свойства, а чем больше длина волны, тем ярче проявляются волновые свойства.

#### 25.4. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны

Из уравнений Максвелла следует, что для однородной и изотропной среды вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле, векторы напряженностей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  переменного электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению типа

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где  $\xi$  – значение колеблющейся величины в момент времени  $t$ ;  
 $v$  – фазовая скорость;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

Решением уравнения является уравнение любой волны.

Волновые уравнения для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Всякая функция, удовлетворяющая этим уравнениям, описывает некоторую волну. Следовательно, электромагнитные поля могут действительно существовать в виде электромагнитных волн. Фазовая скорость электромагнитных волн определяется выражением

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Волновые уравнения для  $E_y$  и  $H_z$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2},$$

где индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  подчеркивают лишь то, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

Волновым уравнениям удовлетворяют плоские монохроматические электромагнитные волны, описываемые уравнениями:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где  $E_0$  и  $H_0$  – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны;

$\omega$  – круговая частота волны;

$k = \omega/v$  – волновое число;

$\varphi$  – начальные фазы колебаний.

В этих уравнениях  $\varphi$  одинаково, так как колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой.

## 25.5. Плоская электромагнитная волна.

### Поперечность и монохроматичность электромагнитных волн

Пусть имеется однородная и изотропная среда вдали от зарядов и токов. Возбудим в какой-либо точке пространства переменное электрическое гармоническое поле  $E_y(t)$ . Предположим,  $E_x = H_x = 0$ . Для простоты рассматриваем этот частный случай.

Из уравнений Максвелла при условии сделанных предположений можно получить волновые уравнения электромагнитного поля

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (25.1)$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}$  – скорость распространения электромагнитной волны.

Процесс распространения электромагнитного поля в пространстве называется **электромагнитной волной**. Подставим  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м в выражение для скорости  $v$ . Если среда – вакуум, то  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ , следовательно, получим, что  $v = 3 \cdot 10^8$  м/с =  $c$ , то есть скорость электромагнитной волны в вакууме равна скорости света в вакууме. Это обстоятельство приводит к выводу, что *свет* – это электромагнитная волна.

Решения уравнений (25.1)

$$\begin{cases} E_y = E_m \sin(\omega t - kx); \\ H_z = H_m \sin(\omega t - kx), \end{cases} \quad (25.2)$$

то есть в нашем случае волна распространяется вдоль оси  $x$ .



Выражения (25.2) – уравнения плоской электромагнитной волны. Графики представлены на рис. 25.3.

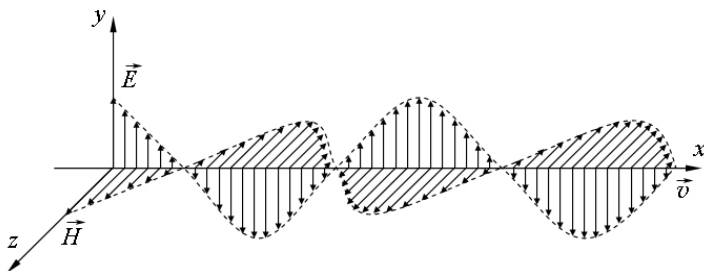


Рис. 25.3. Распространение электромагнитной волны

Электромагнитная волна является поперечной волной, то есть колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят перпендикулярно направлению распространения волны. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  достигают максимума одновременно, но колеблются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Строго гармоническая (синусоидальная) электромагнитная волна с постоянными во времени частотой, амплитудой и начальной фазой называется *монохроматической волной*.

Как показывает опыт, электромагнитные волны проходят через диэлектрики и отражаются от металлов. Для них свойственны такие явления, как интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия.

Итак, из решения уравнений Максвелла можно сделать следующие выводы:

- если в какой-либо ограниченной области пространства возникает электромагнитное поле, то оно не остается локализованным в этой области, а распространяется с конечной скоростью, зависящей от свойств среды;

- если электрическое и магнитное поля меняются по простому гармоническому закону, то электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде плоской электромагнитной волны.

## 25.6. Энергия и импульс электромагнитной волны. Вектор Умова–Пойтинга

Возможность обнаружения электромагнитных волн указывает на то, что они переносят энергию. Объемная плотность  $\omega$  энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей  $\omega_{\text{эл}}$  электрического и  $\omega_{\text{м}}$  магнитного полей:

$$\omega = \omega_{\text{эл}} + \omega_{\text{м}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E^2 + \frac{\mu_0 \mu}{2} H^2.$$

Учитывая соотношение  $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ , следующее из уравнений Максвелла, получим, что плотность энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинакова.

Таким образом,

$$\omega = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu} E H.$$

Умножив плотность энергии  $\omega$  на скорость распространения волны в среде  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}}$ , получим, что плотность потока энергии определяется выражением

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, то направление вектора  $\vec{S}$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$ . Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется **вектором Умова–Пойтинга**:

**Вектор  $\vec{S}$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.**

Если электромагнитные волны поглощаются или отражаются телами (эти явления подтверждены опытами Г. Герца), то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать на тела давление. Давление электромагнитных волн объясняется тем, что под действием электрического поля волны, заряженные частицы вещества начинают упорядоченно двигаться и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию сил Лоренца. Однако значение этого давления ничтожно. Можно оценить, что при средней мощности солнечного излучения, приходящего на Землю, давление для абсолютно поглощающей поверхности составляет примерно 5 мкПа. В исключительно точных экспериментах, ставших классическими, П. Н. Лебедев в 1899 г. доказал существование светового давления на твердые тела, а в 1910 г. – на газы. Опыты Лебедева имели огромное значение для утверждения выводов теории Максвелла о том, что свет представляет собой электромагнитные волны.

Существование давления электромагнитных волн приводит к выводу о том, что электромагнитное поле характеризуется механическим импульсом. Используя релятивистские выражения для им-

пульса  $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  и энергии  $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  получим, что импульс

электромагнитного поля

$$p = \frac{W}{c}.$$

Таким образом, рассмотренные свойства электромагнитных волн, определяемые теорией Максвелла, полностью подтверждаются опытами Герца, Лебедева и выводами специальной теории относительности, сыгравшими решающую роль для подтверждения и быстрого признания этой теории.

Впервые электромагнитные волны были использованы через семь лет после опытов Герца. Полное описание применения электромагнитных волн дать практически невозможно, так как нет областей науки и техники где бы они не применялись. Электромагнитные волны используются в определении точного расстояния с по-

мощью радиосигналов (интерферометры, нивелиры, теодолиты). При помощи рентгеновского излучения можно определить дефекты конструкционных материалов. Электромагнитное СВЧ-излучение в бытовых кухонных печах служит для приготовления пищи.

## 25.7. Излучение колеблющегося электрического диполя

Простейшим излучателем электромагнитных волн является диполь, дипольный момент  $\vec{p}$  которого изменяется во времени по гармоническому закону  $\vec{p} = \vec{p}_m \cos \omega t$ , где  $\vec{p}_m$  – вектор амплитуды вектора  $\vec{p}$ . Примером подобного диполя может служить система, состоящая из покоящегося заряда  $+Q$  и отрицательного заряда  $-Q$ , гармонически колеблющегося вдоль направления  $\vec{p}$  с частотой  $\omega$ .

Задача об излучении диполя имеет в теории излучающих систем важное значение, так как всякую реальную излучающую систему (например, антенну) можно рассчитывать, рассматривая излучение диполя. Кроме того, многие вопросы взаимодействия излучения с веществом можно объяснить на основе классической теории, рассматривая атомы как системы зарядов, в которых электроны совершают гармонические колебания около их положения равновесия.

Характер электромагнитного поля диполя зависит от выбора рассматриваемой точки. Особый интерес представляет так называемая **волновая зона диполя** – точки пространства, отстоящие от диполя на расстоянии  $r$ , значительно превышающего длину волны ( $r \gg \lambda$ ), так как в ней картина электромагнитного поля диполя сильно упрощается.

В волновой зоне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются по закону  $\cos(\omega t - k\vec{r})$ . Амплитуды этих векторов зависят от расстояния  $r$  до излучателя и угла  $\theta$  между направлением радиус-вектора и осью диполя и пропорциональны  $\frac{1}{r^2} \sin \theta$ . Отсюда следует, что интенсив-

ность излучения диполя в волновой зоне пропорциональна  $\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$ . Из

последней формулы вытекает, что при заданном значении угла  $\theta$  интенсивность излучения диполя изменяется обратно пропорциональ-

но квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, она зависит от угла  $\theta$ . Сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси, то есть при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Зависимость интенсивности  $I$

излучения диполя от угла  $\theta$  при заданном значении  $r$ , построенная в полярных координатах, изображается с помощью диаграммы направленности излучения диполя. Эта диаграмма строится так,

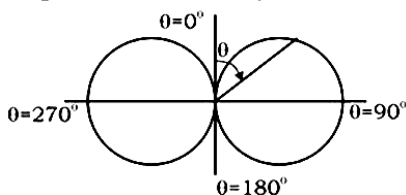


Рис. 25.4. Диаграмма направленности излучения диполя

чтобы длина отрезка, отсекаемого ею на луче, проведенном из центра диполя, давала интенсивность излучения под углом  $\theta$  (рис. 25.4).

Из рис. 25.4 видно, что вдоль своей оси ( $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$ ) диполь не излучает.

Диаграмма направленности излучения диполя позволяет формировать излучение с необходимыми заданными характеристиками и используется при конструировании антенн.

## Литература

1. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высшая школа, 1999. – § 79, 84, 85, 96, 102.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 5 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1973. – Т. 2 : Электричество. – §5, 9, 10, 11, 69, 70.
3. Геворкян, Р. Г. Курс физики : в 4 ч. / Р. Г. Геворкян. – М. : Высшая школа, 1979. – Ч. 3. Гл. 1 § 2, 4; гл. 2, § 8, 9.
4. Детлаф, А. А. Курс физики : в 3 т. / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 1973–1979. – Т. 1–3.
5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977–1990. – Т. 1–5.
6. Матвеев, А. Н. Курс общей физики / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1976–1989.
7. Кужир, П. Г. Общая физика: электричество, магнетизм. Сборник задач : учебное пособие / П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук. – Минск : Изд-во Гревцова, 2013. – 272 с.
8. Кужир, П. Г. Задачи по курсу физики. Электростатика [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для проведения практических занятий со студентами инженерно-технических специальностей / П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук. – Минск : БНТУ, 2012. – Рег. № БНТУ/ФЭС57-29.2012.
9. Кужир, П. Г. Задачи по курсу общей физики: постоянный электрический ток [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для проведения практических занятий со студентами инженерно-технических специальностей / П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук. – Минск : БНТУ, 2013. – Рег. № БНТУ/ФЭС57-27.2013.
10. Позняк, В. С. Определение удельного сопротивления и удельной электропроводности проводника / В. С. Позняк. – Минск : БНТУ, 2010. – § 1, 2.
11. Позняк, В. С. Исследование законов Ома и Джоуля–Ленца в дифференциальной форме / В. С. Позняк, А. А. Баранов. – Минск : БНТУ, 2011. – §1, 2, 3, 4, 5.
12. Позняк, В. С. Исследование скоростей упорядоченного и теплового движений электронов, их концентрации в металлическом проводнике / В. С. Позняк, А. А. Баранов. – Минск : БНТУ, 2014. – § 1, 3, 4.

## СОДЕРЖАНИЕ

16. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ .....	3
16.1. Закон Кулона .....	3
16.2. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции для напряженности электростатических полей.....	6
16.3. Поток вектора напряженности для электрического поля в вакууме. Теорема Гаусса .....	11
16.4. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженности электростатических полей.....	14
16.5. Работа при перемещении заряда в электростатическом поле. Потенциал электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля .....	18
16.6. Связь напряженности поля и потенциала .....	24
16.7. Поле электрического диполя.....	29
16.8. Диполь во внешнем электрическом поле.....	32
16.9. Потенциальная энергия диполя в электростатическом поле.....	34
17. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ .....	35
17.1. Диэлектрики. Свободные и связанные заряды в диэлектриках. Поляризация диэлектриков .....	35
17.2. Виды поляризации .....	37
17.3. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость. Напряженность поля в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость.....	38
17.4. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в диэлектрике. Вектор электрического смещения .....	43
17.5. Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков .....	45
17.6. Сегнетоэлектрики и их свойства .....	48
17.7. Пьезоэлектрики .....	56
17.8. Пирозэлектрики .....	63
17.9. Электреты .....	65
17.10. Проводники. Распределение заряда в проводнике. Поле внутри проводника и на его поверхности .....	70

17.11. Электростатическое поле в полости идеального проводника. Электростатическая защита.....	72
17.12. Емкость системы проводников. Конденсаторы.....	74
17.13. Емкость конденсаторов различной геометрической формы. Емкость при параллельном и последовательном соединении системы конденсаторов.....	76
17.14. Энергия системы зарядов и уединенного проводника.....	79
17.15. Энергия заряженного конденсатора. Энергия электрического поля.....	80
<b>18. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.....</b>	<b>81</b>
18.1. Постоянный электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Проводники и изоляторы.....	81
18.2. Разность потенциалов. Электродвижущая сила. Напряжение.....	83
18.3. Классическая электронная теория электропроводности. Закон Ома в дифференциальной форме.....	86
18.4. Закон Джоуля–Ленца.....	89
18.5. Закон Ома в интегральной форме.....	91
18.6. Правила Кирхгофа. Расчет разветвленных цепей.....	93
18.7. Уравнение непрерывности.....	95
<b>19. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ.....</b>	<b>97</b>
19.1. Классическая электронная теория электропроводности металлов.....	97
19.2. Вывод законов Ома, Джоуля–Ленца и Видемана–Франца.....	102
19.3. Границы применимости классической электронной теории проводимости.....	106
19.4. Работа выхода электронов из металла.....	107
19.5. Эмиссионные явления.....	108
19.6. Электрический ток в газах.....	113
19.7. Ионизация и рекомбинация газов.....	113
19.8. Несамостоятельный разряд.....	115
19.9. Самостоятельный газовый разряд и его типы.....	117
19.10. Плазма и ее свойства.....	122



20. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....	125
20.1. Магнитное поле. Вектор магнитного момента. Индукция и напряженность магнитного поля. Принцип суперпозиции...	125
20.2. Магнитное поле тока. Закон Био–Савара–Лапласа и его применение для расчетов магнитного поля (магнитное поле прямолинейного проводника с током и магнитное поле кругового тока) .....	129
20.3. Взаимодействие параллельных токов. Сила Ампера. Магнитная постоянная.....	136
20.4. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.....	140
20.5. Движение заряженной частицы в магнитном поле .....	143
20.6. Ускорители заряженных частиц .....	147
20.7. Эффект Холла.....	160
20.8. МГД-генератор .....	165
20.9. Масс-спектрографы.....	168
20.10. Вихревой характер магнитного поля. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ (закон полного тока для магнитного поля в вакууме) .....	171
20.11. Магнитное поле соленоида и тороида .....	172
20.12. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для потока вектора индукции магнитного поля.....	174
20.13. Дивергенция и ротор магнитного поля .....	175
20.14. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле .....	178
20.15. Сила, действующая на контур с током в магнитном поле .....	179
21. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ.....	182
21.1. Магнитные моменты электронов и атомов .....	182
21.2. Намагничивание вещества. Намагниченность. Магнитная восприимчивость. Виды магнетиков .....	186
21.3. Диамагнетики. Парамагнетики .....	188
21.4. Напряженность магнитного поля. Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля). Магнитная проницаемость вещества .....	193

21.5. Ферромагнетики. Домены. Спиновая теория магнетизма. Обменные силы. Кривая намагничивания. Магнитный гистерезис. Точка Кюри. Антиферромагнетики. Точка Нееля. Ферриты .....	197
21.6. Граничные условия на границе раздела двух магнетиков.....	202
22. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ.....	206
22.1. Опыты Фарадея .....	206
22.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея.....	207
22.3. Правило Ленца. Вихревые токи (токи Фуко) .....	209
22.4. Индуктивность контура с током. Явление самоиндукции. Электродвижущая сила самоиндукции .....	212
22.5. Токи при замыкании и размыкании цепи .....	215
22.6. Взаимная индуктивность .....	223
22.7. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии.....	225
22.8. Трансформаторы. Работа перемагничивания ферромагнетика .....	227
23. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ .....	233
23.1. Колебательный контур .....	233
23.2. Свободные гармонические колебания в идеальном колебательном контуре.....	234
23.3. Свободные затухающие колебания в колебательном контуре .....	237
23.4. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение.....	242
23.5. Переменный ток. Закон Ома для переменного тока. Резонанс напряжений. Резонанс токов. Мощность в цепи переменного тока. Действующие значения тока и напряжения .....	249
24. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.....	255
24.1. Вихревое электрическое поле .....	256
24.2. Ток смещения. Плотность тока смещения. Полный ток .....	259

24.3. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме.....	264
24.4. Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. Относительный характер разделения электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля.....	273
25. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.....	281
25.1. Основные свойства электромагнитных волн.....	281
25.2. опыты Герца и Лебедева.....	281
25.3. Шкала электромагнитных волн .....	283
25.4. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны.....	286
25.5. Плоская электромагнитная волна. Поперечность и монохроматичность электромагнитных волн .....	288
25.6. Энергия и импульс электромагнитной волны. Вектор Умова–Пойтинга .....	290
25.7. Излучение колеблющегося электрического диполя .....	292
Литература .....	294

Учебное издание

**ЕСМАН** Александр Константинович  
**ЮРКЕВИЧ** Наталья Петровна  
**САВЧУК** Галина Казимировна и др.

**ОБЩАЯ ФИЗИКА:  
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

Пособие для студентов специальностей

- 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
- 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»,
- 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»,
- 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

Редактор *Е. С. Кочерго*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 28.02.2017. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 17,43. Уч.-изд. л. 13,64. Тираж 100. Заказ 283.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.