МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра инженерной математики

И. В. Прусова
Н. А. Кондратьева
Н. К. Прихач

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.

РЯДЫ, ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Минск
БНТУ
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра инженерной математики

И. В. Прусова
Н. А. Кондратьева
Н. К. Прихач

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
РЯДЫ, ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие к решению задач
для студентов
механико-технологического факультета

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области металлургического оборудования и технологий*

Минск
БНТУ
2017

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я7
П85

Под редакцией *М. А. Князева*

Р е ц е н з е н т ы :
Д. Г. Медведев, Ю. А. Курочкин

Прусова, И. В.

П85 Высшая математика. Ряды, теория функций комплексного переменного, операционное исчисление : учебно-методическое пособие к решению задач для студентов механико-технологического факультета / И. В. Прусова, Н. А. Кондратьева, Н. К. Прихач; под ред. М. А. Князева. – Минск : БНТУ, 2017. – 154 с.
ISBN 978-985-550-812-1.

Издание содержит теоретические сведения, подробные решения типовых примеров и задач, задания для самостоятельной работы по разделам «Ряды», «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление».

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я7

ISBN 978-985-550-812-1

1. РЯДЫ

1.1. Числовые ряды и их сумма. Основные свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости. Примеры числовых рядов

Пусть задана бесконечная последовательность $\left(u_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ действительных чисел. Тогда следующее выражение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \tag{1.1}$$

называется *числовым рядом*.

Элементы числовой последовательности $\left(u_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ называются *членами* числового ряда (1.1), а число u_n – *общим* (*n-м*) *членом* числового ряда (1.1). Сумма S_n первых n членов числового ряда (1.1) называется *n-й частичной суммой* числового ряда.

Если из числового ряда (1.1) отбросить первые n членов, то останется числовой ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots$, который называется *n-м остатком числового ряда* (1.1).

Числовой ряд по определению *сходится* (называется *сходящимся*), если сходится последовательность его частичных сумм, в противном случае числовой ряд *расходится*.

Если числовой ряд (1.1) сходится, то его *суммой* S называется предел его частичных сумм и обозначается $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Замечание. В общем случае члены числового ряда могут начинаться с произвольного целого номера n_0. Тогда будем иметь числовой ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$, здесь $\left(u_n\right)_{n=n_0}^{+\infty}$ – последовательность действительных или комплексных чисел.

Замечание. Если из числового ряда удалить конечное число членов, то сходимость числового ряда не изменится.

Теорема (необходимый признак сходимости числового ряда). Если числовой ряд (1.1) сходится, то его общий член стремится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточный признак расходимости числового ряда). Если общий член числового ряда (1.1) не сходится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, то числовой ряд (1.1) расходится.

Примером расходящегося числового ряда, который удовлетворяет необходимому признаку сходимости, является *гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

Бесконечной геометрической прогрессией называется числовой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots, \qquad (1.2)$$

в котором числа b и q не равны нулю: число b называется *первым членом* бесконечной геометрической прогрессии, а число q – *знаменателем* бесконечной геометрической прогрессии.

n-я частичная сумма S_n бесконечной геометрической прогрессии равна $S_n = \frac{b\left(1-q^n\right)}{1-q}$. Так как последовательность $\left(S_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$, и при этом $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{b}{1-q}$, то бесконечная геометрическая прогрессия (1.2) сходится в том и только в том случае, когда $|q|<1$, и при этом

$$\sum_{n=1}^{+\infty} bq^{n-1} = \frac{b}{1-q}.$$

Примеры

1. Задан общий член числового ряда $u_n = \dfrac{3^n}{n!+1}$. Написать числовой ряд в развернутом виде.

Решение. Придавая последовательно значения 1, 2, 3, 4 и т. д. номеру n, получим: $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = 3$, $u_3 = \dfrac{27}{7}$, $u_4 = \dfrac{81}{25}$ и т. д. Поэтому развернутый вид числового ряда записывается следующим образом:

$$\frac{3}{2} + 3 + \frac{27}{7} + \frac{81}{25} + \ldots + \frac{3^n}{n!+1} + \ldots$$

2. Написать числовой ряд

$$\sin\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{1}{4}}{5} + \frac{\sin\frac{1}{8}}{23} + \frac{\sin\frac{1}{16}}{119} + \ldots$$

в свернутом виде.

Решение. Заданный числовой ряд можно переписать в виде

$$\frac{\sin\frac{1}{2}}{1} + \frac{\sin\frac{1}{4}}{5} + \frac{\sin\frac{1}{8}}{23} + \frac{\sin\frac{1}{16}}{119} + \ldots$$

Видно, что общий член числовой последовательности 2, 4, 8, 16, … имеет вид $v_n = 2^n$. Числовую последовательность 1, 5, 23, 119, … можно переписать в виде $2-1$, $6-1$, $24-1$, $120-1$, … или в виде $2-1$, $2\cdot 3-1$, $2\cdot 3\cdot 4-1$, $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5-1$, поэтому общий член данной числовой последовательности имеет вид $w_n = (n+1)!-1$. Значит, общий член исходного числового ряда задается формулой

$u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{2^n}}{(n+1)!-1}$, а сам числовой ряд записывается в (свернутом) виде следующим образом: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{2^n}}{(n+1)!-1}$.

3. Выяснить, сходится или расходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{5^n}$, а если сходится, то найти его сумму.

Решение. Запишем числовой ряд в развернутом виде:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$$

Видно, что числовой ряд является бесконечной геометрической прогрессией с первым членом равным $\dfrac{1}{5}$ и знаменателем тоже равным $\dfrac{1}{5}$.

Тогда его частичная сумма равна $S_n = \dfrac{\dfrac{1}{5}\left(1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)}{1-\dfrac{1}{5}} = \dfrac{1}{4}\left(1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)$.

Так как $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{4}$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{5^n}$ сходится, и его сумма равна $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{5^n}=\dfrac{1}{4}$.

4. Установить, сходится или расходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$, а если сходится, то найти его сумму.

Решение. Запишем числовой ряд в развернутом виде:

$$-\frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^3+\ldots+\left(-\frac{4}{3}\right)^n+\ldots$$

Числовой ряд является бесконечной геометрической прогрессией с первым членом равным $\left(-\frac{4}{3}\right)$ и знаменателем тоже равным $\left(-\frac{4}{3}\right)$. Тогда его частичная сумма равна $S_n=\dfrac{-\frac{4}{3}\left(1-\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)}=-\frac{4}{7}\left(1-\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right)$. Так как $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} \infty$, то есть числовая последовательность $\left(S_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ расходится, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^n$ тоже расходится.

5. Выяснить, сходится или расходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(3\left(\frac{5}{6}\right)^n-2\left(-\frac{2}{7}\right)^n\right)$, а если он сходится, то найти его сумму.

Решение. Так как числовые ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n$ являются бесконечными геометрическими прогрессиями со знаменателями по модулю меньше 1, то данные числовые ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n$ сходятся, а их суммы соответственно равны $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=6$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n=\frac{7}{9}$ (пример 3; следует обратить внимание, что нумерация номеров в бесконечных суммах начинается не с 1, а с 0).

Тогда исходный числовой ряд сходится и имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(3\left(\frac{5}{6}\right)^n-2\left(-\frac{2}{7}\right)^n\right)=3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n=3\cdot 6-2\cdot\frac{7}{9}=\frac{148}{9}.$$

6. Выяснить, сходится или расходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$, а если он сходится, то найти его сумму.

Решение. Частичная сумма данного числового ряда имеет вид $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$. Запишем данную сумму в развернутом виде и преобразуем ее:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n-4)(n-2)}+\frac{1}{(n-3)(n-1)}+\frac{1}{(n-2)n}+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{4\cdot 6}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(n-4)(n-2)}+\frac{2}{(n-3)(n-1)}+\frac{2}{(n-2)n}+\frac{2}{(n-1)(n+1)}+\frac{2}{n(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{4-2}{2\cdot 4}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{6-4}{4\cdot 6}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{(n-2)-(n-4)}{(n-4)(n-2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)-(n-3)}{(n-3)(n-1)}+\frac{n-(n-2)}{(n-2)n}+\frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)}+\frac{(n+2)-n}{n(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\right.$$

$$+\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда видно, что $S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$. Таким образом, числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ сходится, а его сумма равна $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}$.

7. Установить, сходится или расходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2-3n+5}{6n^2-n+3}$.

Решение. Общий член числового ряда имеет вид $u_n=\frac{4n^2-3n+5}{6n^2-n+3}$. Так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n+5}{6n^2-n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{6-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\neq 0,$$

то согласно достаточному признаку расходимости числового ряда числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2-3n+5}{6n^2-n+3}$ расходится.

1.2. Задачи для самостоятельного решения

Заданы общие члены u_n числовых рядов. Написать числовые ряды в развернутом виде.

1) $u_n = \dfrac{n}{2^n + 1}$.

2) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$.

3) $u_n = \dfrac{n^3}{(n+1)!}$.

4) $u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n+1}{n^2}$.

5) $u_n = \dfrac{3n-2}{n^2+2} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

6) $u_n = \dfrac{2-(-1)^n}{n!}$.

7) $u_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$.

Написать числовые ряды в свернутом виде.

8) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sqrt{6}} + \dfrac{\cos\frac{\pi}{9}}{\sqrt{9}} + \dfrac{\cos\frac{\pi}{12}}{\sqrt{12}} + \ldots$

9) $1 + 4 + 16 + 64 + \ldots$

10) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{5} + \dfrac{27}{7} + \dfrac{64}{9} + \ldots$

11) $3 + \dfrac{7}{2} + \dfrac{11}{6} + \dfrac{15}{24} + \ldots$

12) $1 + \dfrac{4}{4} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{10}{16} + \ldots$

13) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16} + \ldots$

14) $-\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{7^2} - \dfrac{1}{11^2} + \dfrac{1}{15^2} - \ldots$

15) $-2 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{10}{27} + \dfrac{16}{52} + \ldots$

Установить, сходятся или расходятся числовые ряды, а если они сходятся, то найти их сумму.

16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{4^n}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{3^{2n}}$.

18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$.

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$.

20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 5^n$.

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$.

22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n-1)(3n+5)}$.

24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+7)}$.

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(4n+1)(4n+5)}$.

26) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(4n+1)(4n+9)}$.

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}1$.

28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}0$.

Установить, сходятся или расходятся числовые ряды.

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3n+5}{4n-1}$.

30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{3n^2-n+4}{2n^2+2n-1}$.

31) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3n^3+2n-1}{5n^2+2}$.

32) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$.

Ответы

1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{17}+\ldots+\dfrac{n}{2^n+1}+\ldots$

2) $\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln 3}{9}+\dfrac{\ln 4}{16}+\ldots+\dfrac{\ln n}{n^2}+\ldots$

3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{8}+\dfrac{8}{15}+\ldots+\dfrac{n^3}{(n+1)!}+\ldots$

4) $2-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{5}{16}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}+\ldots$

5) $u_n=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{11}+\dfrac{5}{9}-\ldots+\dfrac{3n-2}{n^2+2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)+\ldots$

6) $3+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{24}+\ldots+\dfrac{2-(-1)^n}{n!}+\ldots$

7) $0+\dfrac{3}{4}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{15}{16}+\ldots+\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}+\ldots$

8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{3n}}{\sqrt{3n}}$.

9) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}4^n$.

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^3}{2n+1}$.

11) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n-1}{n!}$.

12) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-2}{n^2}$.

13) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$.

14) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(4n-1)^2}$.

15) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6n-8}{n(4n-3)}$.

16) Сходится, 1.

17) Сходится, $\frac{1}{8}$.

18) Сходится, $\frac{13}{6}$.

19) Расходится.

20) Расходится.

21) Расходится.

22) Сходится, 1.

23) Сходится, $\frac{7}{60}$.

24) Сходится, $\frac{71}{630}$.

25) Сходится, $\frac{1}{20}$.

26) Сходится, $\frac{7}{180}$.

27) Расходится.

28) Сходится, 0.

29) Расходится.

30) Расходится.

31) Расходится.

32) Расходится.

1.3. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Сходимость или расходимость числовых рядов устанавливается с помощью *признаков сходимости числовых рядов*.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ называется *знакопостоянным*, если, начиная с некоторого номера n, все его члены являются числами одного знака.

Знакопостоянный числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ называется *знакоположительным*, если, начиная с некоторого номера n, все его члены являются положительными числами.

Знакопостоянный числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ называется *знакоотрицательным*, если, начиная с некоторого номера n, все его члены являются отрицательными числами.

Так как при умножении знакоотрицательного числового ряда на (-1) получается знакоположительный числовой ряд, то исследование на сходимость знакоотрицательных числовых рядов сводится к исследованию на сходимость знакоположительных числовых рядов.

Теорема (***признак сравнения***). Пусть даны два знакоположительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Если, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство $u_n \le v_n$, то из сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ следует сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, а значит из расходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ следует расходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Теорема (***предельный признак сравнения***). Пусть даны два знакоположительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, и пусть существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$. Если $0 < A < +\infty$, то числовые ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Следствие. Если числовые ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ знакоположительные и последовательности $\left(u_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ и $\left(v_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ эквивалентные, то числовые ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся (напомним, что эквивалентными последовательностями $\left(u_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ и $\left(v_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ называются последовательности, для которых выполняется равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$).

***Теорема* (*признак Даламбера*).** Пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ знакоположительный. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то числовой ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Замечание. Если в признаке Даламбера $l = 1$, то числовой ряд может как сходиться, так и расходиться.

***Теорема* (*радикальный признак Коши*).** Пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ знакоположительный. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то числовой ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Замечание. Если в радикальном признаке Коши $l = 1$, то, как и в признаке Даламбера, числовой ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема (интегральный признак Коши). Если члены знакоположительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1, +\infty)$ функции $f(x)$ так, что

$$u_1 = f(1),\ u_2 = f(2),\ \ldots,\ u_n = f(n),\ \ldots,$$

то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{1.3}$$

где $p > 0$ и $p \neq 1$, называется *обобщенным гармоническим рядом*. По интегральному признаку Коши обобщенный гармонический ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Числовой ряд (1.3) расходится и при $p \leq 0$, согласно достаточному признаку расходимости числового ряда.

Примеры

1. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^4}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^9}}.$$

Решение. Данные числовые ряды являются обобщенными гармоническими. Так как в а) $p = 5 > 1$, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$ сходится; так как в б) $p = \frac{4}{7} \leq 1$, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^4}}$ расходится; так как в в) $p = \frac{9}{4} > 1$, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^9}}$ сходится.

2. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + 5}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n^5 + 1}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2} + \sqrt[4]{n^3 + 7}}{\sqrt[3]{n^7 + 3} + n + \sqrt{n^3 - 1}}.$$

Решение. Исследование сходимости числовых рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, в которых общий член является частным двух иррациональных выражений, осуществляется с использованием предельного признака сравнения с числовым рядом вида $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, предварительно представив числитель и знаменатель u_n в виде произведения двух множителей: первый имеет вид n^p, а второй стремится к конечному числу не равному 0.

а) Общий член числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+5}$ имеет вид $u_n=\frac{1}{n^3+5}$. Преобразуем его: $u_n=\frac{1}{n^3+5}=\frac{1}{n^3\left(1+\frac{5}{n^3}\right)}$. Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$, который является обобщенным гармоническим рядом с $p=3>1$. Значит, он сходится. Используя предельный признак сравнения, имеем $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{5}{n^3}}=1\in(0,+\infty)$, поэтому и числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+5}$ сходится.

б) Общий член числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n^5+1}}$ имеет вид $u_n=\frac{1}{\sqrt[6]{n^5+1}}$. Преобразуем его: $u_n=\frac{1}{\sqrt[6]{n^5+1}}=\frac{1}{n^{5/6}\sqrt[6]{1+\frac{1}{n^5}}}$. Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{5/6}}$, который является обобщенным гармоническим рядом с $p=\frac{5}{6}\le 1$. Значит, он расходится. Используя предельный признак сравнения, имеем $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[6]{1+\dfrac{1}{n^5}}}=1\in(0,\ +\infty)$, поэтому и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3+5}$ расходится.

в) Общий член числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+2}+\sqrt[4]{n^3+7}}{\sqrt[3]{n^7+3}+n+\sqrt{n^3-1}}$ имеет вид $u_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^4+2}+\sqrt[4]{n^3+7}}{\sqrt[3]{n^7+3}+n+\sqrt{n^3-1}}$. Преобразуем его:

$$u_n=\frac{\sqrt[3]{n^4+2}+\sqrt[4]{n^3+7}}{\sqrt[3]{n^7+3}+n+\sqrt{n^3-1}}=\frac{n^{4/3}\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^4}}+n^{3/4}\sqrt[4]{1+\dfrac{7}{n^3}}}{n^{7/3}\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^7}}+n+n^{3/2}\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}}}=$$

$$=\frac{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^4}}+n^{3/4-4/3}\sqrt[4]{1+\dfrac{7}{n^3}}\right)}{n^{7/3}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^7}}+n^{1-7/3}+n^{3/2-7/3}\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}}\right)}=$$

$$=\frac{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^4}}+n^{-7/12}\sqrt[4]{1+\dfrac{7}{n^3}}\right)}{n^{7/3}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^7}}+n^{-4/3}+n^{-5/6}\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^4}}+\dfrac{1}{\sqrt[12]{n^7}}\sqrt[4]{1+\dfrac{7}{n^3}}}{n\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^7}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}+\dfrac{1}{\sqrt[6]{n^5}}\sqrt{1-\dfrac{1}{n^3}}\right)}.$$

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, который расходится, так как является гармоническим рядом. Используя предельный признак сравнения, имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^4}} + \frac{1}{\sqrt[12]{n^7}} \sqrt[4]{1+\frac{7}{n^3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} + \frac{1}{\sqrt[6]{n^5}} \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = 1 \in (0,\ +\infty),$$

поэтому и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+2} + \sqrt[4]{n^3+7}}{\sqrt[3]{n^7+3} + n + \sqrt{n^3-1}}$ расходится.

3. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$$

Решение. Для решения данных примеров применим предельный признак сравнения числовых рядов.

а) Так как $\frac{1}{\sqrt[5]{n^3}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, то $\sin \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$, а значит, и $\sin^2 \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[5]{n^6}} = v_n$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^6}}$ является обобщенным гармоническим рядом с $p = \frac{6}{5} > 1$, то он сходится. Значит, по следствию из предельного признака сравнения числовых рядов сходится и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$.

б) Так как $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, то $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$, а значит, и $\operatorname{arctg}^3 \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^3 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}} = v_n$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ является обобщенным гармоническим рядом с $p = \dfrac{3}{4} \le 1$, то он расходится. Значит, по следствию из предельного признака сравнения числовых рядов расходится и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}^3 \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

4. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}\left(\cos^2 n + 2\right)}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{\sin^4 n + 5}}{\sqrt[3]{n^8}}.$$

Решение. Для решения данных примеров применим признак сравнения числовых рядов.

а) Так как $\cos^2 n \le 1$, то $\cos^2 n + 2 \le 3$, значит, $\sqrt[5]{n^3}\left(\cos^2 n + 2\right) \le 3\sqrt[5]{n^3}$, поэтому $\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}\left(\cos^2 n + 2\right)} \ge \dfrac{1}{3\sqrt[5]{n^3}} = v_n$.

Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$ является обобщенным гармоническим рядом с $p = \dfrac{3}{5} \le 1$, то он расходится. Значит, по признаку сравнения числовых рядов числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}\left(\cos^2 n + 2\right)}$ тоже расходится.

б) Так как $\sin^4 n \le 1$, то $\sin^4 n + 5 \le 6$, значит, $\sqrt[3]{\sin^4 n + 5} \le \sqrt[3]{6}$, поэтому $\dfrac{\sqrt[3]{\sin^4 n + 5}}{\sqrt[3]{n^8}} \le \dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{n^8}} = v_n$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{n^8}} = \sqrt[3]{6} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^8}}$ сходится (числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^8}}$ является обобщенным гармоническим рядом с $p = \dfrac{8}{3} > 1$), то по признаку сравнения числовых рядов числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{\sin^4 n + 5}}{\sqrt[3]{n^8}}$ тоже сходится.

5. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{n!}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2}{n^3 + n - 1}.$$

Решение. Для решения данных примеров применим признак Даламбера.

а) Так как $u_n = \dfrac{2^n + 1}{n!}$, то $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} + 1}{(n+1)!}$, значит,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2^{n+1}+1\right)n!}{(n+1)!\cdot\left(2^n+1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{2 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} \right) = 0 < 1,$$

поэтому числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n + 1}{n!}$ сходится.

б) Так как $u_n = \dfrac{3^n + 2}{n^3 + n - 1}$, то $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1} + 2}{(n+1)^3 + n}$, значит,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3^{n+1}+2\right)\left(n^3+n-1\right)}{\left((n+1)^3+n\right)\left(3^n+2\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+n-1}{(n+1)^3+n}\cdot\frac{3^{n+1}+2}{3^n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{3+\frac{2}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{1}\right) = 3 > 1,$$

поэтому числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n + 2}{n^3 + n - 1}$ расходится.

6. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\left(2n^2 + n - 2\right)^n}$.

Решение. Применим радикальный признак сходимости Коши числовых рядов. Так как $u_n = \dfrac{1}{\left(2n^2 + n - 2\right)^n}$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2 + n - 2} = 0 < 1,$$

поэтому числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\left(2n^2 + n - 2\right)^n}$ сходится.

7. Исследовать сходимость числовых рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[4]{\ln n}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}$.

Решение. Для решения данных примеров применим интегральный признак сходимости Коши числовых рядов.

а) Функция $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt[4]{\ln x}}$ является непрерывной и монотонно убывающей на промежутке $[2,+\infty)$. Так как

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[4]{\ln x}}\mathrm{d}x=\lim_{B\to+\infty}\int_2^{B}\frac{1}{x\sqrt[4]{\ln x}}\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\int_2^{B}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt[4]{\ln x}}=\begin{bmatrix} t=\ln x, \\ x_1=2\Rightarrow t_1=\ln 2,\ x_2=B\Rightarrow t_2=\ln B\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[4]{t}}=\lim_{B\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B}t^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\lim_{B\to+\infty}t^{\frac{3}{4}}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln B}=$$

$$=\frac{4}{3}\lim_{B\to+\infty}\left((\ln B)^{\frac{3}{4}}-(\ln 2)^{\frac{3}{4}}\right)=+\infty,$$

то и числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[4]{\ln n}}$ тоже расходится.

б) Функция $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln^4 x}}$ является непрерывной и монотонно убывающей на промежутке $[2,\ +\infty)$. Так как

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln^4 x}}\mathrm{d}x=\lim_{B\to+\infty}\int_2^{B}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln^4 x}}\mathrm{d}x=\lim_{B\to+\infty}\int_2^{B}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt[3]{\ln^4 x}}=$$

$$=\begin{bmatrix} t=\ln x, \\ x_1=2\Rightarrow t_1=\ln 2,\ x_2=B\Rightarrow t_2=\ln B\end{bmatrix}=\lim_{B\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t^4}}=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B}t^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}t=-3\lim_{B\to+\infty}t^{-\frac{1}{3}}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln B}=$$

$$=-3\lim_{B\to+\infty}\left(\left(\ln B\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\ln 2\right)^{-\frac{1}{3}}\right)=-3\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\ln B}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 2}}\right)=\frac{3}{\sqrt[3]{\ln 2}},$$

то и числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}$ тоже сходится.

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Установить сходятся или расходятся следующие числовые ряды.

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-4}{3n+2}$.

2) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{4n^2-3n+1}{2n^2-3n+1}$.

3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n^3-2}{n^2-1}$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3n+11}-\sqrt{3n+5}}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$.

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2}$.

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-2}{n^2+n+1}$.

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+n-1}{1+n^5}$.

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sqrt{n}+3}{n\sqrt{n}+5}$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n+\sqrt[4]{n}}$.

14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}}$.

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{n}+\sqrt[6]{n+1}+4}{n\sqrt[3]{n}-2}$.

16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{tg}^4\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\arcsin^3\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}}$.

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}^2\frac{1}{n^3}$.

20) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln\left(\frac{n+5}{n+3}\right)$.

21) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.

22) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{n}+6}{\sqrt{n}+5}\right)$.

23) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln^3\left(\frac{\sqrt[3]{n}+2}{\sqrt[3]{n}+3}\right)$.

24) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln^2\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}+1}{\sqrt[3]{n^2}+2}\right)$.

25) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$.

26) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln\ln n}$.

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^3 n+3}{n}$.

28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt{\sin n+1}}$.

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}\left(\sin^5 n+4\right)}$.

30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{\cos^n n+1}}{\sqrt[3]{n^4+1}}$.

31) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

32) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

33) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{\ln^5 n}}$.

34) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^5}$.

35) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4^n}$.

36) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$.

37) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{n!}$.

38) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!}$.

39) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{n^2-n+1}$.

40) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{4^{4n}}{(3n-4)!}$.

41) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)3^{n-1}}$.

42) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-n+1}{2^n}$.

43) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^5-n^3+1}$.

44) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{4n}}{(2n)!}$.

45) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n\cdot 5^n}}$.

46) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-2}}{(n+1)4^{n-1}(3n-2)}$.

47) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$.

48) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5\cdot 8\cdot 11\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$.

49) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\ln^n n}$.

50) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n}{(n+1)^n}$.

51) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n}{5}\right)^n$.

52) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3n+4}{2n-1}\right)^n$.

53) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{4n-3}{5n-2}\right)^n$.

54) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{3n^2+5}{2n^2+3}\right)^{n^2}$.

55) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\arcsin^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

56) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{n-1}}$.

57) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^n}$.

58) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$.

59) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{-n^2}$.

60) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{n^2}$.

61) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{7}{n}\right)^{-n^2}$.

62) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{6}{n}\right)^{\sqrt{n^5}}$.

63) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3+2(-1)^n}{5-3(-1)^{n-1}}$.

Ответы

1) Расходится.
2) Расходится.
3) Расходится.
4) Расходится.
5) Сходится.
6) Расходится.
7) Сходится.
8) Сходится.
9) Расходится.
10) Сходится.
11) Сходится.
12) Расходится.
13) Расходится.
14) Расходится.
15) Сходится.
16) Расходится.
17) Расходится.
18) Сходится.
19) Сходится.
20) Расходится.
21) Сходится.
22) Расходится.
23) Расходится.
24) Сходится.
25) Расходится.
26) Расходится.
27) Расходится.
28) Расходится.
29) Сходится.
30) Сходится.
31) Расходится.
32) Расходится.
33) Сходится.
34) Расходится.
35) Сходится.
36) Расходится.
37) Сходится.
38) Сходится.
39) Расходится.
40) Сходится.
41) Сходится.
42) Сходится.
43) Расходится.
44) Сходится.

45) Сходится.	50) Сходится.	55) Сходится.	60) Сходится.
46) Сходится.	51) Расходится.	56) Сходится.	61) Расходится.
47) Сходится.	52) Расходится.	57) Сходится.	62) Сходится.
48) Расходится.	53) Сходится.	58) Расходится.	63) Расходится.
49) Сходится.	54) Расходится.	59) Сходится.	

1.5. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется *знакопеременным*, если он содержит как бесконечное число положительных, так и бесконечное число отрицательных членов.

Теорема. Пусть задан знакопеременный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Тогда, если сходится числовой ряд, составленный из модулей членов данного числового ряда, то есть сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$, то сходится и сам знакопеременный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

В данном случае знакопеременный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Знакопеременный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд, составленный из модулей данного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, то есть сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$.

Значит, из абсолютной сходимости числового ряда следует его сходимость.

Если же знакопеременный числовой ряд абсолютно не сходится, то он может как сходиться, так и расходиться.

Знакопеременный числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но числовой ряд, составленный из его модулей, расходится, то есть расходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$.

Исследовать сходимость знакопеременного числового ряда – определить, сходится он абсолютно, условно или расходится.

Для проверки абсолютной сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ можно использовать признак сходимости Даламбера и радикальный признак сходимости Коши. Только в этих случаях при вычислении пределов вместо общего члена u_n числового ряда надо брать его абсолютное значение $|u_n|$. По признаку Даламбера вычисляется предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l$: если $l < 1$, то числовой ряд абсолютно сходится; если $l > 1$, то числовой ряд расходится; если $l = 1$, то числовой ряд может как абсолютно сходиться, так и условно сходиться и расходиться. По радикальному признаку Коши вычисляется предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$: если $l < 1$, то числовой ряд абсолютно сходится; если $l > 1$, то числовой ряд расходится; если $l = 1$, то числовой ряд может как абсолютно сходиться, так и условно сходиться и расходиться.

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. В частных случаях, когда знакопеременный числовой ряд является знакочередующимся, в большинстве задач удается установить и его условную сходимость.

Знакопеременный числовой ряд называется *знакочередующимся*, если его соседние члены (начиная с некоторого номера) имеют противоположные знаки. В частности, знакочередующийся числовой ряд может иметь один из следующих видов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots \qquad (1.4)$$

или

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots + (-1)^{n}u_n + \ldots, \qquad (1.5)$$

где $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ – числовая последовательность положительных чисел.

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости.

***Теорема* (*признак Лейбница*).** Если общий член знакочередующегося ряда (1.4) (или (1.5)) стремится к нулю и последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает (с некоторого номера), то есть $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq \ldots$, то знакочередующийся ряд (1.4) (или (1.5)) сходится, а его сумма S удовлетворяет неравенству $0 < S < u_1$ (или $-u_1 < S < 0$).

Числовые ряды, удовлетворяющие признаку Лейбница, называются числовыми рядами *лейбницевского типа* (или *рядами Лейбница*).

Чтобы приближенно вычислить сумму сходящегося знакочередующегося ряда с заданной абсолютной погрешностью ε, надо заменить его сумму S такой его частичной суммой S_n ($S \approx S_n$), чтобы $u_{n+1} \leq \varepsilon$.

Примеры

1. Исследовать сходимость числового ряда (абсолютно сходится, условно сходится или расходится) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{2n+3}{6n+7}$.

Решение. Данный числовой ряд является знакочередующимся. Его общий член задается формулой $u_n = (-1)^n \dfrac{2n+3}{6n+7}$. Так как

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{6n+7} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{6+\frac{7}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

то числовой ряд расходится (согласно достаточному признаку расходимости числового ряда).

2. Исследовать сходимость числового ряда (абсолютно сходится, условно сходится или расходится) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 3n}{\sqrt[3]{n^4+3}}$.

Решение. Данный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 3n}{\sqrt[3]{n^4+3}}$ является знакопеременным. Исследуем его на абсолютную сходимость. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|\cos 3n|}{\sqrt[3]{n^4+3}}$. Так как

$$|u_n| = \frac{|\cos 3n|}{\sqrt[3]{n^4+3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+3}} = v_n,$$

то из сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+3}}$ следует сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ (по признаку сравнения числовых рядов). Применим предельный признак сравнения числовых рядов к рядам $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$. Так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{w_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt[3]{n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{n^4}{n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{1}{n^4}}} = 1 \in (0,\ +\infty)$$

и числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ сходится (он является обобщенным гармоническим рядом с $p=\frac{4}{3}>1$), то сходится и числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Значит, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|u_n\right|$, а поэтому абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 3n}{\sqrt[3]{n^4+3}}$.

3. Исследовать сходимость числового ряда (абсолютно сходится, условно сходится или расходится) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n+1}{2^n(n+3)}$.

Решение. Данный числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n+1}{2^n(n+3)}$ является знакочередующимся. Так как при $n\to+\infty$ $u_n\to 0$ и монотонно убывает, то по признаку Лейбница он сходится. Исследуем его на абсолютную сходимость. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|u_n\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+1}{2^n(n+3)}$. Используя предельный признак сравнения числовых рядов, сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|u_n\right|}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(2^n+1\right)n}{2^n(n+3)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\cdot\frac{n}{n+3}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{1+\frac{3}{n}}\right)=1\in(0,\ +\infty)$$

и числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ расходится (он является гармоническим рядом), то расходится и числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|u_n\right|$, значит, числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n+1}{2^n(n+3)}$ условно сходится.

4. Исследовать сходимость числового ряда (абсолютно сходится, условно сходится или расходится) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$.

Решение. Данный числовой ряд является знакочередующимся. Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{4^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ сходится (либо по признаку Даламбера, либо по радикальному признаку Коши, либо данный числовой ряд является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем по модулю меньшим 1), следует абсолютная сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$.

5. Вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{(n+1)!}$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение. Данный числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{(n+1)!}$ является числовым рядом лейбницевского типа, значит, он сходится и обладает суммой S.

Так как $\left|u_1\right| = 2 > \varepsilon$, $\left|u_2\right| = 2 > \varepsilon$, $\left|u_3\right| \approx 1,333 > \varepsilon$, $\left|u_4\right| \approx 0,667 > \varepsilon$, $\left|u_5\right| \approx 0,267 > \varepsilon$, $\left|u_6\right| \approx 0,089 > \varepsilon$, $\left|u_7\right| \approx 0,025 > \varepsilon$ и $\left|u_8\right| \approx 0,006 \le \varepsilon$, то $S \approx S_7$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-2}$, где

$$S_7 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \approx 0{,}863 \approx 0{,}86.$$

В итоге получено, что $S \approx 0{,}86$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

1.6. Задачи для самостоятельного решения

Исследовать сходимость числовых рядов (абсолютно сходятся, условно сходятся или расходятся).

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n}$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n \cdot 2^n}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n(n-1)}}{n!}$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin 2n}{\sqrt[4]{n^5+1}}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n+2)}{n^3-n+1}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{4n-3}{5n+1}$.

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+3n-1}$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt[3]{n^2-n+1}}{\sqrt[4]{n^6-2n^2+1}}$.

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n^3}-1}{\sqrt[6]{n^{11}}+2}$.

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{5n-4}$.

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n+1}}$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{4^n}$.

14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 3^n}{n^n}$.

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 5^n}{6^n}$.

16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{n^2+n+2}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$.

18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[4]{\ln^3 n}}$.

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[5]{\ln^6 n}}$.

20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$.

22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{5^n}{n!}$.

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n-1)!}{4^{n-2}}$.

24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^3-n+1}{(n-1)!}$.

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^2+1}$.

26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(3^n+2)\sqrt{n^3+n-1}}$.

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4^n+3}{(4^n+1)\left(\sqrt[3]{n^2}+5\right)}$.

28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^n}$.

Вычислить сумму числовых рядов с абсолютной погрешностью $\varepsilon=10^{-2}$.

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n^2+2n+4}$.

30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+5}$.

31) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n+1}{n\cdot 3^n}$.

32) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

33) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt[3]{n}+4}{n^4+1}$.

Ответы

1) Абсолютно сходится. 2) Абсолютно сходится. 3) Абсолютно сходится. 4) Абсолютно сходится. 5) Абсолютно сходится. 6) Расходится. 7) Условно сходится. 8) Условно сходится. 9) Абсолютно сходится. 10) Условно сходится. 11) Условно сходится. 12) Абсолютно сходится. 13) Абсолютно сходится. 14) Абсолютно сходится. 15) Абсолютно сходится. 16) Расходится. 17) Условно сходится. 18) Условно сходится. 19) Абсолютно сходится. 20) Условно сходится. 21) Абсолютно сходится. 22) Абсолютно сходится. 23) Расходится. 24) Абсолютно сходится. 25) Расходится. 26) Сходится. 27) Расходится. 28) Сходится. 29) 0,08. 30) 0,11. 31) 1,29. 32) 0,62. 33) 2,24.

1.7. Функциональные и степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

Функциональные ряды. Пусть задана последовательность функций действительного аргумента $\left(u_n(x)\right)_{n=1}^{+\infty}$. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \qquad (1.6)$$

называется *функциональным рядом*, а $u_n(x)$ – *общим* (*n-м*) *членом* функционального ряда.

Если в функциональный ряд (1.6) вместо x подставить некоторое значение x_0, которое входит в область определения каждой функции $u_n(x)$, начиная с некоторого номера n, то получится числовой ряд.

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ называется *n-м остатком функционального ряда* (1.6).

Замечание. Так же как и для числовых рядов нумерация членов функционального ряда может начинаться не с 1, а с любого целого числа.

Значение x_0 переменной x, при подстановке которой в функциональный ряд получается сходящийся числовой ряд, называется *точкой сходимости* функционального ряда, в противном случае точка x_0 называется *точкой расходимости* функционального ряда.

Множество точек, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Признак Вейерштрасса. Если члены функционального ряда (1.6), начиная с некоторого номера n, удовлетворяют в каждой точке x некоторого множества M действительных чисел неравенству $\left|u_n(x)\right| \le c_n$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} c_k$ сходится, то в каждой точке x множества M сходится и функциональный ряд (1.6).

Степенные ряды. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) +$$

$$+ a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \qquad (1.7)$$

называется *степенным рядом*. Здесь a_n и x_0 являются действительными числами. Числа a_n также называются *коэффициентами степенного ряда*.

Ясно, что степенной ряд сходится при $x = x_0$. Точка $x = x_0$ называется *центром сходимости* степенного ряда.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд сходится при таком $x = x^*$, что $x^* \neq x_0$, то он сходится и при всех таких x, что $|x - x_0| < |x^* - x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд расходится при таком $x = x^*$, что $x^* \neq x_0$, то он расходится и при всех таких x, что $|x - x_0| > |x^* - x_0|$.

Область сходимости степенного ряда может быть одного из трех следующих видов.

1) Областью сходимости степенного ряда является только ее центр сходимости, то есть точка x_0.

2) Областью сходимости степенного ряда является интервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$, $R > 0$, который называется *интервалом сходимости* степенного ряда, концы которого могут как входить в область сходимости, так и не входить. Значит, степенной ряд заведомо расходится вне отрезка $[x_0 - R,\ x_0 + R]$. В данном случае число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

3) Областью сходимости степенного ряда является множество всех действительных чисел $(-\infty,\ +\infty)$.

В случае 1) считается $R = 0$, в случае 3) – $R = +\infty$.

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислять либо по формуле Даламбера, либо по радикальной формуле Коши. По формуле Даламбера

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \qquad (1.8)$$

По радикальной формуле Коши

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (1.9)$$

Замечание. Если степенной ряд содержит бесконечное число коэффициентов равных нулю и бесконечное число коэффициентов не равных нулю, то область сходимости степенного ряда определяется без нахождения его радиуса сходимости, а используя известные признаки сходимости и расходимости числовых рядов (см. пример 8).

Основные свойства степенных рядов.

1) Сумма $S(x)$ степенного ряда (1.7) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$.

2) При умножении почленно степенного ряда (1.7) на число, отличное от 0, его область сходимости не изменится.

3) При сложении, вычитании и умножении степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n(x-x_0)^n$ с радиусами сходимости соответственно равными R_1 и R_2 получаются степенные ряды, радиусы сходимости R которых равны меньшему из радиусов сходимости первоначальных степенных рядов, то есть $R=\min\{R_1,\ R_2\}$.

4) Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать: то есть для степенного ряда

$$S(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+$$
$$+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \qquad (1.10)$$

при $x\in\left(x_0-R,\ x_0+R\right)$ выполняется равенство

$$S'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+n(x-x_0)^{n-1}+\ldots$$

5) Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри его интервала сходимости: то есть для степенного ряда (1.10) при $x_0-R<a<b<x_0+R$ выполняется равенство

$$\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x=a_0\int\limits_a^b \mathrm{d}x+a_1\int\limits_a^b (x-x_0)\mathrm{d}x+a_2\int\limits_a^b (x-x_0)^2\,\mathrm{d}x+$$
$$+a_3\int\limits_a^b (x-x_0)^3\,\mathrm{d}x+\ldots+a_n\int\limits_a^b (x-x_0)^n\,\mathrm{d}x+\ldots$$

Разложение функций в степенные ряды (ряды Тейлора и Маклорена). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $\left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)$ точки x_0 (здесь $\varepsilon>0$), в каждой точке которой она имеет производную любого порядка.

Поставим в соответствие функции $f(x)$ степенной ряд

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{1.11}$$

Степенной ряд правой части формулы (1.11) называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, и говорят, что функция $f(x)$ *разложена в ряд Тейлора в окрестности точки* x_0 либо *разложена по степеням* $x-x_0$.

Если функция $f(x)$ разложена в ряд Тейлора в окрестности точки 0 ($x_0=0$), то получается ряд Маклорена функции $f(x)$.

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$

Теорема. Для того чтобы ряд Тейлора (1.11) функции $f(x)$ сходился к функции $f(x)$ в точке $x = x^*$, то есть $f(x^*) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x^* - x_0)^n$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаток $R_n(x^*)$ стремился к нулю при $n \to +\infty$, то есть чтобы $\lim_{n \to +\infty} R_n(x^*) = 0.$

Остаток ряда Тейлора можно записать *в форме Лагранжа*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (c - x_0)^{n+1}, \tag{1.12}$$

здесь $c \in (x,\ x_0)$, если $x < x_0$, и $c \in (x_0,\ x)$, если $x > x_0$, и для различных x и n значение c может меняться, то есть значение c зависит от значений x и n.

Теорема. Если модули всех производных функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом M, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора (1.11) функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$, то есть имеет место равенство $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in (-\infty,\ +\infty);$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, +\infty);$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, +\infty);$

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +$

$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + \ldots,$

$$x \in \begin{cases} [-1, 1], & \text{если } \alpha \geq 0; \\ (-1, 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0; \\ (-1, 1), & \text{если } \alpha \leq -1; \end{cases}$$

5) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \ x \in (-1, 1);$

6) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \ x \in (-1, 1);$

7) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \ x \in (-1, 1];$

8) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \ x \in [-1, 1];$

9) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots +$

$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \ x \in [-1, 1];$

10) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, +\infty);$

11) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, +\infty).$

Некоторые приложения степенных рядов. Степенные ряды (ряды Тейлора и Маклорена) могут применяться:

1) для приближенного вычисления значений функций;

2) приближенного вычисления определенных интегралов;

3) приближенного решения дифференциальных уравнений.

Приближенное вычисление значений функций. Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x^*$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.

Если функция $f(x)$ представлена степенным рядом

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

в некотором промежутке M и $x^* \in M$, то точное значение $f(x^*)$ равно сумме этого степенного ряда при $x = x^*$, то есть

$$f(x^*) = a_0 + a_1(x^* - x_0) + a_2(x^* - x_0)^2 + \ldots + a_n(x^* - x_0)^n + \ldots,$$

а приближенное значение – частичной сумме $S_n(x^*)$, то есть

$$f(x^*) \approx S_n(x^*) = a_0 + a_1(x^* - x_0) + \\ + a_2(x^* - x_0)^2 + \ldots + a_n(x^* - x_0)^n. \qquad (1.13)$$

Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка числового ряда, то есть $\left| f(x^*) - S_n(x^*) \right| = \left| R_n(x^*) \right|$.

Таким образом, приближение (1.13) будет верно с абсолютной погрешностью ε, когда будет подобран такой номер n, что $\left| R_n(x^*) \right| < \varepsilon$.

Для числовых рядов, которые являются рядами лейбницевского типа, верно

$$\left|R_n\left(x^*\right)\right| = \left|u_{n+1}\left(x^*\right) + u_{n+2}\left(x^*\right) + \ldots + u_{n+k}\left(x^*\right) + \ldots\right| < \left|u_{n+1}\left(x^*\right)\right|.$$

В остальных случаях (числовой ряд знакопостоянный или знакопеременный) поступают следующим образом: составляют ряд из модулей членов данного числового ряда и для него стараются подобрать числовой ряд с бо́льшими членами (обычно это сходящийся ряд бесконечной геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. И в качестве оценки сверху $\left|R_n\left(x^*\right)\right|$ берут соответствующую величину остатка нового числового ряда.

Приближенное вычисление определенных интегралов. Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f\left(x\right)$ можно разложить в ряд по степеням $x - x_0$ и интервал сходимости степенного ряда $\left(x_0 - R,\ x_0 + R\right)$ включает в себя отрезок $\left[a,\ b\right]$ ($x_0 - R < a < b < x_0 + R$), то для приближенного вычисления заданного определенного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования степенных рядов. Абсолютную погрешность вычислений определяют так же, как и при приближенном вычислении значений функций.

Приближенное решение дифференциальных уравнений. Рассмотрим два способа решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Здесь неизвестной функцией является функция $y = y\left(x\right)$. Также считается, что для дифференциальных уравнений с начальными условиями выполняются достаточные условия существования и единственности задачи Коши в некоторой окрестности точки x_0, в которой и задаются начальные условия.

Способ последовательного дифференцирования. Пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right) \qquad (1.14)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y'_0,\quad y''(x_0) = y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (1.15)$$

Решение дифференциального уравнения ищем в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \\ &+ \frac{y^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2} + \ldots + \frac{y^{(n+k)}(x_0)}{(n+k)!}(x - x_0)^{n+k} + \ldots \end{aligned} \qquad (1.16)$$

Первые n коэффициентов ряда Тейлора находятся, используя начальные условия (1.15) дифференциального уравнения. Следующие коэффициенты – путем последовательного дифференцирования дифференциального уравнения (1.14) и вычисления полученных производных при $x = x_0$. Найденные значения производных подставляются в ряд Тейлора (1.16), который представляет искомое частное решение дифференциального уравнения (1.14) при начальных условиях (1.15) для тех значений x, при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения.

Способ неопределенных коэффициентов. Этот способ приближенного решения дифференциальных уравнений наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_2(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = f(x) \qquad (1.17)$$

с начальными условиями

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y'_0,\ \ y''(x_0)=y''_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \quad (1.18)$$

При этом коэффициенты $p_i(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды Тейлора по степеням $x-x_0$ и все эти ряды сходятся к своим функциям в некотором интервале $(x_0-R,\ x_0+R)$. Искомое решение $y=y(x)$ дифференциального уравнения (1.17)–(1.18) ищем в виде степенного ряда

$$y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots+$$
$$+c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+c_{n+2}(x-x_0)^{n+2}+\ldots+c_{n+k}(x-x_0)^{n+k}+\ldots \quad (1.19)$$

с неопределенными коэффициентами c_i.

Используя начальное условие $y(x_0)=y_0$ дифференциального уравнения, имеем $c_0=y_0$. Дифференцируя степенной ряд (1.19) $n-1$ раз и используя начальные условия (1.18) дифференциального уравнения (1.17), находятся коэффициенты c_1, c_2, …, c_{n-1}. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем степенной ряд (1.19) n раз и подставляем выражения для функции y и ее производных в уравнение (1.17), заменяя в нем $p_i(x)$ и $f(x)$ их разложениями в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$. В результате получаем тождество. Приравнивая коэффициенты при соответствующих показателях независимой переменной x, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Решая данную систему, находим остальные коэффициенты степенного ряда (1.19). Построенный степенной ряд сходится в том же интервале $(x_0-R,\ x_0+R)$ и служит решением дифференциального уравнения (1.17)–(1.18).

Примеры

1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\right)^n$ и его сумму.

Решение. Данный функциональный ряд является бесконечной геометрической прогрессией с первым членом равным $b=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ и знаменателем тоже равным $q=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$. Ряд бесконечной геометрической прогрессии сходится тогда и только тогда, когда $|q|=\left|\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\right|<1.$

Решив данное неравенство, получим $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{13}{2}},\ \sqrt{\dfrac{13}{2}}\right)$ – область сходимости функционального ряда. Сумма функционального ряда равна

$$S=\frac{b}{1-q}=\frac{1}{5}\left(4-x^2\right).$$

2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^3\left(n^2x\right)}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Решение. Применим признак Вейерштрасса. При любом действительном значении x верно неравенство $\left|\sin^3\left(n^2x\right)\right|\le 1,$ значит, при любом действительном значении x верно и неравенство $\left|u_n(x)\right|=\left|\dfrac{\sin^3\left(n^2x\right)}{\sqrt{n^3+1}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}=c_n.$ Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$

сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^3\left(n^2x\right)}{\sqrt{n^3+1}}$ сходится при любом действительном значении x ($x\in\left(-\infty,\ +\infty\right)$).

3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{xn^5+\left(x-1\right)\sqrt[4]{n}}.$$

Решение. Пусть $x\neq 0$. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5}$ сходится, так как является обобщенным гармоническим рядом с $p=5>1$. К рядам $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{xn^5+\left(x-1\right)\sqrt[4]{n}}$ и $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5}$ применяется предельный признак сравнения рядов. Значит, при любом $x\neq 0$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{xn^5+\left(x-1\right)\sqrt[4]{n}}$ сходится.

При $x=0$ функциональный ряд превращается в числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, который является обобщенным гармоническим рядом с $p=\frac{1}{4}\leq 1$, а поэтому он расходится.

Значит, областью сходимостью функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{xn^5+\left(x-1\right)\sqrt[4]{n}}$ является множество $x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$.

4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(n^2+1\right)x^n}{\left(n^3+2\right)7^n}$.

Решение. Точка $x_0=0$ является центром сходимости степенного ряда. Коэффициентами степенного ряда являются числа $a_n = \dfrac{n^2+1}{\left(n^3+2\right)7^n}$. Радиус сходимости степенного ряда вычислим по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{\left(n^3+2\right)7^n}\frac{\left((n+1)^3+2\right)7^{n+1}}{(n+1)^2+1}\right) =$$

$$= 7\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\frac{\left((n+1)^3+2\right)}{\left(n^3+2\right)}\right) = 7.$$

Поэтому $\left(x_0-R,\, x_0+R\right)=\left(-7,\, 7\right)$ – интервал сходимости степенного ряда. Проверим сходимость степенного ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-7$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(n^2+1\right)x^n}{\left(n^3+2\right)7^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{n^2+1}{n^3+2}$ является числовым рядом лейбницевского типа, значит, он сходится.

При $x=7$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(n^2+1\right)x^n}{\left(n^3+2\right)7^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+2}$ является числовым рядом, который эквивалентен гармоническому ряду, значит, он расходится.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является полусегмент $\left[-7,\, 7\right)$.

5. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\frac{(x+3)^n}{4^n}.$$

Решение. Точка $x_0 = -3$ является центром сходимости степенного ряда. Коэффициентами степенного ряда являются числа $a_n = \frac{1}{4^n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$. Радиус сходимости степенного ряда вычислим по радикальной формуле Коши:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n} = 4\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-n} =$$

$$= 4\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}}\right)^2 = 4e^2.$$

Поэтому $\left(x_0 - R,\ x_0 + R\right) = \left(-3-4e^2,\ -3+4e^2\right)$ – интервал сходимости степенного ряда. Проверим сходимость степенного ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -3+4e^2$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\frac{(x+3)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} e^{2n}$.

Проверим выполняемость необходимого условия сходимости числового ряда:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} e^{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} e^{2n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} + \ln e^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{n^2\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)+2n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)+2\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)+2}{\frac{1}{n}}} = e^{-2} \neq 0.$$

Здесь и числитель, и знаменатель показателя числа e стремятся к нулю, поэтому для вычисления данного предела использовалось два раза правило Лопиталя, предварительно заменив натуральную переменную n на действительную переменную x. Ряд расходится согласно достаточному признаку расходимости числового ряда.

При $x = -3-4e^2$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\frac{(x+3)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \times$ $\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} e^{2n}$. Для данного числового ряда согласно достаточному признаку расходимости числового ряда исходный числовой ряд тоже расходится так, как его общий член вообще не имеет предела.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является интервал $\left(-3-4e^2,\ -3+4e^2\right)$.

6. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n x^n}{(n+1)!}$.

Решение. Точка $x_0 = 0$ является центром сходимости степенного ряда. Коэффициентами степенного ряда являются числа $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$. Радиус сходимости степенного ряда вычислим по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}(n+2) = +\infty.$$

Так как $R = +\infty$, то областью сходимостью степенного ряда является множество всех действительных чисел: $x \in (-\infty,\ +\infty)$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!(x+4)^n}{n^2+n-1}$.

Решение. Точка $x_0=-4$ является центром сходимости степенного ряда. Коэффициентами степенного ряда являются числа $a_n=\dfrac{n!}{n^2+n-1}$. Радиус сходимости степенного ряда вычислим по формуле Даламбера:

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{n^2+n-1}\cdot\frac{(n+1)^2+n}{(n+1)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2+n}{n^2+n-1}\right)=0.$$

Так как $R=0,$ то области сходимостью степенного ряда является только ее центр сходимости $x_0=-4$: $x\in\{-4\}$.

8. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(n^2+1\right)(x+5)^{3n}}{3^n}.$$

Решение. В этом степенном ряду бесконечное число коэффициентов равных нулю и бесконечное число коэффициентов не равных нулю. Применим признак Даламбера. Общий член ряда равен

$$u_n(x)=\frac{\left(n^2+1\right)(x+5)^{3n}}{3^n}.$$

$$l(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left((n+1)^2+1\right)|x+5|^{3(n+1)}}{3^{n+1}}\frac{3^n}{\left(n^2+1\right)|x+5|^{3n}}\right)=$$

$$=\frac{\left|x+5\right|^3}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\frac{\left|x+5\right|^3}{3}.$$

При $l(x)<1$, то есть при $x\in\left(-5-\sqrt[3]{3},\ -5+\sqrt[3]{3}\right)$, степенной ряд сходится.

При $l(x)>1$ степенной ряд расходится.

При $l(x)=1$ имеем $x=-5-\sqrt[3]{3}$ или $x=-5+\sqrt[3]{3}$. При $x=-5-\sqrt[3]{3}$ числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(n^2+1\right)(x+5)^{3n}}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(n^2+1\right)$$

расходится согласно достаточному признаку расходимости числового ряда (общий член ряда стремится к бесконечности). При $x=-5+\sqrt[3]{3}$ числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(n^2+1\right)(x+5)^{3n}}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2+1\right)$$

тоже расходится согласно достаточному признаку расходимости числового ряда (общий член ряда стремится к плюс бесконечности).

Значит, областью сходимости данного степенного ряда является интервал $\left(-5-\sqrt[3]{3},\ -5+\sqrt[3]{3}\right)$.

9. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=3^x$ в окрестности точки $x_0=1$.

Решение. Найдем сначала общий вид ее n-й производной и значение ее в точке $x_0=1$. Так как $f(x)=3^x$, то $f'(x)=3^x\ln 3$,

$f''(x) = 3^x \ln^2 3$ и т. д. Поэтому для любого натурального числа n верно, что $f^{(n)}(x) = 3^x \ln^n 3.$ Можно доказать методом математической индукции. Отсюда, $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(1) = 3\ln^n 3.$

По формуле (1.11) разложение функции $f(x) = 3^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\ln^n 3}{n!}(x-1)^n = 3 + \frac{3\ln 3}{1!}(x-1) +$$
$$+\frac{3\ln^2 3}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{3\ln^n 3}{n!}(x-1)^n + \ldots$$

Найдем область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда найдем по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3\ln^n 3}{n!}\frac{(n+1)!}{3\ln^{n+1} 3}\right) = \frac{1}{3\ln 3}\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty.$$

Так как $R = +\infty,$ то областью сходимости степенного ряда является множество всех действительных чисел: $x \in (-\infty,\ +\infty).$

По формуле (1.12) для любого действительного числа x имеем

$$|R_n(x)| = \left|\frac{3^c \ln^n 3}{(n+1)!}(c-1)^{n+1}\right| \le \frac{3^L \ln^n 3}{(n+1)!} M^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

здесь $c \in (x,\ x_0),$ если $x < x_0,$ и $c \in (x_0,\ x),$ если $x > x_0,$ $L = \max\{x_0, x\}$ и $M = \max\{|x_0 - 1|, |x-1|\}$, то функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора для любого действительного числа $x,$ то есть для любого $x \in (-\infty,\ +\infty)$ верно

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3\ln^n 3}{n!}(x-1)^n=3+\frac{3\ln 3}{1!}(x-1)+$$
$$+\frac{3\ln^2 3}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{3\ln^n 3}{n!}(x-1)^n+\ldots$$

10. Разложить в ряд Маклорена функцию $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

Решение. Так как

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ x\in(-1,1],$$

то, подставив x^2 вместо x в разложение функции, получим

$$y=\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\ldots$$

В последнем разложении $x^2\in(-1,1]$, значит, $x\in[-1,1]$. Таким образом,

$$y=\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\ldots \text{ при } x\in[-1,1].$$

11. Разложить в ряд Маклорена функцию $y=2x\operatorname{sh}2x-3\operatorname{ch}2x$.

Решение. Так как

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,\ +\infty)$$

и

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,\ +\infty),$$

то, подставив $2x$ вместо x в разложения функций, получим

$$\operatorname{sh} 2x = 2x + \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \ldots + \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, +\infty)$$

и

$$\operatorname{ch} 2x = 1 + \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + \ldots + \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, +\infty).$$

Из предпоследнего разложения имеем

$$x \operatorname{sh} 2x = 2x^2 + \frac{8x^4}{3!} + \frac{32x^6}{5!} + \ldots + \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n-1)!} + \frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+1)!} + \ldots,$$
$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Значит,

$$2x \operatorname{sh} 2x = 4x^2 + \frac{16x^4}{3!} + \frac{64x^6}{5!} + \ldots + \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n-1)!} + \frac{2^{2n+2} x^{2n+2}}{(2n+1)!} + \ldots,$$
$$x \in (-\infty, +\infty),$$

$$3 \operatorname{ch} 2x = 3 + \frac{12x^2}{2!} + \frac{48x^4}{4!} + \ldots + \frac{3 \cdot 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, +\infty)$$

и

$$y = 2x \operatorname{sh} 2x - 3 \operatorname{ch} 2x =$$

$$= 3 + \left(4 + \frac{12}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{16}{3!} + \frac{48}{4!}\right) x^4 + \ldots + \left(\frac{2^{2n}}{(2n-1)!} + \frac{3 \cdot 2^{2n}}{(2n)!}\right) x^{2n} + \ldots,$$
$$x \in (-\infty, +\infty).$$

12. Вычислить приближенно при помощи степенного ряда $\cos 40°$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Решение. Воспользуемся формулой разложения элементарных функций в ряд Маклорена:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \; x \in (-\infty, \; +\infty).$$

Так как $40° = \dfrac{2\pi}{9}$ радиан, значит,

$$\cos 40° = \cos\frac{2\pi}{9} = 1 - \frac{(2\pi)^2}{2! \cdot 9^2} + \frac{(2\pi)^4}{4! \cdot 9^4} - \ldots + (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)! \, 9^{2n}} + \ldots$$

Полученный числовой ряд является числовым рядом лейбницевского типа. Так как $|u_0| = 1 > \varepsilon$, $|u_2| \approx 2,436939 \cdot 10^{-1} > \varepsilon$, $|u_4| \approx 9,8978 \cdot 10^{-3} > \varepsilon$, $|u_6| \approx 1,608 \cdot 10^{-4} > \varepsilon$, $|u_8| \approx 1,4 \cdot 10^{-6} > \varepsilon$ и $|u_{10}| \approx 7,6 \cdot 10^{-9} \le \varepsilon$, то

$$\cos 40^{0} = \cos\frac{2\pi}{9} \approx u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + u_8 \approx 0,7660445 \approx 0,766044.$$

13. Вычислить приближенно при помощи степенного ряда $e^{1/10}$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Решение. Воспользуемся разложением функции в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \; x \in (-\infty, \; +\infty).$$

Отсюда

$$e^{1/10} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2! \cdot 10^2} + \ldots + \frac{1}{n! \cdot 10^n} + \ldots$$

1-ый способ. Остаток после n-го члена предыдущего числового ряда имеет вид

$$R_n(10)=\frac{1}{(n+1)!10^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!10^{n+2}}+\frac{1}{(n+3)!10^{n+3}}+\ldots$$

Так как $(n+1)!\ge 2^n$, то

$$R_n(10)\le\frac{1}{2^n\cdot 10^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}\cdot 10^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+2}\cdot 10^{n+3}}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2^n\cdot 10^n}+\frac{1}{2^{n+1}\cdot 10^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}\cdot 10^{n+2}}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{20^n}+\frac{1}{20^{n+1}}+\frac{1}{20^{n+2}}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{10}\frac{\frac{1}{20^n}}{1-\frac{1}{20}}=\frac{2}{19}\frac{1}{20^n}.$$

Так как $R_3(10)\approx 1{,}32\cdot 10^{-5}>\varepsilon$ и $R_4(10)\approx 6{,}6\cdot 10^{-7}\le\varepsilon$, то

$$e^{1/10}\approx S_3=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{2!\cdot 10^2}+\frac{1}{3!\cdot 10^3}+\frac{1}{4!\cdot 10^4}\approx 1{,}105171$$

с абсолютной погрешностью $\varepsilon=10^{-6}$.

2-ой способ. Воспользуемся формулой остатка ряда Тейлора в форме Лагранжа $R_n(10)=\dfrac{e^c}{(n+1)!}c^{n+1}$, здесь $c\in\left(0,\ \dfrac{1}{10}\right)$, $f(x)=e^x$.

Оценим сверху величину остатка $R_n(10)$. Так как $e^c\le e^{1/10}\le 3^{1/10}\le 2$, то

$$R_n(10) \le \frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}.$$

Так как $R_3(10) \le 8,33 \cdot 10^{-5} > \varepsilon$ и $R_4(10) \le 1,7 \cdot 10^{-7} \le \varepsilon$, то

$$e^{1/10} \approx S_3 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2! \cdot 10^2} + \frac{1}{3! \cdot 10^3} + \frac{1}{4! \cdot 10^4} \approx 1{,}105171$$

с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

14. Вычислить приближенно при помощи степенного ряда $\int\limits_0^{1/4} \sqrt[3]{1+t^3}\,dt$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

Решение. Воспользуемся формулой разложения элементарных функций в ряд Маклорена. Имеем

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in [-1, 1].$$

Отсюда

$$\sqrt[3]{1+x^3} = 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^6 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{2!}x^9 + \ldots +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{2!}x^{3n} + \cdots, \quad x \in [-1, 1].$$

По основному свойству (5) степенных рядов имеем

$$\int_0^{1/4}\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1/4}\mathrm{d}x+\int_0^{1/4}\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x+\int_0^{1/4}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^6\mathrm{d}x+\ldots+$$

$$+\int_0^{1/4}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^9\mathrm{d}x+\ldots+$$

$$+\int_0^{1/4}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!}x^{3n}\mathrm{d}x+\cdots=$$

$$=x\Big|_0^{1/4}+\frac{x^4}{3\cdot4}\Big|_0^{1/4}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!\cdot7}x^7\Bigg|_0^{1/4}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!\cdot10}x^{10}\Bigg|_0^{1/4}+\ldots+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!(3n+1)}x^{3n+1}\Bigg|_0^{1/4}+\ldots$$

Получаем числовой ряд

$$\int_0^{1/4}\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot4^4}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!\cdot7\cdot4^7}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!\cdot10\cdot4^{10}}+\ldots$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!(3n+1)4^{3n+1}}+\ldots$$

Данный числовой ряд является знакочередующимся, начиная с номера $n=1$. Так как $u_2 \approx -6,46 \cdot 10^{-7} > \varepsilon$ и $u_3 \approx 2,4 \cdot 10^{-9} \le \varepsilon$, то

$$\int_0^{1/4} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx \approx u_0 + u_1 + u_2 \approx 0,250324552 \approx 0,25032455.$$

15. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''y' - x^2 y = 3$ с начальными условиями $y(1)=1$ и $y'(1)=-1$.

Решение. Применим способ последовательного дифференцирования.

Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 +$$
$$+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

Продифференцируем два раза дифференциальное уравнение:

$$\left(y''y' - x^2 y\right)' = 3',$$
$$y'''y' + (y'')^2 - 2xy - x^2 y' = 0; \qquad (1.20)$$

$$\left(y'''y' + (y'')^2 - 2xy - x^2 y'\right)' = 0,$$
$$y^{(4)}y' + y'''y'' + 2y''y''' - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2 y'' = 0, \qquad (1.21)$$
$$y^{(4)}y' + 3y'''y'' - 2y - 4xy' - x^2 y'' = 0.$$

Из дифференциального уравнения $y''y' - x^2 y = 3$ находим $y''(1)$:

$$y''(1) \cdot y'(1) - 1^2 \cdot y(1) = 3, \;\; y''(1) \cdot (-1) - 1 = 3, \;\; y''(1) = -4.$$

Из (1.20) находим $y'''(1)$:

$$y'''(1)\cdot y'(1)+\left(y''(1)\right)^2-2\cdot 1\cdot y(1)-1^2\cdot y'(1)=0\,,\quad y'''(1)=15.$$

Из (1.21) находим $y^{(4)}(1)$:

$$y^{(4)}(1)\cdot y'(1)+3y'''(1)\cdot y''(1)-2y(1)-4\cdot 1\cdot y'(1)-1^2\cdot y''(1)=0,$$
$$y^{(4)}(1)=-174\,.$$

Таким образом,

$$y(x)=1-(x-1)-\frac{4}{2!}(x-1)^2+\frac{15}{3!}(x-1)^3-\frac{174}{4!}(x-1)^4+\ldots$$

или

$$y(x)=1-(x-1)-2(x-1)^2+\frac{5}{2}(x-1)^3-\frac{29}{4}(x-1)^4+\ldots$$

16. Найти первые семь членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'''-xy''+y'+x^2y=1-x$ с начальными условиями $y(0)=-3,\ \ y'(0)=2$ и $y''(0)=-2.$

Решение. Применим способ неопределенных коэффициентов.

Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+\ldots$$

Продифференцируем функцию $y(x)$ два раза:

$$y'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+6c_6x^5+\ldots,$$
$$y''(x)=2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+30c_6x^4+\ldots$$

Из начальных условий имеем $-3 = y(0) = c_0$, $2 = y'(0) = c_1$ и $-2 = y''(0) = 2c_2$, а значит, $c_2 = -1$. Подставим найденные коэффициенты в функцию $y(x)$ и запишем ее первые три производные:

$$
\begin{gathered}
y(x) = -3 + 2x - x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots, \\
y'(x) = 2 - 2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + 6c_6x^5 + \ldots, \\
y''(x) = -2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + 30c_6x^4 + \ldots, \\
y'''(x) = 6c_3 + 24c_4x + 60c_5x^2 + 120c_6x^3 + \ldots
\end{gathered}
$$

Подставим функцию $y(x)$ и ее найденные производные в дифференциальное уравнение $y''' - xy'' + y' + x^2y = 1 - x$. Получим

$$
\begin{gathered}
\left(6c_3 + 24c_4x + 60c_5x^2 + 120c_6x^3 + \ldots\right) - \\
-x\left(-2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + 30c_6x^4 + \ldots\right) + \\
+\left(2 - 2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + 6c_6x^5 + \ldots\right) + \\
+x^2\left(-3 + 2x - x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \ldots\right) = 1 - x.
\end{gathered}
$$

Раскроем скобки

$$
\begin{gathered}
6c_3 + 24c_4x + 60c_5x^2 + 120c_6x^3 + \ldots \\
+2x - 6c_3x^2 - 12c_4x^3 - 20c_5x^4 - 30c_6x^5 - \ldots + \\
+2 - 2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + 6c_6x^5 + \ldots - \\
-3x^2 + 2x^3 - x^4 + c_3x^5 + c_4x^6 + c_5x^7 + c_6x^8 + \ldots = 1 - x.
\end{gathered}
$$

Так как в левой части равенства известны коэффициенты только до третьей степени всех степенных рядов, то представим левую часть равенства степенным рядом до третьей степени:

$$\left(6c_3+2\right)+\left(24c_4+2-2\right)x+\left(60c_5-6c_3+3c_3-3\right)x^2+$$
$$+\left(120c_6-12c_4+4c_4+2\right)x^3+\ldots=1-x,$$
$$\left(6c_3+2\right)+24c_4x+\left(60c_5-3c_3-3\right)x^2+\left(120c_6-8c_4+2\right)x^3+\ldots=1-x.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^0:\ 6c_3+2=1, \\ x:\ 24c_4=-1, \\ x^2:\ 60c_5-3c_3-3=0, \\ x^3:\ 120c_6-8c_4+2=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $c_3=-\dfrac{1}{6}$, $c_4=-\dfrac{1}{24}$, $c_5=\dfrac{1}{24}$ и $c_6=-\dfrac{7}{360}$. Таким образом,

$$y(x)=-3+2x-x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{24}x^5-\frac{7}{360}x^6+\ldots$$

1.8. Задачи для самостоятельного решения

Найти область сходимости и сумму функциональных рядов.

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+7}\right)^n$.

2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+4}\right)^n$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(2-x^2\right)^n$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\left(x^2-6\right)^n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{x^n}$.

6) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{4^n}$.

Найти область сходимости функциональных рядов.

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)3^{nx}$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\left(9-x^2\right)(n+2)}$.

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)\left(n^2+n-1\right)}$.

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{6^{nx}(n+1)\sqrt{n+2}}$.

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)^n}{4^{nx}}$.

12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(n+1)(x-2)^n}$.

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n-2)x^{n-1}}$.

14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln^n x$.

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{3^{nx}}{n+1}$.

16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\dfrac{x}{2^n}$.

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\arcsin^n\dfrac{x}{3n}$.

18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos\left(n^3x\right)}{n^2\sqrt[3]{n}}$.

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\left(x^2-4\right)n\sqrt{n}+x^2n}$.

20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^3+3^n}$.

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^3}{n^4+x}$.

22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^5}+x^2}$.

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^3}}{n\sqrt{n}+2x^3}$.

24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4+|x|^n}$.

Найти область сходимости степенных рядов.

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{4n-3}$.

26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n}{n!}x^n$.

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^{4n+3}}{2^{3n+2}}x^n$.

28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(3n)!\cdot x^n}{(n+2)(n!)^2}$.

29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n^2}}{(n+1)!} x^n$.

30) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{3^n}$.

31) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{n+2}$.

32) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{3^n}$.

33) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)\left(3^n-2\right)}$.

34) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^4 (x-3)^n$.

35) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n-1)(x-4)^n}{n! \cdot 3^n}$.

36) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+4)^n}{4^n+2}$.

37) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)6^{n-2}}$.

38) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{n^n}$.

39) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(x-1)^n}{(2n)!}$.

40) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{3n^3-n+1}$.

41) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} \frac{x^{2n}}{3^n}$

42) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n^2}$.

43) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^{3n}}{n^3 4^{3n}}$.

Разложить в ряд Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

44) $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $x_0=2$.

45) $f(x)=\ln x$, $x_0=3$.

46) $x_0=\frac{\pi}{2}$, $x_0=1$.

47) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

48) $f(x)=e^{3+2x}$, $x_0=-2$.

49) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=-1$.

50) $f(x)=\ln(3+x)$, $x_0=1$.

Разложить в ряд Маклорена функции $f(x)$.

51) $f(x) = \operatorname{ch} 2x$.

52) $f(x) = x^2 \cos 2x$.

53) $f(x) = \dfrac{1}{3 - x}$.

54) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

55) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$.

Вычислить приближенно при помощи степенных рядов.

56) $\sqrt[4]{19}$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

57) $\sqrt[9]{527}$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

58) $\ln 1{,}1$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

59) $\operatorname{arctg} 0{,}05$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

60) $e^{-1/4}$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

61) $\int\limits_0^1 \sqrt[4]{x} \cos x \, dx$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-9}$.

62) $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{1+x^4} \, dx$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-7}$.

63) $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} \, dx$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

64) Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x + y^2$ с начальным условием $y(0) = -1$.

65) Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = y^3 - x^2$ с начальным условием $y(0) = 1$.

66) Найти первые восемь членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''' - xy = 2x^2 - 3x + 1$ с начальными условиями $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ и $y''(0) = -4$.

Ответы

1) $x \in \left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right)$, $\frac{1}{11}(x-4)$.

2) $x \in (-\infty, -5) \cup \left(-\frac{3}{5}, +\infty\right)$, $\frac{3x+4}{x+5}$.

3) $x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$, $\frac{1}{x^2-1}$.

4) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{7}\right) \cup \left(-\sqrt{7}, -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}, \sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7}, +\infty\right)$, $\frac{1}{x^2-7}$.

5) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $\frac{2}{x-2}$.

6) $x \in (-4, 4)$, $\frac{4}{4-x}$.

7) $x \in (-\infty, 0)$.

8) $x \in [-1, 1)$.

9) $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

10) $x \in [0, +\infty)$.

11) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

12) $x \in (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$.

13) $x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

14) $x \in (0, e)$.

15) $x \in (-\infty, 0]$.

16) $x \in (-\infty, +\infty)$.

17) $x \in (-\infty, +\infty)$.

18) $x \in (-\infty, +\infty)$.

19) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

20) $x \in (-\infty, +\infty)$.

21) Ни при каком значении x.

22) $x \in (-\infty, +\infty)$.

23) Ни при каком значении x.

24) $x \in (-\infty, +\infty)$.

25) $x \in [-1, 1)$.

26) $x \in (-\infty, +\infty)$.

27) $x \in \left(-\frac{8}{81}, \frac{8}{81}\right)$.

28) $x = 0$.

29) $x = 0$.

30) $x \in \left(-\frac{3}{e}, \frac{3}{e}\right)$.

31) $x \in [-4, 2)$.

32) $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

33) $x \in [-2, 4)$.

34) $x \in (2,4)$.

35) $x \in (-\infty,+\infty)$.

36) $x \in (-8,0)$.

37) $x \in [-9,\ 3)$.

38) $x \in (-\infty,+\infty)$.

39) $x \in (-\infty,+\infty)$.

40) $[-1,1]$.

41) $x \in \left(-\mathrm{e}\sqrt{3},\ \mathrm{e}\sqrt{3}\right)$.

42) $[1,\ 3]$.

43) $[-1,7]$.

44) $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}(x-2) + \frac{1}{4^3}(x-2)^2 - \ldots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-2)^n + \ldots,$
$x \in (-2,6)$.

45) $f(x) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{3^2 \cdot 2}(x-3)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n n}(x-3)^n + \ldots,$
$x \in (0,6]$.

46) $f(x) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2}(x-1)^2 + \frac{3 \cdot 1 \cdot (-1)}{2^3 \cdot 2}(x-1)^3 +$
$+ \ldots + \frac{3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (3-2(n-2))(3-2(n-1))}{2^n n!}(x-1)^n + \ldots,\ x \in [0,2].$

47) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} + \ldots,$
$x \in (-\infty,+\infty)$.

48) $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{2}{\mathrm{e}}(x+2) + \frac{2^2}{2\mathrm{e}}(x+2)^2 + \ldots + \frac{2^n}{\mathrm{e}n!}(x+2)^n + \ldots,$
$x \in (-\infty,+\infty)$.

49) $f(x) = 1 - 2(x+1) + 3(x+1)^2 - \ldots + (-1)^n (n+1)(x+1)^n + \ldots,$
$x \in (-2,0)$.

50) $f(x) = \ln 4 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4^2 \cdot 2}(x-1)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{4^n n}(x-1)^n + \ldots,$
$x \in (-3,5]$.

51) $f(x)=1+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4+\ldots+\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

52) $f(x)=x^2-\frac{2^2}{2!}x^4+\frac{2^4}{4!}x^6-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!}x^{2n}+\ldots,$
$x\in(-\infty,+\infty)$.

53) $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{3^3}+\ldots+\frac{x^n}{3^{n+1}}+\ldots,\ x\in(-3,3)$.

54) $f(x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\ldots+\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots,\ x\in(-1,1)$.

55) $f(x)=1+\frac{1}{3}x^3+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^6+\ldots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-(n-1)\right)}{n!}x^{3n}+\ldots,$
$x\in[-1,1]$.

56) 2,08779.
57) 2,0064272.
58) 0,09531.
59) 0,04995840.
60) 0,7788.
61) 0,653901440.
62) 0,3337442.
63) 0,48722.

64) $y=-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{12}x^4+\ldots$

65) $y=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+\frac{35}{8}x^4+\ldots$

66) $y=2-x-2x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{60}x^6+\frac{1}{1260}x^7+\ldots$

1.9. Ряды Фурье

Пусть задана функция $f(x)$, определенная при всех действительных значениях независимой переменной x и являющейся $2l$-периодической функцией ($l>0$). Поставим в соответствие функции $f(x)$ функцию $S_f(x)$, определенную следующим образам:

$$S_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad (1.22)$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}\mathrm{d}t,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \qquad (1.23)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}\mathrm{d}t,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Функция $S_f(x)$ называется *рядом Фурье* (*тригонометрическим рядом*) функции $f(x)$. Также говорят, что функция $f(x)$ *разложена в ряд Фурье* или *представлена в виде ряда Фурье*.

Тот факт, что функции $f(x)$ ставится в соответствие ее ряд Фурье, обозначается

$$f(x)\sim S_f(x).$$

Теорема (***теорема Дирихле***). Пусть $2l$-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-l,\ l]$ удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2) $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке либо этот отрезок можно разбить на конечное число промежутков так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье $S_f(x)$ сходится на этом отрезке и при этом:

а) в точках непрерывности интервала $(-l,\ l)$ функции $f(x)$ сумма ряда Фурье $S_f(x)$ совпадает с самой функцией $S_f(x)=f(x)$;

б) в каждой точке x_0 интервала $(-l, l)$, которая является разрывом функции $f(x)$, сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ в этой точке x_0 слева и справа:

$$S_f(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

в) на концах отрезка $[-l, l]$ (в точках $x = -l$ и $x = l$) сумма ряда Фурье равна

$$S_f(-l) = S_f(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}.$$

Замечание. Из вышесказанного следует, что значение функции $f(x)$ и ее ряда Фурье не обязательно совпадают во всех точках отрезка $[-l, l]$.

Если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье имеет следующий вид:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \tag{1.24}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\mathrm{d}t \text{ и } a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\mathrm{d}t,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.25}$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье имеет следующий вид:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{1.26}$$

где

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}dt,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.27}$$

Частным случаем разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье является, когда функция $f(x)$ 2π-периодическая $(l=\pi)$. Здесь формулы (1.22)–(1.27) имеют более простой вид.

Для произвольной функции $f(x)$ имеем

$$S_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (1.28)$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t,\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \qquad (1.29)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t,\ \ n=1,2,\ 3,\ \ldots$$

Если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье принимает вид

$$S_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx,$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t \ \text{ и } \ a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t,\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье принимает вид

$$S_f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx,$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t,\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

По определению только периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье. Однако непериодическую функцию $f(x)$ тоже можно представить в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке. Рассмотрим некоторые случаи.

Пусть требуется непериодическую функцию $f(x)$ представить в виде ряда Фурье на отрезке $[-l,\ l]$. Построим функцию $\tilde{f}(x)$, определенную при всех действительных значениях x, совпадающую с функцией $f(x)$ на отрезке $[-l,\ l]$, кроме, быть может, одного из концов отрезка $[-l,\ l]$ (в этой точке функция $\tilde{f}(x)$ должна совпадать со своим значением в другом конце отрезка $[-l,\ l]$), и являющейся $2l$-периодической. Тогда ряд Фурье $S_{\tilde{f}}(x)$ функции $\tilde{f}(x)$ считается рядом Фурье $S_f(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[-l,\ l]$: так как в точках непрерывности x интервала $(-l,\ l)$ выполняется равенство $S_f(x)=S_{\tilde{f}}(x)=f(x)$; в точках разрыва x интервала $(-l,\ l)$ выполняется равенство $S_f(x)=S_{\tilde{f}}(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$; на концах отрезка $[-l,\ l]$ выполняется равенство

$$S_f(-l)=S_f(l)=S_{\tilde{f}}(-l)=S_{\tilde{f}}(l)=\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}.$$

Вне отрезка $[-l,\ l]$ нет никакой связи между значениями функции $f(x)$ и ее рядом Фурье $S_f(x)$.

Если функцию $f(x)$ нужно разложить в ряд Фурье на отрезке $[0,l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье либо только по косинусам, либо только по синусам. Делается это следующим образом.

Если вместо функции $f(x)$ построить функцию $\tilde{f}(x)$, определенную при всех действительных значениях x, такую, что она совпадает с функцией $f(x)$ на отрезке $[0, l]$, является четной и $2l$-периодической, то ряды Фурье $S_{\tilde{f}}(x)$ и $S_f(x)$ функций $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ совпадают. Ряд Фурье $S_{\tilde{f}}(x)$ функции $\tilde{f}(x)$, а значит, и ряд Фурье $S_f(x)$ функции $f(x)$, не содержит синусов (разлагается только по косинусам), так как по построению функция $\tilde{f}(x)$ четная.

Если вместо функции $f(x)$ построить функцию $\tilde{f}(x)$, определенную при всех действительных значениях x, такую, что она совпадает с функцией $f(x)$ на промежутке $(0, l]$, является нечетной, $2l$-периодической и в точке $x=0$ принимает произвольное значение, то ряды Фурье $S_{\tilde{f}}(x)$ и $S_f(x)$ функций $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ совпадают. Ряд Фурье $S_{\tilde{f}}(x)$ функции $\tilde{f}(x)$, а значит, и ряд Фурье $S_f(x)$ функции $f(x)$, не содержит косинусов (разлагается только по синусам), так как по построению функция $\tilde{f}(x)$ нечетная.

Наконец, если непериодическую функцию $f(x)$ нужно представить в виде ряда Фурье на отрезке $[a, b]$, где $a<b$, то ее ряд Фурье будет иметь следующий вид:

$$S_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}\mathrm{d}t,\ n=1,2,3,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\mathrm{d}t\ ,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

здесь $l = \dfrac{b-a}{2}$.

Примеры

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} x+\pi, & x<0, \\ -2x+\pi, & x \ge 0 \end{cases}$ на отрезке $[-\pi,\ \pi]$.

Решение. Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}(-2t+\pi)\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{t^2}{2}+\pi t\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \left(-t^2+\pi t\right)\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi^2\right) + \left(-\pi^2+\pi^2\right)\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos nt\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\cos nt\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}(-2t+\pi)\cos nt\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\mathrm{d}\sin nt + \int_{0}^{\pi}(-2t+\pi)\mathrm{d}\sin nt\right) = \frac{1}{\pi n}\times$$

$$\times\left(\left((t+\pi)\sin nt\right)\Big|_{t=-\pi}^{t=0} - \int_{-\pi}^{0}\sin nt\mathrm{d}t + \left((-2t+\pi)\sin nt\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi} + 2\int_{0}^{\pi}\sin nt\mathrm{d}t\right) =$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left((0+\pi)\sin 0-(-\pi+\pi)\sin(-\pi n)+\frac{1}{n}\cos nt\Big|_{t=-\pi}^{t=0}+\right.$$

$$\left.+(-2\pi+\pi)\sin\pi n-(0+\pi)\sin 0-\frac{2}{n}\cos nt\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(\frac{1}{n}\left(\cos 0-\cos(-\pi n)\right)-\frac{2}{n}\left(\cos\pi n-\cos 0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n-2\left((-1)^n-1\right)\right)=\frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(t)\sin nt\mathrm{d}t+\int_{0}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\sin nt\mathrm{d}t+\int_{0}^{\pi}(-2t+\pi)\sin nt\mathrm{d}t\right)=$$

$$-\frac{1}{\pi n}\left(\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\mathrm{d}\cos nt+\int_{0}^{\pi}(-2t+\pi)\mathrm{d}\cos nt\right)==-\frac{1}{\pi n}\times$$

$$\times\left(\left((t+\pi)\cos nt\right)\Big|_{t=-\pi}^{t=0}-\int_{-\pi}^{0}\cos nt\mathrm{d}t+\left((-2t+\pi)\cos nt\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi}+2\int_{0}^{\pi}\cos nt\mathrm{d}t\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left((0+\pi)\cos 0-(-\pi+\pi)\cos(-\pi n)-\frac{1}{n}\sin nt\Big|_{t=-\pi}^{t=0}+\right.$$

$$\left.+(-2\pi+\pi)\cos\pi n-(0+\pi)\cos 0+\frac{2}{n}\sin nt\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(\pi-\frac{1}{n}\left(\sin 0-\sin(-\pi n)\right)-\pi\cdot(-1)^n-\pi+\frac{2}{n}\left(\sin\pi n-\sin 0\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(\pi-\pi\cdot(-1)^n-\pi\right)=\frac{\pi\cdot(-1)^n}{\pi n}=\frac{(-1)^n}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет следующий вид:

$$S(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Решение. Так как функция $f(x)$ является нечетной, то в ее разложение в ряд Фурье входят только синусы, и ряд Фурье определяется по формуле

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} t\mathrm{d}\cos nt=-\frac{2}{\pi n}\left(\left.(t\cos nt)\right|_{t=0}^{t=\pi}-\int_0^{\pi}\cos nt\mathrm{d}t\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(\pi\cdot(-1)^n-\frac{1}{n}(\sin\pi n-\sin 0)\right)=-\frac{2\pi\cdot(-1)^n}{\pi n}=-\frac{2\cdot(-1)^n}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет следующий вид:

$$S(x)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$$

1.10. Задачи для самостоятельного решения

1) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ -x+\pi, & x>0\end{cases}$ на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ и, используя значение ряда Фурье в точке $x=0$, найти значение числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

2) $f(x)=\begin{cases} 2x+2\pi, & x<0, \\ 2\pi, & x\geq 0. \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 16\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)^2, & x<0, \\ -4\pi x+4\pi^2, & x\geq 0. \end{cases}$

4) $f(x)=e^{2x}$.

5) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$.

6) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

7) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0, \\ 3, & x>0. \end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} 4, & x\leq 0, \\ 0, & x>0. \end{cases}$

9) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 2, & x\geq 0 \end{cases}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и, используя значение ряда Фурье в точке $x=0$, найти значение числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

10) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и, используя значение ряда Фурье в точке $x=0$, найти значение числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

11) $f(x)=x|x|$.

12) $f(x)=x^3$.

13) $f(x)=|x|^3$.

14) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} 6x, & x<\pi/2, \\ -6x+6\pi, & x\geq \pi/2 \end{cases}$ на отрезке $[0, \pi]$ по косинусам.

15) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\pi^2$ на отрезке $[0,\pi]$ по косинусам и, используя значение ряда Фурье в точке $x=0$, найти значение числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0,\pi]$ по синусам.

16) $f(x)=1$.

17) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le \pi/2, \\ \pi/2, & x>\pi/2. \end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<\pi/2, \\ -4x+4\pi, & x\ge \pi/2. \end{cases}$

19) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} 4, & x\le 0, \\ -2x+4, & x>0 \end{cases}$ на отрезке $[-2,2]$.

20) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=e^{-x}$ на отрезке $[-3,3]$.

Ответы

1) $S(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

2) $S(x)=\frac{3\pi}{2}+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$.

3) $S(x)=\frac{5\pi^2}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\begin{array}{l}\frac{5\pi n+3\pi n\cdot(-1)^n}{n^3}\cos nx+\\+\frac{8-\left(8-\pi^2 n^2\right)(-1)^n}{n^3}\sin nx\end{array}\right).$

4) $S(x)=\frac{\operatorname{sh}2\pi}{2\pi}+\frac{2\operatorname{sh}2\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2\cdot(-1)^n}{4+n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}n}{4+n^2}\sin nx\right).$

5) $S(x)=\frac{18}{\pi}\sin\frac{\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{\pi^2-9n^2}\sin nx.$

6) $S(x)=\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{2}+4\sin\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2-4n^2}\cos nx.$

7) $S(x)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

8) $S(x)=2-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

9) $S(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

10) $S(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

11) $S(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+\left(\pi^2 n^2-2\right)(-1)^n}{n^3}\sin nx.$

12) $S(x)=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\pi^2n^2-6\right)(-1)^n}{n^3}\sin nx.$

13) $S(x)=\frac{\pi^3}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6-6\cdot(-1)^n+3\pi^2n^2\cdot(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos nx.$

14) $S(x)=\frac{3\pi}{2}+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1+2\cos\frac{\pi n}{2}-(-1)^n}{n^2}\cos nx.$

15) $S(x)=-\frac{2\pi^3}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

16) $S(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

17) $S(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi n+2\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}\sin nx.$

18) $S(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi n\cos\frac{\pi n}{2}+6\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}\sin nx.$

19) $S(x)=3+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos\frac{\pi n}{2}x+\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n}{2}x\right).$

20) $S(x)=\frac{\operatorname{sh}3}{3}+\frac{e^6-1}{e^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3\cdot(-1)^n}{\pi^2n^2+9}\cos\frac{\pi n}{3}x+\frac{\pi n\cdot(-1)^n}{\pi^2n^2+9}\sin\frac{\pi n}{3}x\right).$

2. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Комплексные числа и операции над ними

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – вещественные числа, i – мнимая единица, $i = \sqrt{-1}$. Комплексное число можно изобразить на плоскости XOY точкой с координатами x и y (рис. 2.1).

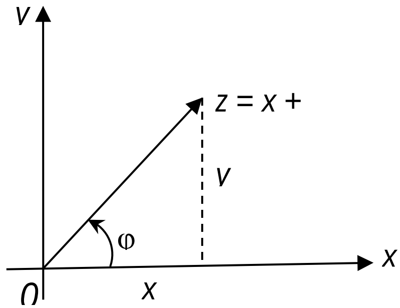


Рис. 2.1

Полярные координаты r и ϕ точки (x, y) соответствуют модулю $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргументу $\phi = \mathrm{Arg}\, z$ комплексного числа z. Аргумент определяется из формул $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ с точностью до слагаемого $2k\pi$. Среди значений аргумента комплексного числа $z \neq 0$ существует одно и только одно значение, заключенное между $-\pi$ и π. Его называют главным значением аргумента и обозначают $\arg z$: $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi z$, $k \in z$, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Кроме алгебраической формы $z = x + iy$ часто используют тригонометрическую форму комплексного числа: $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$.

Пользуясь формулой Эйлера $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ можно получить показательную форму любого комплексного числа, кроме $z = 0 + i \cdot 0$: $z = re^{i\phi}$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ осуществляются по формулам:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2); \qquad (2.1)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2); \qquad (2.2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2};$$

$$x_2^2 + y_2^2 \neq 0. \qquad (2.3)$$

С помощью формулы Муавра $(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$ можно получить формулу для степени числа:

$$z^n = \left(re^{i\phi}\right)^n = r^n e^{in\phi} = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi). \qquad (2.4)$$

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$: :

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (2.5)$$

2.2. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность

Множество называется связным, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству. Связное открытое (не содержащее границу) множество называется областью.

Пусть в комплексной плоскости задана некоторая область D и правило, по которому любому $z \in D$ ставится в соответствие определенное число $w = u + iv \in W$. В этом случае говорят, что на области D

задана однозначная функция $w = f(z)$, отображающая область D на W. Если одному значению z соответствует несколько чисел w, то такая функция называется многозначной.

Функция $f(z)$ может быть представлена в следующем виде: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ – действительные функции двух переменных, являющиеся действительной и мнимой частями комплексной функции $f(z)$.

Комплексное число c называется пределом однозначной функции $w = f(z)$ при $z \to a$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|z - a| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - c| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c$. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется непрерывной в этой области. Область D называется односвязной, когда она ограничена замкнутой линией Γ, не пересекающей себя (рис. 2.2, *а*). Область D называется двусвязной, если она ограничена двумя замкнутыми линиями Γ_1 и Γ_2, которые не пересекаются и каждая не пересекает себя (рис. 2.2, *б*); внутренняя линия Γ_2, может вырождаться в точку или в дугу непрерывной линии.

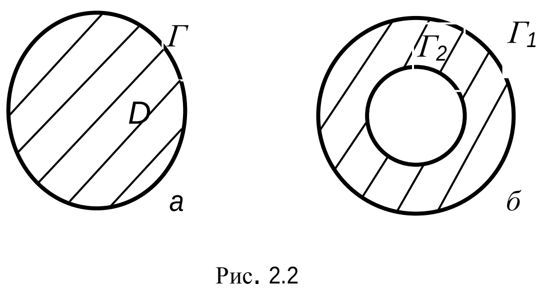


Рис. 2.2

Аналогично определяются трехсвязная, четырехсвязная и другие области.

2.3. Основные элементарные функции комплексного переменного

1) Показательная: $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)$.

2) Тригонометрические: $\cos z=\dfrac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$; $\sin z=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$;

$\operatorname{tg} z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$; $\operatorname{ctg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$.

3) Гиперболические: $\operatorname{ch} z=\dfrac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$; $\operatorname{sh} z=\dfrac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$;

$\operatorname{th} z=\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$; $\operatorname{cth} z=\dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

4) Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\left(\arg z+2k\pi\right)$; $k\in z$. Значение логарифма при $k=0$ называется главным значением логарифма и обозначается $\ln z=\ln|z|+i\arg z$. Тогда $\operatorname{Ln} z+2k\pi$.

5) Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции выражаются через логарифмическую функцию:

$$\operatorname{Arcsin} z=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^{2}}\right);\qquad \operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^{2}+1}\right);$$

$$\operatorname{Arccos} z=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right);\qquad \operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right);$$

$$\operatorname{Arctg} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz};\qquad \operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z};$$

$$\operatorname{Arcctg} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i};\qquad \operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

6) Если α и β – два комплексных числа, $\alpha\neq 0$, то степень α^{β} в силу основного логарифмического тождества

$$\alpha^{\beta}=e^{\beta\operatorname{Ln}\alpha}=e^{\beta\left(\ln\alpha+2k\pi i\right)};\quad k\in z.$$

2.4. Аналитические функции. Производная ФКП. Условия Коши–Римана

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0 комплексной плоскости.

Производной $f'(z_0)$ функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ называется предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$, если он существует и конечен. Если существует производная $f'(z_0)$, то функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности точки z_0.

Теорема 2.1. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + i(x, y)$ была дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно:

1) частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ должны существовать и быть непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ (как функции двух действительных переменных x и y);

2) в точке $(x_0,\ y_0)$ должны выполняться условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.6}$$

Если функция задана через свои вещественную и мнимую части, то после проверки условий Коши–Римана производную $f'(z)$ можно найти по одной из равносильных формул: $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} =$

$=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Если же дана зависимость $f(z)$, то после проверки условий Коши–Римана производную можно найти непосредственным дифференцированием. Правила дифференцирования и таблица производных имеют такой же вид, что и для функций вещественного аргумента. Если функция $f(z)$ аналитическая в области *D*, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются функциями, гармоническими в *D*. Это значит, что у каждой из функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ существуют непрерывные в *D* частные производные второго порядка, и для каждой из них верно уравнение Лапласа: $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \Delta v=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \quad \forall(x,y)\in D,$ где Δ – оператор Лапласа. Если функция $u(x, y)$ (функция $v(x, y)$) является гармонической в некоторой односвязной области *D*, то существует аналитическая в *D* функция $f(z)$ с действительной частью $u(x, y)$ (соответственно с мнимой частью $v(x, y)$), определяемая с точностью до постоянного слагаемого.

Примеры

1. Выполнить указанные действия над комплексными числами:

а) $(2-3i)(6+4i)+1-8;$ б) $\dfrac{4+i}{2-i}+\dfrac{5-3i}{3+i}$.

***Решение*.**

а) В соответствии с формулами (2.2) и (2.1) имеем

$$(2-3i)(6+4i)+1-8=12+8i-18i+12+1-8i=25-18i.$$

б) Применим формулу (2.3). Получим

$$\frac{4+i}{2-i}=\frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{8+4i+2i-1}{4+1}=\frac{7+6i}{5};$$

$$\frac{5-3i}{3+i}=\frac{(5-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{15-5i-9i-3}{9+1}=\frac{12-14i}{10}=\frac{6-7i}{5};$$

$$\frac{4-2i}{2-i}+\frac{5-3i}{3+i}=\frac{7+6i}{5}+\frac{6-7i}{5}=\frac{13}{5}-i\frac{1}{5}.$$

2. Найти значения выражения $f(x)=x^4+x^2+1$ в точке $x_0=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Решение. Так как

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{(1+2i-1)(1+2i-1)}{4}=\frac{-4}{4}=-1;$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i-1}{2}=i\text{, то }f(x_0)=-1+i+1=i.$$

3. Записать в тригонометрической и показательной форме следующие числа:

а) $-7i$; б) $3+3i$; в) $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$.

Решение.

а) Найдем модуль и аргумент числа. В данном случае $x=0$, $y=-7$. Значит, $|z|=\sqrt{0^2+49}=7$, $\cos\phi=\dfrac{x}{|z|}=0$, $\sin\phi=\dfrac{y}{|z|}=-1$, $\phi=\arg z=\dfrac{3\pi}{2}$. Число $-7i$ в тригонометрической и показательной форме имеет вид

$$-7i=7\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=7e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

б) Аналогично: $x = 3, \quad y = 3, \quad |z| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

$$\left.\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\phi &= \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

$$3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

в) Найдем сначала действительную и мнимую части этого комплексного числа $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2} = \dfrac{2i-2}{-2i} = -1 + \dfrac{1}{i} = -1 - i.$ Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 - i$:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \qquad \cos\phi = \sin\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{5\pi}{4}.$$

Поэтому $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$

4. Вычислить $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^6}{(1+i)^8 - (1-i)^4}.$

Решение. Представим числа, стоящие в числителе и знаменателе, в показательной форме:

$$\sqrt{3} + i: \quad r = \sqrt{3+1} = 2; \quad \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6};$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^6 = 2^6\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^6;$$

$$1+i:\quad r=\sqrt{2};\quad \cos\phi=\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \phi=\frac{\pi}{4};$$

$$(1+i)^8=\left(\sqrt{2}\right)^8\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8=\left(\sqrt{2}\right)e^{2i\pi}=2^4;$$

$$1-i:\quad r=\sqrt{2};\quad \cos\phi=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \sin\phi=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \phi=-\frac{\pi}{4};$$

$$(1-i)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4=2^2e^{-i\pi}=-2^2;$$

$$\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^6}{(1+i)^8-(1-i)^4}=\frac{-2^6}{2^4+2^2}=-\frac{16}{5}.$$

5. Найти все значения $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Решение. Представим в тригонометрической форме

$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right);$$

$k=0,1,2$.

$k=0$:

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1+i;$$

$k=1$:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$k=2$:

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

6. Какое множество точек на комплексной плоскости определяется условием: $1\le|z+2+i|\le 2$.

Решение. Пусть $z=x+iy$.

Тогда

$$z+2+i=x+iy+2+i=(x+2)+i(y+1).$$

Модуль этого комплексного числа

$$|(x+2)+i(y+1)|=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}\ .$$

И

$$1\le\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}\le 2\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}(x+2)^2+(y+1)^2\le 2\\(x+2)^2+(y+1)^2\ge 1\end{cases}.$$

Следовательно, это множество точек представляет собой концентрическое кольцо, ограниченное окружностями радиусов $R_1=1$ и $R_2=2$ с центром в точке $z_0=-(2+i)$. Обе окружности принадлежат множеству.

7. Найти значения следующих функций:

а) $e^{\pi(1-i)}$; б) $\cos(2-i)$; в) $\mathrm{Ln}(1+i)$;

г) $\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2}$; д) i^{1+i}.

Решение.

а) Так как $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, то

$$e^{\pi(1-i)} = e^{\pi}\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = e^{\pi}\cos\pi = -e^{\pi}.$$

б) $\cos(2-i) = \frac{1}{2}\left(e^{i(2-i)} + e^{-i(2-i)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2i+1} + e^{-2i-1}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(e(\cos 2 + i\sin 2) + e^{-1}(\cos 2 - i\sin 2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\left(e + e^{-1}\right) + \mathrm{i}\sin 2\left(e - e^{-1}\right)\right) =$$

$$= \cos 2\frac{e + e^{-1}}{2} + i\sin 2\frac{e - e^{-1}}{2} = \cos 2\,\mathrm{ch}2 + i\sin 2\,\mathrm{sh}2.$$

в) $\mathrm{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i\left(\arg(1+i) + 2\pi k\right)$.

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z = 1+i$:

$$|z| = \sqrt{2}; \quad \arg z = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

Значит $\mathrm{Ln}(1+i) = \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$.

г) $\mathrm{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(i\frac{1}{2} + \sqrt{1-\frac{1}{4}}\right) = -i\mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Для

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}: \quad |z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1;$$

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

В результате получим $\arcsin\frac{1}{2}=-i\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\right)=\frac{\pi}{6}+2\pi k.$

д) Так как $\alpha^{\beta}=e^{\beta \operatorname{Ln}\alpha}$, то $i^{1+i}=e^{(1+i)\operatorname{Ln} i}$.

$$\operatorname{Ln} i=\ln|i|+i(\arg i+2\pi k)=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right).$$

Получаем

$$i^{1+i}=e^{(1+i)i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}=e^{(1-i)\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{2\pi k i}\,e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k)e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}=ie^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}.$$

8. Проверить, является ли функция $f(z)=ze^{z}$ дифференцируемой. Если да, то найти ее производную.

Решение. Проверим выполнение условий Коши–Римана (2.6). Выделим действительную и мнимую части функции $f(z)$:

$$ze^{z}=(x+iy)e^{x}(\cos y+i\sin y)=xe^{x}\cos y+$$

$$+xe^{x}i\sin y+iye^{x}\cos y-ye^{x}\sin y=$$

$$=\left(xe^{x}\cos y-ye^{x}\sin y\right)+i\left(xe^{x}\sin y+ye^{x}\cos y\right).$$

Действительная часть $u(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Мнимая часть $v(x, y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$. Находим частные производные функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y\left(e^x + xe^x\right) - y\sin ye^x = e^x(\cos y + x\cos y - y\sin y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xe^x\cos y + e^x(\cos y - y\sin y) = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^x\sin y - (\sin y + y\cos y)e^x =$$

$$= e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) = -e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y).$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sin y\left(e^x + xe^x\right) + e^x y\cos y = e^x(\sin y + x\sin y + y\cos y).$$

Следовательно, $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ условия (2.6) выполнены для всех точек плоскости OXY, значит функция $f(z) = ze^z$ является дифференцируемой на всей комплексной плоскости.

Найдем $f'(z)$: $\left(ze^z\right)' = z'e^z + \left(e^z\right)'z = e^z + ze^z = e^z(1 + z)$.

9. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее мнимая часть $v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3y^2x - 2y^2$.

Решение. Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2$, то из равенств (2.6) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -3x^2 - 12xy + 3y^2.$$

Из первого уравнения находим

$$u(x, y) = \int\left(6x^2 - 6xy - 6y^2\right)\mathrm{d}x = 2x^3 - 3x^2y - 6y^2x + \phi(y),$$

где $\phi(y)$ – произвольная функция.

Для определения функции $\phi(y)$ продифференцируем по y функцию $u(x, y)$ и подставим полученную производную во второе уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2 - 12xy + \phi'(y) = -3x^2 - 12xy + 3y^2 \Rightarrow \phi'(y) = 3y^2;$$

$$\phi(y) = \int 3y^2\mathrm{d}y = y^3 + c.$$

Следовательно, $u(x, y) = 2x^3 - 3x^2y - 6y^2x + y^3 + c,$ поэтому:

$$f(z) = 2x^3 - 3x^2y + 6y^2x + y^3 + c + i\left(x^3 + 6x^2y - 3y^2x - 2y^3\right) =$$

$$= 2\left(x^3 - 3y^2x + 3ix^2y - iy^3\right) + i\left(x^3 - 3y^2x + 3iyx^2 - iy^3\right) +$$

$$+c = 2z^3 + iz^3 + c = (2+i)z^3 + c.$$

2.5. Задачи для самостоятельного решения

Выполнить указанные действия над комплексными числами.

1) $(1+2i)(2-i) + \dfrac{8+6i}{1+i}$.

2) $(1+i)(2+3i)(5-4i)$.

3) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$.

4) $\dfrac{\left(\sqrt{10}+i\right)(17+19i)}{19-17i}$.

5) $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2} + \dfrac{3+2i}{i(6-8i)}(1+i)^2$.

6) $\dfrac{2-5i}{3+4i} \cdot \dfrac{(5+i)^2}{1+3i}$.

Найти значение выражения при заданном $x = x_0$.

7) $\left(1+2x+3x^2\right)\left(1+3x+2x^2\right)$, $x_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

8) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x$, $x_0 = 2 - i$.

Вычислить.

9) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

10) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{15}$.

11) $(2-2i)^5 + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^6$.

12) $\left(\dfrac{5-i}{2-3i}\right)^{20}$.

Вычислить значения корней, используя тригонометрическую форму комплексных чисел.

13) $\sqrt{-9i}$.

14) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$.

15) $\sqrt[3]{-1+i}$.

16) $\sqrt[3]{-64}$.

17) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющих следующим условиям.

18) $|z+1-i| = |z-1+i|$.

19) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - z}\right) = 2 - \operatorname{Im} z$.

20) $|z-1| < 4$.

21) $1 < |z-i| \le 2$.

22) $|z-2| = |z-3|$.

23) $\operatorname{Re}\dfrac{z-2}{z+2} = 0$.

24) Дана функция $f(z) = x^2 + iy^2$, где $z = x + iy$. Найти значение функции: а) $f(1+2i)$; б) $f(2-3i)$.

Вычислить значения следующих функций.

25) $\sin(2-3i)$.

26) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$.

27) $\operatorname{sh}(-2+i)$.

28) $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

29) $\ln(1-i)$.

30) $(1+i)^i$.

31) 4^i.

32) $\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}-i\right)$.

33) $\operatorname{Arsh}(-1)$.

Пользуясь условиями Коши–Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими и найти их производные.

34) $f(z)=\sin z$.

35) $f(z)=z\bar{z}$.

36) $f(z)=e^{z^2}$.

37) $f(z)=i\left(1-z^2\right)^{-2z}$.

38) $f(z)=\dfrac{z^2}{\operatorname{tg} z}$.

39) $f(z)=\bar{z}\left(z^2+2z\sin z\right)$.

Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной ее действительной $\left(u(x, y)\right)$ или мнимой $\left(v(x, y)\right)$ части:

40) $u(x, y)=x^2-y^2-x$.

41) $v(x, y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

42) $u(x, y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

43) $v(x, y)=\ln\left(x^2+y^2\right)+x-2y$.

44) $u(x, y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+2\sin x\operatorname{sh} y+x^3-3xy^2+y$.

Ответы

1) $11+2i$.

2) $15+29i$.

3) $\dfrac{4+3i}{5}$.

4) $-1+\sqrt{10}i$.

5) $-\dfrac{24+7i}{25}$.

6) $-\dfrac{1091+187i}{125}$.

7) $-18+5i\sqrt{3}$.

8) $-20-30i$.

9) $\dfrac{22}{159}-\dfrac{5}{318}i$.

10) $-128(1+i)$.

11) $-129+128i$.

12) -1024.

13) $\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

14) $\sqrt{3}+i$; $-1+i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}-i$; $1-i\sqrt{3}$.

15) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$; $\sqrt[6]{2}\left(-\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$; $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

16) -4; $2\left(1+i\sqrt{3}\right)$; $2\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

17) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\dfrac{19+24k}{36}\pi+i\sin\dfrac{19+24k}{36}\pi\right)$; $k=0,1,2$.

18) Прямая $y=x$.

19) Гипербола $xy=-1$.

20) Круг радиуса $R=4$ с центром в точке $z_0=1$.

21) Кольцо между двумя окружностями радиусов $R_1=1$ и $R_1=2$ (точки окружности радиуса $R_1=1$ исключаются).

22) Прямая, перпендикулярная к отрезку с концами в точках (2; 3) и проходящая через его середину.

23) Окружность радиуса $R=2$ с центром в точке $z=0$.

24) а) $1+4i$; б) $4+9i$.

25) $\sin\operatorname{ch}3-i\cos2\operatorname{sh}3$.

26) $-i\dfrac{1-e^{\pi}}{1+e^{\pi}}$.

27) $-\cos1\operatorname{sh}2+i\sin1\operatorname{ch}2$.

28) $\ln2+i\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

29) $\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{\pi}{4}i$.

30) $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\ln\sqrt{2}}$.

31) $e^{-2k\pi + i\ln 4}$.

32) $\frac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2} + 2k\pi\right) - \frac{i}{4}\ln 3$.

33) $\ln\sqrt{3} + k\pi i$.

34) Является $f'(z) = \cos z$.

35) Не является.

36) Является $f'(z) = 2ze^{z^2}$.

37) Является $f'(z) = -2iz - 2$.

38) Является

$$f'(z) = \frac{z\sin 2z - z^2}{\sin^2 z}.$$

39) Не является.

40) $f(z) = z^2 - z + ci$.

41) $f(z) = -\frac{1}{z} + c$.

42) $f(z) = z^2 + (5 - i)z - \frac{i}{z} + ci$.

43) $f(z) = 2i\ln z + iz - 2z + c$.

44) $f(z) = ze^z + 2i\cos z +$

$+z^3 - iz + ci$.

2.6. Интегрирование функций комплексного переменного

Понятие интеграла по комплексному переменному.

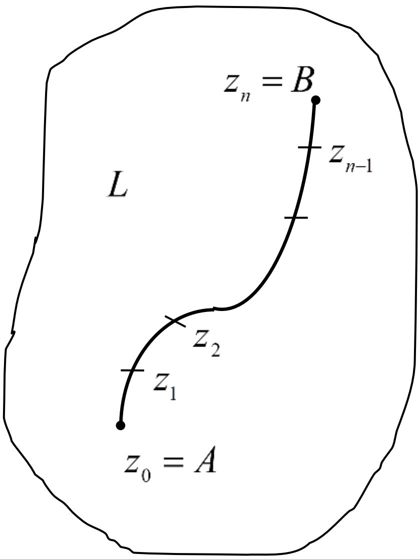


Рис. 2.3

Интеграл от непрерывной на гладкой кривой (контуре) L с началом $A = z_0$ и концом в точке $B = z_n$ (рис. 2.3) функции $f(z)(z = x + iy)$ определяется как предел интегральной суммы:

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k, \tag{2.7}$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Полагая, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, получим

$$\begin{aligned} \int_L f(z)\mathrm{d}z &= \int_L \big(u(x, y) + iv(x, y)\big)\mathrm{d}(x + iy) = \\ &= \int_L \big(u(x, y)\mathrm{d}x - v(x, y)\mathrm{d}y\big) + i\int_L \big(v(x, y)\mathrm{d}x + u(x, y)\mathrm{d}y\big), \end{aligned} \tag{2.8}$$

то есть интеграл (2.7) может быть записан в виде суммы двух криволинейных интегралов второго рода.

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то $\int_L f(z)\mathrm{d}z = \int_{t_0}^{t_1} z(t)z'(t)\mathrm{d}t$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0), \tag{2.9}$$

где $F(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, то есть $F'(z) = f(z)$ в области D.

Если функция $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в односвязной области D, а z_0 и z_1 – произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = \left[f(z)g'(z)\right]\Big|_{z_0}^{z_0} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)\mathrm{d}z. \qquad (2.10)$$

Замена переменных в интегралах от функций комплексного переменного. Пусть аналитическая функция $z=\phi(\omega)$ отображает взаимно однозначно контур L_1 в ω-плоскости на контур L в z-плоскости. Тогда $\int\limits_L f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{L_1} f\left\lfloor\phi(\omega)\right\rfloor\phi'(\omega)\mathrm{d}\omega.$ Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0, то целесообразна подстановка $z-z_0=re^{i\phi}$. В первом случае $\phi=\mathrm{const}$, а r – действительная переменная интегрирования.

Теорема Коши.

Теорема 2.2 **(основная теорема Коши).** Если функция $f(z)=u+iv$ является аналитической в односвязной области D, то для любого замкнутого контура L, лежащего в области D, справедливо равенство $\oint\limits_L f(z)\mathrm{d}z=0.$ Функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, если она является аналитической в некоторой области D', содержащей замкнутую область $\overline{D}$ (то есть область D и ее границу Γ).

Теорема 2.3 **(теорема Коши).** Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, то $\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$

Пусть область D ограничена внешним контуром γ_0 и внутренними контурами $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$, причем каждый из последних n

контуров лежит вне остальных и все они расположены внутри γ_0. В этом случае граница области D представляет собой сложный контур $\Gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \ldots + \gamma_n^-$. Тогда при движении по сложному контуру Γ точки области D остаются слева – положительное направление обхода (рис. 2.4).

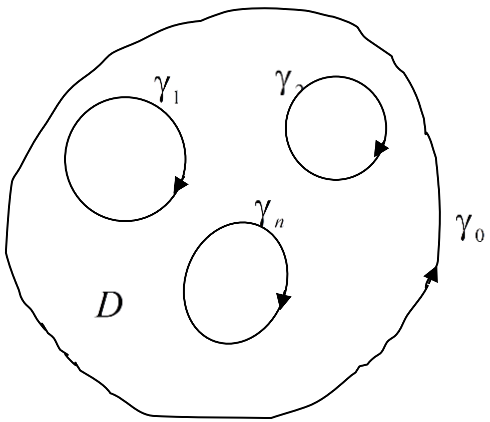


Рис. 2.4

***Теорема 2.4* (теорема Коши для многосвязной области).** Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, то $\oint\limits_{\gamma_0} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \oint\limits_{\gamma_n} f(z)dz.$

Интегральная формула Коши.

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром L, и на самом контуре, то справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz \quad (z_0 \notin D). \tag{2.11}$$

Обход кривой L совершается против часовой стрелки.

Если функция $f(z)$ аналогична в области D и на ее границе L, то для любого натурального n имеет место формула

$$f^{n}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\mathrm{dz}}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{2.12}$$

где $z_0 \notin D$; $z \in L$.

2.7. Ряды Лорана. Изолированные особые точки

Рядом Лорана *называется ряд вида*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \ldots + \frac{C_k}{(z-z_0)^k} + \ldots +$$

$$+\frac{C-1}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+C_n(z-z_0)^n+\ldots, \tag{2.13}$$

где z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости C;

C_n (коэффициент ряда Лорана) – заданные комплексные числа.

Ряд Лорана представляет собой сумму двух рядов:
ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-z_0)^n = \frac{C-1}{z-z_0}+\frac{C-2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{C-n}{(z-z_0)^n}+\ldots \tag{2.14}$$

и ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \ldots +$$

$$+C_n(z-z_0)^n+\ldots \tag{2.15}$$

Ряд Лорана *называется сходящимся в некоторой точке* $z \in C$, если в этой точке сходятся оба ряда, при этом сумма ряда (2.13) равна сумме двух слагаемых: суммы ряда (2.14) и суммы ряда (2.15).

Теорема 2.5 (Лорана). Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 \le r < |z - z_0| < R$, то в этом кольце она представима сходящимся рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n.$$

Причем это представление единственно: коэффициенты C_n однозначным образом определяется равенствами:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}}; \quad r < \rho < R; \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Иногда ряд Лорана, сходящийся к функции $f(z)$ в некотором кольце $0 \le r < |z - z_0| < R$, *называется рядом Лорана для* $f(z)$ *в точке* z_0.

Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то разложение $f(z)$ в ряд Лорана в этом круге представляет собой разложение $f(z)$ в ряд, который *называется рядом Тейлора.* В этом разложении отсутствуют слагаемые, содержащие отрицательные степени $(z - z_0)$:

$$f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \ldots + C_n(z - z_0)^n + \ldots$$

Точка z_0 *называется изолированной особой точкой функции* $f(z)$, если $f(z)$ однозначная и аналитическая функция в круговом кольце $0 < |z - z_0| < R$, а точка z_0 является особой точкой функции $f(z)$.

При этом, в самой точке z_0 функция может быть не определена.

Бесконечно удаленная точка *называется изолированной особой точкой для функции* $f(z)$, если $f(z)$ однозначная аналитическая функция в некотором кольце $r<|z-z_0|<+\infty \quad (z_0 \in C)$.

Главной частью ряда Лорана в окрестности изолированной особой точки (конечной или бесконечной) *называется сумма всех тех и только тех членов ряда Лорана, которые стремятся к бесконечности при стремлении* z *к особой точке* z_0 (то есть ряд (2.14) в случае $z_0 \neq \infty$).

Правильной частью ряда Лорана *называется сумма всех остальных членов ряда* (то есть ряд (2.15) в случае $z_0 \neq \infty$).

Таким образом:

1) в окрестности особой точки $z_0 \neq \infty$:

$$f(x)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-z_0)^n}_{\text{главная часть}}+\underbrace{C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n}_{\text{правильная часть}};$$

2) в окрестности бесконечного удаленной особой точки:

$$f(x)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-z_0)^n+C_0}_{\text{правильная часть}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n}_{\text{главная часть}}.$$

Точка z_0 *называется устранимой особой точкой*, если существует конечный предел функции $z \to z_0$.

Точка z_0 *называется полюсом* функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)|=+\infty$.

Точка z_0 *называется существенно особой точкой* функции $f(z)$, если при $z \to z_0$ предела не существует (конечного или бесконечного).

Изолированная особая точка (конечная или бесконечная) является устранимой особой точкой для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки равна нулю:

1) для $z_0 \neq \infty$: $f(z) = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \ldots$

2) для бесконечно удаленной особой точки:

$$f(z) = C_0 + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots; \qquad z_0 \in C.$$

Изолированная особая точка является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности этой точки содержит конечное (отличные от нуля) число ненулевых членов:

1) для $z_0 \neq \infty$:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n;$$

2) для бесконечно удаленной особой точки:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} C_n (z - z_0)^n + C_1(z - z_0) + \ldots + C_{m-1}(z - z_0)^{m+1} + C_m (z - z_0)^m.$$

Число m *называется порядком полюса*.

Изолированная особая точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, тогда главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит бесконечное число ненулевых членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$ (для особой точки $z_0 \neq \infty$) или с положительными степенями $(z - z_0)$ (для бесконечно удаленной точки).

2.8. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Основная теорема теории вычетов

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 *называется число* $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)\mathrm{d}z$,

где Γ – некоторый замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции и содержащий внутри себя единственную особую точку z_0. Вычет в устранимой особой точке равен нулю. В полюсе или существенно особой точке вычет равен коэффициенту C_{-1} ряда Лорана.

Пусть функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс первого порядка. В этом случае разложение функции в ряд Лорана имеет вид $f(z) = \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots$ Умножим это равенство на $(z-z_0)$ и перейдем к пределу при $z \to z_0$. Получим

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = C_{-1} = \lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)\,f(z)\right). \qquad (2.16)$$

Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi`(z_0)}$, то в простом полюсе $z = z_0$ удобно пользоваться формулой

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi`(z_0)}.$$

Если точка z_0 есть полюс порядка m функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]. \qquad (2.17)$$

Теорема 2.6 (основная теорема о вычетах). Если функция $f\left(z\right)$ является аналитической на границе Γ области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\oint\limits_{\Gamma} f\left(z\right)\mathrm{d}z = 2\pi i = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f\left(z\right).$$

Вычет функции в бесконечно удаленной особой точке равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении $f\left(z\right)$ в окрестности точки $z=\infty$, взятому со знаком минус:

$$\mathrm{res}\, f\left(\infty\right) = C_{-1}. \tag{2.18}$$

Теорема 2.7. Если функция $f\left(z\right)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю:

$$\mathrm{res}_{\infty}\, f\left(z\right) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f\left(z_k\right) = 0. \tag{2.19}$$

Примеры

1. Вычислить $\int\limits_L x\mathrm{d}z$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки 0 и $2+i$.

Решение. Так как L – отрезок прямой $y=\dfrac{x}{2}$ (рис. 2.5), то

$$\int\limits_L x\mathrm{d}\left(x+iy\right) = \int\limits_L x\mathrm{d}\left(x + i\frac{x}{2}\right) =$$

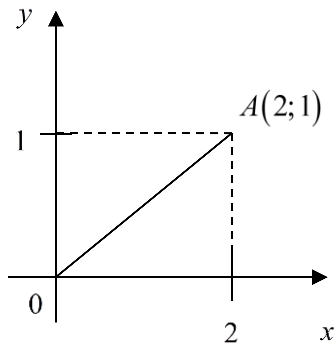


Рис. 2.5

$$=\int_0^2 x\mathrm{d}x+i\frac{1}{2}\int_0^2 x\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2+$$

$$+i\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=\frac{4}{2}+i\frac{4}{4}=2+i.$$

2. Вычислить $\int\limits_L\left(iz^2+\overline{z}\right)\mathrm{d}z,$ где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$iz^2+\overline{z}=i\left(x+iy\right)^2+x-iy=i\left(x^2+2ixy-y^2\right)+$$
$$+x-iy=ix^2-2xy-iy^2+x-iy=$$
$$=\left(x-2xy\right)+i\left(x^2-y^2-y\right).$$

Здесь $u\left(x,y\right)=x-2xy,$ $\nu\left(x,y\right)=x^2-y^2-y.$ На основании формулы (2.8):

$$\int\limits_L\left(iz^2+\overline{z}\right)\mathrm{d}z=\int\limits_L\left(x-2xy\right)\mathrm{d}x-\left(x^2-y^2-y\right)\mathrm{d}y+i\int\limits_L\left(x^2-y^2-y\right)\mathrm{d}x+$$
$$+\left(x-2xy\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x-2x^3-\left(x^2-x^4-x^2\right)2x\right)\mathrm{d}x+$$
$$+i\int_0^1\left(\left(x^2-x^4-x^2\right)+\left(x-2x^3\right)2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-2x^3+2x^5\right)\mathrm{d}x+$$
$$+i\int_0^1\left(2x^2-5x^4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}-2\cdot\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^6}{6}\right)\right|_0^1+i\left.\left(2\cdot\frac{x^3}{3}-5\cdot\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+i\left(\frac{2}{3}-1\right)=\frac{1}{3}-\frac{i}{3}.$$

3. Вычислить $\int\limits_L \left(z+2\overline{z}\right)\mathrm{d}z$, где L – дуга окружности $|z|=2$, для которой $-\dfrac{\pi}{2}\le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 2.6).

Решение. Положим $z=2\mathrm{e}^{i\phi}$, тогда $\overline{z}=2\mathrm{e}^{-i\phi}$ и $\mathrm{d}z=2i\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\varphi$.

Тогда $\int\limits_L \left(z+2\overline{z}\right)\mathrm{d}z=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\mathrm{e}^{i\phi}+2\mathrm{e}^{-i\phi}\right)2i\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4i\mathrm{e}^{2i\phi}+4i\right)\mathrm{d}\phi=$

$$=4i\left.\frac{\mathrm{e}^{2i\phi}}{2}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}+4i\phi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=2i\left(\mathrm{e}^{i\pi}-\mathrm{e}^{-e\pi}\right)+4i\pi=4\pi i.$$

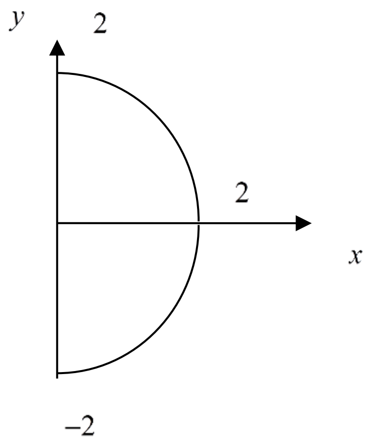


Рис. 2.6

4. Вычислить $\int\limits_0^i z\cos z\mathrm{d}z.$

Решение. Функция $z\cos z$ является аналитической на всей плоскости z, поэтому интеграл от нее не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки $z_1=0$ и $z_1=i$. На основании формулы интегрирования по частям (2.10) и формулы Ньютона–Лейбница (2.9), получаем

$$\int_0^i z\cos z dz = \int_0^i z(\sin z)' dz = z\sin z\Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = i\sin i + \cos z\Big|_0^i =$$

$$= i\frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} + \cos i - 1 = \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{1}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-1} + e^{1}\right) - 1 = e^{-1} - 1.$$

5. Вычислить интегралы по замкнутой кривой (обход кривой совершается против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_L \frac{z^2 - 3}{z + 1} dz$; $L: |z + 1| = \frac{1}{2}$; б) $\oint\limits_L \frac{dz}{\left(z^2 - 1\right)^3}$; $L: |z - 1| = 1$.

Решение. а) Так как функция $\frac{z^2 - 3}{z + 1}$ аналитична на всей комплексной плоскости C, кроме тоски $z = -1$, которая лежит внутри окружности $|z + 1| = \frac{1}{2}$, по интегральной формуле Коши (2.11) получим

$$f(z)\Big|_{z_0 = -1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z+1| = 1/2} \frac{z^2 - 3}{z + 1} dz,$$

откуда

$$\oint\limits_{|z+1| = 1/2} \frac{z^2 - 3}{z + 1} dz = 2\pi i \; f(-1) = 2\pi i\left(z^2 - 3\right)\Big|_{z=1} = 2\pi i(-2) = -4\pi i.$$

б) Подынтегральная функция аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z_1 = -1$; $z_2 = 1$. Точка z_1 не лежит ни внутри области интегрирования, ни на ее границе. Точка z_2 принадлежит области интегрирования. Согласно формуле (2.12), имеем

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{\left(z^2 - 1\right)^3} = \oint\limits_{|z-1|=1} \frac{1/(z+1)^3}{(z - 1)^2} dz =$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z+1)^3}\right)''\Bigg|_{z_0=1}=\pi i\frac{12}{(z+1)^5}\Bigg|_{z_0=1}=\pi i\frac{12}{32}=\frac{3}{8}\pi i.$$

в) В области, ограниченной окружностью $|z|=3$, имеем точки $z_1=1; z_2=-2$, в которых знаменатель обращается в ноль. Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z=1; z=-2$ достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z|<3$ (рис. 2.7).

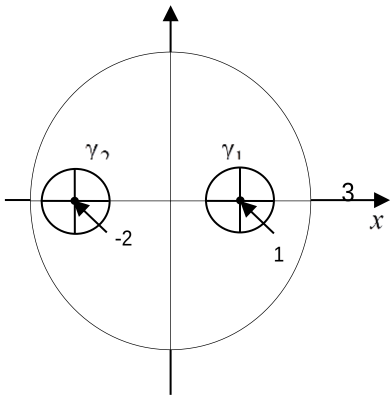


Рис. 2.7

В трехсвязной области, ограниченной окружности $|z|=3$, γ_1 и γ_2 подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{\operatorname{sh}\pi z dz}{(z-1)(z+2)^2}=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\operatorname{sh}\pi z dz}{(z-1)(z+2)^2}+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\operatorname{sh}\pi z dz}{(z-1)(z+2)^2}=$$

$$=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\operatorname{sh}\pi z/(z+2)^2}{z-1}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\operatorname{sh}\pi z/(z-1)}{(z+2)^2}dz=2\pi i\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z+2)^2}\Bigg|_{z=1}+$$

$$+\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\pi z}{z-1}\right)'\Bigg|_{z=2}=2\pi i\frac{\text{sh}\pi}{9}+2\pi i\frac{\pi(z-1)\text{ch}\pi z-\text{sh}\pi z}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=-2}=$$

$$=2\pi i\left(\frac{\text{sh}\pi}{9}+\frac{1}{9}\text{sh}2\pi-\frac{\pi}{3}\text{ch}2\pi\right)=\frac{2\pi i}{9}(\text{sh}\pi+\text{sh}2\pi-2\pi\text{ch}2\pi).$$

6. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ в ряд Лорана в окрестности особой точки $z_0=1$.

Решение. Обозначим $t=z-1$ и применим формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{1}{t(t-2)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t\left(1-\frac{t}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2t}\left(1+t+\frac{t^2}{2^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{\left(t/2\right)^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{t}{2^3\cdot 2!}-\frac{t^2}{2!\cdot 3!}-\ldots-\frac{t^{n-1}}{2^{n+1}n!}-\ldots=-\frac{1}{2(z-1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}n!}.$$

7. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$: а) в кольце $0<|z|<1$; б) в кольце $1<|z|<+\infty$.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}. \qquad (2.20)$$

а) Преобразуем (2.20) следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{1-(-z)}=\frac{1}{z}-\left(1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n\right)=\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

б) Если $|z|>1$, то $\left|1/z\right|<1$, поэтому

$$f(x)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z\left(1-\left(-1/z\right)\right)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+2}}.$$

8. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ следующие функции:

а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

Решение. а) Для любого комплексного z:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Поэтому

$$\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}.$$

б) Так как $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, то

$$\frac{1}{z^2}(1-\cos z) = \frac{1}{z^2}\left(1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^4 \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-2}}{(2n)!}.$$

9. Найти все конечные особые точки функции $f(z)$ и определить их характер (для полюса указать порядок)

а) $f(z) = \frac{z+2}{z(z-1)^2}$; б) $f(z) = z\cos\frac{1}{z}$; в) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$.

Решение. а) Особые точки функции: $z_1 = 0$ или $z_2 = 1$.

Так как $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z+2}{z(z-1)^2} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{(z+2)\big/(z-1)^2}{z^1} = \frac{2}{0} = \infty$, то точка $z = 0$ является полюсом первого порядка. Аналогично $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z+2}{z(z-1)^2} =$ $= \lim\limits_{z\to 1} \frac{(z+2)\big/z}{(z-1)^2} = \frac{3}{0^2} = \infty$. Поэтому точка $z = 1$ является полюсом порядка 2.

б) Используя разложение функции в ряд Лорана, получим

$$z\cos\frac{1}{z} = z\left(1 - \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^4 \cdot 4!} - \frac{1}{z^6 \cdot 6!} + \ldots\right) =$$

$$= z - \frac{1}{z \cdot 2!} + \frac{1}{z^3 \cdot 4!} - \frac{1}{z^5 \cdot 6!} + \ldots$$

Так как разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет в главной части бесконечности множество членов, то точка $z = 0$ является существенно особой точкой для $f(z)$.

в) Особой точкой функции является точка $z_0 = 0$. Вычислим предел функции при $z \to 0$ $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \left| e^z - 1 \sim z \right| = \lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{z} = 1$. Значит точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

10. Исследовать поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки: $f(z) = \frac{z^2}{3 + z^2}$.

Решение. Сделаем подставку $z = \frac{1}{t}$. Тогда функция $z = \frac{z^2}{3 + z^2}$ примет вид $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{3t^2 + 1}$. Вычислим предел функции $f\left(1/t\right)$, устремив t к нулю: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{3t^2 + 1} = 1$. Поэтому точка $z_0 = \infty$ является устранимой особой точкой.

11. Найти вычеты во всех особых точках функции, включая бесконечно удаленную особую точку: $f(z) = \frac{e^{-2z}}{z^2 (z - 4i)}$.

Решение. Конечными особыми точками функции $f(z)$ являются: $z_1 = 0$ – полюс второго порядка; $z_2 = 4i$ – полюс первого порядка. Найдем вычет в точке $z_1 = 0$:

$$\operatorname*{rez}_{z_1} f(z) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^{-2z}}{z^2 (z - 4i)} z^2 \right)' = \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^{-2z}}{z - 4i} \right)' =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{-2e^{-2z} (z - 4i) - 2e^{-2z}}{(z - 4i)^2} = \frac{1 - 8i}{16}.$$

В точке $z_2 = 4i$ вычет равен

$$\underset{z_2}{\operatorname{rez}} f(z) = \lim_{z\to 4i} \frac{e^{-2z}}{z^2(z-4i)}(z-4i) =$$

$$= \lim_{z\to 4i} \frac{e^{-2z}}{z^2} = -\frac{1}{16}e^{-8i} = -\frac{1}{16}(\cos 8 + i\sin 8).$$

Так как (согласно теореме 2.7) $\underset{\infty}{\operatorname{rez}} f(z) + \underset{z_k}{\operatorname{rez}} f(z_k) = 0,$ то

$$\underset{\infty}{\operatorname{rez}} f(z) = -\left(\frac{1-8i}{16} - \frac{1}{16}(\cos 8 + i\sin 8)\right) = \frac{1}{16}(\cos 8 - 1) + \frac{i}{18}(8 - \sin 8).$$

12. Вычислить с помощью вычетов $\oint\limits_L \frac{\sin z dz}{z\left(z-\pi/2\right)^2}$, где L: $|z| = 2.$

Решение. Особыми точками подынтегральной функции являются $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi/2$, причем так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z\left(z-\pi/2\right)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \lim_{z\to 0} \frac{1}{\left(z-\pi/2\right)^2} = 1,$$

$$\frac{1}{\pi^2/4} = \frac{4}{\pi},$$

и

$$\lim_{z\to \pi/2} \frac{\sin z}{z\left(z-\pi/2\right)^2} = \frac{1/\frac{\pi}{2}}{0^2} = \infty,$$

то точка $z_1=0$ является устранимой особой точкой, а $z_2=\pi/2$ – полюсом второго порядка. Значит $\underset{z_1=0}{\operatorname{rez}} f(z)=0;$ $\underset{z_2=\pi/2}{\operatorname{rez}} f(z)=\lim\limits_{z=\pi/2}\left(\frac{\sin t}{z}\right)'=$ $=\lim\limits_{z=\pi/2}\frac{\cos z\cdot z-\sin z}{z^2}=-\frac{4}{\pi^2}$. Так как точка $\frac{\pi}{2}$ лежит внутри окружности $|z|=2,$ то

$$\oint\limits_{l}\frac{\sin zdz}{z\left(z-\pi/2\right)^2}=2\pi i\underset{\pi/2}{\operatorname{rez}} f(z)=2\pi i\left(-\frac{4}{\pi^2}\right)=-\frac{8i}{\pi}.$$

2.9. Задачи для самостоятельного решения

Вычислить.

1) $\int\limits_{l}|z|\mathrm{d}z,$ где

а) l дуга окружности $|z|=1$ от точки $z_1=1$ до точки $z_2=-1;$

б) l отрезок прямой от точки $z_1=1$ до точки $z_2=-1;$

в) l отрезок прямой от точки $z_1=1$ до точки $z_2=2-2i.$

2) $\int\limits_{l}\operatorname{Re}z\operatorname{Im}\left(z^2\right)\mathrm{d}z,$ где l – дуга параболы $y=2x^3$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+2i.$

3) $\int\limits_{l}z\,\overline{z}\mathrm{d}z,$ где l – дуга параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i.$

4) $\int\limits_{l}(1+2i-\overline{z})\mathrm{d}z,$ где l – отрезок прямой $y=2x$ от точки $z_1=1+2i$ до $z_2=2+4i.$

5) $\int\limits_{l}\overline{z}^3\mathrm{d}z,$ где l – дуга параболы $x=y^2,$ соединяющая точки 0 и $1+i.$

6) $\int\limits_{l}(2z+1)\bar{z}dz$, где l – дуга окружности $|z|=1$ от точки $z_1=1$ до точки $z_2=-1$.

7) $\int\limits_{l} z\,|\bar{z}|dz$, где l – дуга окружности $|z|=1$ от точки $z_1=1$ до точки $z_2=e^{2\pi i}$.

8) $\int\limits_{l} \operatorname{Im} z dz$, где l – дуга окружности $|z|=3$ от точки $z_1=3$ до точки $z_2=3e^{2\pi i}$.

Вычислить, используя аналитичность подынтегральной функции.

9) $\int\limits_{1}^{i}\left(iz^3+3\right)dz.$

10) $\int\limits_{0}^{\pi-\pi i} \operatorname{ch} z dz.$

11) $\int\limits_{1}^{i}\left(z^2-3iz\right)dz.$

12) $\int\limits_{0}^{i}(z-1)e^{-z}dz.$

13) $\int\limits_{0}^{1+i} \sin z\cos z dz.$

С помощью интегральной формулы Коши вычислить следующие интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки).

14) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^2+2z}dz.$

15) $\oint\limits_{|z+i|=1}\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}dz.$

16) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z}{z^2+2z-3}dz.$

17) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z\operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2}dz.$

18) $\oint\limits_{|z-1|=1}\dfrac{(z+2)dz}{(z-1)^3 z(z+1)}.$

19) $\oint\limits_{|z+2i|=1/3}\dfrac{\operatorname{ch} z\pi dz}{(z-1)\left(z^2+4\right)^2}.$

Разложить функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$.

20) $\dfrac{\sin^2 z}{z}.$

21) $z^3e^{1/z}.$

22) $\dfrac{1+\cos z}{z^4}$.

23) $\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$.

Разложить в ряд Лорана функции в окрестности указанных точек.

24) $e^{\frac{3z+4}{z+1}}$, $z_0=-1$.

25) $\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

26) $\dfrac{z-2}{(z-1)(z+2)}$, $z_0=-2$.

27) $\dfrac{1}{(z-i)(z+1)}$, $z_0=i$.

Разложить функции в ряд Лорана в указанных кольцах.

28) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$; а) $2<|z|<3$; б) $3<|z|<+\infty$.

29) $\dfrac{2}{z^2+1}$; $1<|z+2|<3$.

30) $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$; $2<|z-1|<+\infty$.

31) $\dfrac{1}{z^2-7z+12}$; $3<|z|<4$.

32) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$; $1<|z-1|<2$.

Найти особые точки функций и выяснить их характер.

33) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+2)(z+3)(z-1)}$.

34) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^4}$.

35) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^4}$.

36) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+2}$.

37) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^6+2z^5+z^4}$.

Исследовать поведение функции в окрестности бесконечно удаленной особой точки.

38) $f(z) = \dfrac{z+2}{z(z-1)^2}$.

39) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3(z+\pi)}$.

40) $f(z) = \dfrac{2z^5 - z + 1}{z^2 + z + 8}$.

41) $f(z) = e^{-z}$.

Найти вычеты функции во всех конечных особых точках.

42) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z + 3}{1 - 2z}$.

43) $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)^2(z+1)}$.

44) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+i)^2}$.

45) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^3 - z^5}$.

46) $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$.

47) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z+2)}$.

48) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}$.

49) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^3(z-3)}$.

50) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+1)(z-2)^2(z-3)^3}$.

Найти вычет в бесконечно удаленной особой точке.

51) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$.

52) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z+1)}$.

53) $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$.

54) $f(z) = \dfrac{z-1}{(z+1)(z-2i)}$.

55) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(3z-\pi)}$.

Вычислить интегралы по заданному контуру l, используя основную теорему о вычетах.

56) $\oint\limits_{l} \dfrac{dz}{(z-1)(z+2)}$, $l\colon |z+2|=1.$

57) $\oint\limits_{l} \dfrac{e^{-2z}}{z^2(z-4i)}$, $l\colon |z|=\dfrac{1}{2}.$

58) $\oint\limits_{l} \dfrac{\cos z dz}{z\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^2}$, $l\colon |z|=2.$

59) $\oint\limits_{l} \dfrac{z+2}{z(z-4)^2}$, $l\colon |z-4|=1.$

60) $\oint\limits_{l} \dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz$, $l\colon |z-i|=3.$

Ответы

1) а) -2;
   б) 0;
   в) $2\sqrt{2}|1-i|$.

2) $\dfrac{4}{7}+3i.$

3) $\dfrac{8}{15}+i\dfrac{5}{6}.$

4) $-\dfrac{21}{2}+4i.$

5) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{12}{35}i.$

6) $-4+i-\pi.$

7) $0.$

8) $-9\pi.$

9) $-3+3i.$

10) $-\operatorname{sh}\pi.$

11) $\dfrac{-1+i}{3}.$

12) $1-\cos 1+i(\sin 1-1).$

13) $\dfrac{1-\cos 2\operatorname{ch}}{4}+i\cdot\dfrac{\sin 2\operatorname{sh} 2}{4}.$

14) $\pi i.$

15) $\dfrac{i}{2}e.$

16) $-\pi i.$

17) $0.$

18) $-\dfrac{\pi i}{4}.$

19) $\dfrac{22i-21}{50}.$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n-1}.$

21) $z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!\cdot z}+\ldots$

22) $\frac{2}{z^4}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots$

23) $\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!\cdot z}+\frac{1}{3!}-\frac{z}{4!}+\ldots$

24) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^3}{n!}\cdot\frac{1}{(z+1)^n}.$

25) $1-\frac{1}{z-1}.$

26) $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+2}}(z+2)^n.$

27) $-\frac{1}{(z-i)(1-i)}$

$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+2}(n+1)!}.$

28) а) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}.$

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{}{(z+2)^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^n+1}.$

30) $\frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n-2}{(z-1)^n}.$

31) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}.$

32) $\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^n}+\frac{1}{9}\times$

$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{2^{n+2}}(z-1)^n.$

33) Полюсы первого порядка: $z_1=-2$; $z_2=-3$; $z_2=3$.

34) Полюсы первого порядка: $z=\pm 2$; устранимая особая точка: $z=\pi$.

35) Полюс четвертого порядка: $z=-1$.

36) Существует особая точка: $z=-2$.

37) Полюс четвертого порядка $z=0$; полюс первого порядка $z=-1$.

38) Устранимая особая точка.

39) Существенно особая точка.

40) Полюс третьего порядка.

41) Существенно особая точка.

42) $\operatorname*{rez}\limits_{z=1/2} f(z) = -\dfrac{\operatorname{ch} 1/2 + 3}{2}$.

43) $\operatorname*{rez}\limits_{z=-1} f(z) = -\dfrac{1}{9}$; $\operatorname*{rez}\limits_{z=1} f(z) = \dfrac{1}{9}$.

44) $\operatorname*{rez}\limits_{z=i} f(z) = -\dfrac{i}{4}$; $\operatorname*{rez}\limits_{z=-i} f(z) = \dfrac{i}{4}$.

45) $\operatorname*{rez}\limits_{z=0} f(z) = 2$; $\operatorname*{rez}\limits_{z=1} f(z) = \dfrac{3}{2}$; $\operatorname*{rez}\limits_{z=-1} f(z) = -\dfrac{1}{2}$.

46) $\operatorname*{rez}\limits_{z=0} f(z) = 0$; $\operatorname*{rez}\limits_{z=\pi/4} f(z) = \dfrac{4}{\pi}$.

47) $\operatorname*{rez}\limits_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{8}$; $\operatorname*{rez}\limits_{z=-2} f(z) = -\dfrac{e^{-2}}{8}$.

48) $\operatorname*{rez}\limits_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{6}$.

49) $\operatorname*{rez}\limits_{z=0} f(z) = -\dfrac{1}{6}$; $\operatorname*{rez}\limits_{z=3} f(z) = \dfrac{2\sin^2 3/2}{27}$.

50) $\operatorname*{rez}\limits_{z=i} f(z) = \dfrac{1}{125} + \dfrac{i}{250}$; $\operatorname*{rez}\limits_{z=2} f(z) = \dfrac{61-23i}{25}$;

$\operatorname*{rez}\limits_{z=3} f(z) = \dfrac{1813}{250} - \dfrac{358}{125}i$.

51) 0.

52) $-e^{-1}$.

53) $-\dfrac{1}{120}$.

54) -1.

55) $\dfrac{3}{2\pi^2}$.

56) $-\dfrac{2\pi i}{3}$.

57) $-\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{31}{8} + i\right)$.

58) $\dfrac{2i}{\pi}\left(16 - 2\sqrt{2}(\pi + 4)\right)$.

59) $-\dfrac{\pi i}{4}$.

60) $2\left(1 - e^{-1}\right)\pi i$.

3. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Краткие теоретические сведения

Операционное исчисление позволяет решать различные математические задачи: нахождение интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и уравнений в частных производных и т. п. В основе методов операционного исчисления лежит идея интегральных преобразований (преобразование Лапласа), позволяющих свести обыкновенные дифференциальные и интегральные уравнения к алгебраическим (операторным) уравнениям, а дифференциальные уравнения в частных производных – к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Оригиналы и изображения функций по Лапласу.

***Определение** 1.* Будем действительную функцию действительного аргумента $f(t)$ называть *оригиналом*, если она удовлетворяет трем требованиям.

1. $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$.

2. $f(t) < Me^{s_0 t}$, при $t > 0$, где $M > 0$, $s_0 \geq 0$ – некоторые действительные постоянные; s_0 называют *показателем* роста функции $f(t)$. В этом случае говорят, что функция $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции.

3. На любом конечном отрезке $[a, b]$ положительной полуоси Ot функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то есть:

1) ограничена;

2) либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва I рода;

3) имеет конечное число экстремумов.

Функции, удовлетворяющие этим трем требованиям, называются в операционном исчислении *изображаемыми по Лапласу* или *оригиналами*.

Простейшим оригиналом является *функция Хевисайда*, определяемая следующим образом:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } t > 0, \\ 0, \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

Определение 2. *Изображением по Лапласу* функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая соотношением

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}. \qquad (3.1)$$

Выражение «функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$» будем записывать

$$F(p) = L\{f(t)\} \text{ или } F(p) \to f(t).$$

Интеграл в формуле (3.1) называют *интегралом Лапласа* для функции $f(t)$, переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ – *преобразованием Лапласа*.

Свойства преобразования Лапласа.

Свойство линейности

Если $F(p) \to f(t)$, $\phi(t) \to \Phi(p)$, $[a, b]$ любые постоянные, то

$$af(t) + b\phi(t) \to aF(p) + b\Phi(p).$$

Свойство подобия

Если $f(t) \to F(p)$, то для любого $\omega > 0$ $f(\omega t) \to \dfrac{1}{\omega}F\left(\dfrac{p}{\omega}\right)$.

Теорема смещения

Если $f(t) \to F(p)$ и α – комплексное число, то $e^{-\alpha t}f(t) \to F(p+\alpha)$ или $e^{\alpha t}f(t) \to F(p-\alpha)$.

Теорема запаздывания

Если $f(t) \to F(p)$ при значениях, и $t < a$, то для всякого $a > 0$ $f(t-a) \to e^{-pa}F(p)$.

Теорема о дифференцировании оригинала

Если $f(t) \to F(p)$ и $f'(t)$, $f''(t)$,..., $f^{(n)}(t)$ – оригиналы, то

$$f'(t) \to pF(p) - f(0),\ f''(t) \to p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \ldots$$

$$f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Теорема о дифференцировании изображения

Если $f(t) \to F(p)$, то

$$F'(p) \to (-t) f(t), F''(p) \to (-t)^2 f(t), \ldots \quad F^{(n)}(p) \to (-t)^n f(t).$$

Теорема об интегрировании оригинала

Если $f(t) \to F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \to \dfrac{F(p)}{p}$.

Теорема об интегрировании изображения

Если $f(t) \to F(p)$ и интеграл $F(q)\mathrm{d}q$ является сходящимся, то $\dfrac{f(t)}{t} \to \int\limits_p^\infty F(q)\mathrm{d}q$, где $\int\limits_p^\infty F(q)\mathrm{d}q = \lim\limits_{\mathrm{Re}\, P\to\infty} \int\limits_p^P F(q)\mathrm{d}q$.

Таблица изображений основных функций

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*
1	1	$\dfrac{1}{p}$	7	$\mathrm{e}^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	8	$\mathrm{e}^{at}\cos bt$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
3	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	9	$t\sin bt$	$\dfrac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
4	$t^n\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	10	$t\cos bt$	$\dfrac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
5	$\sin bt$	$\dfrac{b}{p^2+b^2}$	11	$\mathrm{sh}bt$	$\dfrac{b}{p^2-b^2}$
6	$\cos bt$	$\dfrac{p}{p^2+b^2}$	12	$\mathrm{ch}bt$	$\dfrac{p}{p^2-b^2}$

Свёртка функций. Теорема умножения (Бореля) и интеграл Дюамеля.

Пусть две функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны для значений $t > 0$. Сверткой этих функций называется новая функция от t, определяемая в виде интеграла

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3.2}$$

Операция свертывания функций обладает свойством коммутативности:

$$f * g = g * f, \text{ то есть } \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Теорема 3.1 (теорема Бореля). Если $f(t) \to F(p)$, $g(t) \to G(p)$, то произведение изображений $F(t)G(p)$ является изображением свертки оригиналов:

$$F(p)G(p) \leftarrow f(t) * g(t).$$

Иначе говоря, умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов этих изображений.

Теорема 3.2 (интеграл Дюамеля). Пусть $f(t)$ и $g(t)$ функции-оригиналы, причем производная $g'(t)$ также функция-оригинал. Тогда имеет место соответствие

$$pF(p)G(p) \leftarrow g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Для ***нахождения оригиналов по заданным изображениям*** можно использовать несколько способов.

Разложение на простейшие дроби

Если $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ есть дробно-рациональная функция, причем степень числителя $A(p)$ меньше степени знаменателя $B(p)$, то эту дробь разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби либо непосредственно по формуле (3.1), либо по таблице из пункта 3.

Первая теорема разложения

Если изображение искомой функции может быть разложено в степенной ряд по степеням $\dfrac{1}{p}$, то есть

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}$$

(причем этот ряд сходится к $F(p)$ при $|p|>R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{p^{n+1}}\right|\neq\infty$), то оригинал имеет вид

$$f(t)=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{t^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!},$$

(причем ряд сходится при всех значениях t).

Вторая теорема разложения

Если изображение есть дробно-рациональная функция $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, то оригиналом является функция

$$f(t)=\sum_{p_k}\operatorname{res}_{p_k}\left\lfloor F(p)e^{pt}\right\rfloor, \qquad (3.3)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам p_k функции $F(p)$.

Следствие 1. Если $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ – рациональная функция и все ее полюсы простые, то

а) $f(t)=\sum\limits_{p_k}\dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$;

б) так как $\operatorname*{res}\limits_{p=p_k}F(p)=\lim\limits_{p\to p_k}(p-p_k)F(p)$, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to p_k}\big((p-p_k)F(p)\big)e^{p_k t}.$$

Следствие 2. Если $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ – правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(r_k-1)!}\lim\limits_{p\to p_k}\dfrac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left\{F(p)e^{pt}(p-p_k)^{r_k}\right\}$, где p_k – полюсы $F(p)$ кратности r_k; сумма берется по всем полюсам $F(p)$ (p_k – корни функции $R(p)$).

Использование изображений функций

Дробь $\dfrac{A(p)}{B(p)}$ можно представить в виде произведения дробей, являющихся изображениями некоторых функций, после чего применяется теорема Бореля.

Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем ДУ.

Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x^1+a_nx=f(t), \tag{3.4}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0)=x_0;\ x'(0)=x_0;\ ...;\ x^{(n-1)}(0)=x_0.$$

Будем предполагать, что искомая функция $x(t)$, все ее производные, а также функция $f(t)$ являются оригиналами. Пусть $x(t)\leftarrow X(p)$; $f(t)\leftarrow F(p)$. По теореме дифференцирования оригиналов:

$$x'(t)\leftarrow pX(p)-x_0;\quad x''(t)\leftarrow p^2X(p)-px_0-x_0';...^{(n-1)}(t)\leftarrow$$
$$p^{n-1}X(p)-p^{n-2}x_0-...-x^{(n-2)};$$
$$x^{(n)}(t)\leftarrow p^nX(p)-p^{n-1}x_0-...-x_0^{(n-1)}.$$

Перейдем от дифференциального уравнения (3.4) к уравнению в изображениях:

$$p^nX(p)-p^{n-1}x_0-...-x_0^{(n-1)}+a_1\left(p^{n-1}X(p)-p^{n-2}x_0-...-x_0^{(n-2)}\right)+$$
$$+...+a_{n-1}\left(pX(p)-x_0\right)+a_nX(p)=F(p)$$

или

$$Q_n(p)X(p)=F(p)+R_{n-1}(p).$$

Находим так называемое операторное решение уравнения

$$X(p)=\frac{F(p)+R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}.$$

Найдя оригинал $x(t)$ по его изображению $X(p)$, получаем решение задачи Коши для дифференциального уравнения (3.4).

Метод интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений сходен с методом интегрирования одного уравнения. В результате применения преобразования Лапласа получается система алгебраических уравнений для изображений.

Примеры

1. Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases} t;\ t\in[0;1] \\ 1;\ t\in(1;2] \\ 0;\ t\notin[0;2] \end{cases},$$

используя преобразование Лапласа.

Решение. Согласно формуле (3.1.) имеем

$$F(p)=\int_0^1 t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t+\int_1^2 \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\left.\frac{-t\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right|_0^1-\left.\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p^2}\right|_0^1-\left.\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right|_1^2=\frac{-\mathrm{e}^{-p}}{p}-\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2}+$$

$$+\frac{1}{p^2}-\frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p}-\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p}=\frac{1}{p^2}-\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2}-\frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p}=\frac{1-\mathrm{e}^{-p}-p\mathrm{e}^{-2p}}{p^2}.$$

2. Используя таблицу изображений и свойство линейности преобразования Лапласа, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=2+t^3+t\sin 2t;$ б) $f(t)=\cos^2 t+\mathrm{sh}t\cdot \mathrm{e}^{2t}.$

Решение.

а) По таблице находим

$$1\to\frac{1}{p};\quad t^3\to\frac{3!}{p^4}=\frac{6}{p^4};\quad t\sin 2t\to\frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}.$$

Следовательно, по свойству линейности преобразования Лапласа, получим

$$2+t^3+t\sin 2t=2\cdot 1+t^3+t\sin 2t\to\frac{2}{p}+\frac{6}{p^4}+\frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}.$$

б) Используя известную тригонометрическую формулу понижения степени, имеем

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Так как $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, то $\operatorname{sh} t e^{2t} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} e^{2t} = \dfrac{1}{2}e^{3t} - \dfrac{1}{2}e^t$.

Тогда

$$\cos^2 t + \operatorname{sh} t e^{2t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \to$$

$$\to \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-1}\right).$$

3. Найти изображение оригиналов, используя теорему смещения:

а) $f(t) = te^{-t}\cos 3t$; б) $f(t) = e^{2t}\sin^2 t$.

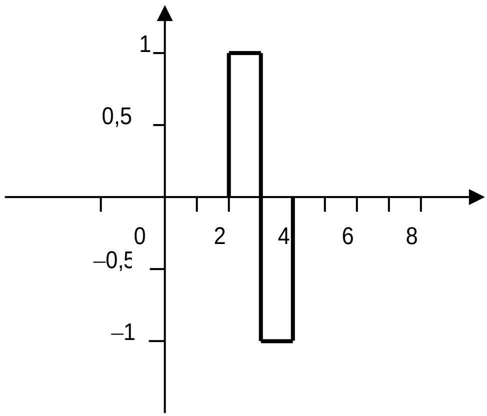
Решение. а) Так как $t\cos 3t \to \dfrac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}$, то по теореме смещения $(\alpha = 1)$, будем иметь

$$te^{-t}\cos 3t \to \frac{(p+1)^2 - 9}{\left((p+1)^2+9\right)^2} = \frac{p^2+2p-8}{\left(p^2+2p+10\right)^2}.$$

б) $$e^{2t}\sin^2 t = e^{2t}\frac{1-\cos 2t}{2} = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t}\cos 2t \to$$

$$\to \frac{1}{2(p-2)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+4} = \frac{1}{2(p-2)} - \frac{p-2}{2\left(p^2-4p+8\right)}.$$

4. Найти изображение функции, заданной следующим графиком.



Решение. Согласно графику функции (обозначим ее через $f(t)$), имеем

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\le 2\\ 1, & 2<t\le 3\\ -1, & 3<t\le 4\\ 0, & t>4\end{cases}.$$

Поэтому ее изображение можно найти, используя формулу преобразования Лапласа:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_2^3 e^{-pt}dt-\int_3^4 e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{1}{p}\left(-e^{-3p}+e^{-2p}+e^{-4p}-e^{-3p}\right)=$$

$$=\frac{e^{-2p}}{p}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right)=\frac{\left(e^{-p}\left(1-e^{-2p}\right)\right)^2}{p}=\frac{\left(e^{-p}-e^{-2p}\right)^2}{p}.$$

5. Найти изображение функции, используя теорему о дифференцировании изображения:

$$f(t)=t^2\mathrm{sh}t.$$

Решение. По таблице изображений имеем $\mathrm{sh}t \to \dfrac{1}{p^2-1}$.

Отсюда $t^2\mathrm{sh}t \to \left(\dfrac{1}{p^2-1}\right)''$.

Находим

$$t^2\mathrm{sh}t \to \left(\frac{1}{p^2-1}\right)' = \frac{-2p}{\left(p^2-1\right)^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{p^2-1}\right)'' = \left(\frac{-2p}{\left(p^2-1\right)^2}\right)' =$$

$$= \frac{-2\left(p^2-1\right)^2 + 2p\,2\left(p^2-1\right)2p}{\left(p^2-1\right)^4} = \frac{-2\left(p^2-1\right)+8p^2}{\left(p^2-1\right)^3} = \frac{10p^2+2}{\left(p^2-1\right)^3}.$$

Окончательно $t^2\mathrm{sh}t \to \dfrac{10p^2+2}{\left(p^2-1\right)^3}$.

6. Не вычисляя интегралы, найти изображение $\int\limits_0^t \tau e^{\tau} d\tau$.

Решение. Воспользуемся теоремой об интегрировании оригинала: $\tau e^{\tau} d\tau \to \dfrac{1}{(p-1)^2}$. Значит, $\int\limits_0^t \tau e^{\tau} d\tau \to \dfrac{1}{(p-1)^2} : p = \to \dfrac{1}{p(p-1)^2}$.

7. Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{\cos 3t-\cos t}{t}$.

Решение. По таблице изображений найдем изображение функции

$$\cos 3t - \cos t = \frac{p}{p^2+9} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Тогда по теореме об интегрировании изображения имеем

$$f(t) = \frac{\cos 3t - \cos t}{t} \to \int\limits_p^\infty \frac{q}{q^2+9}\mathrm{d}q - \int\limits_p^\infty \frac{q}{q^2+1}\mathrm{d}q =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|q^2+9\right|\Bigg|_p^\infty - \frac{1}{2}\ln\left|q^2+1\right|\Bigg|_p^\infty = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\infty}\left[\ln\frac{q^2+9}{q^2+1}\right]\Bigg|_p^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \ln\frac{q^2+9}{q^2+1}\right] = -\frac{1}{2}\ln\frac{q^2+9}{q^2+1} = \ln\sqrt{\frac{q^2+1}{q^2+9}}.$$

8. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$\frac{4}{(p+1)^4} + \frac{3p-1}{p^2+4p+29} + \frac{e^{-p}}{(p-2)^3}.$$

Решение. Преобразуем $F(p)$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться таблицей изображений:

$$\frac{4}{(p+1)^4} = \frac{4}{3!}\cdot\frac{3!}{(p+1)^4} \leftarrow e^{-t}t^3.$$

Прежде чем преобразовывать второе слагаемое, выделим полный квадрат в знаменателе для того, чтобы воспользоваться свойством линейности преобразования Лапласа:

$$\frac{3p-1}{p^2+4p+29} = \frac{3(p+2)-7}{(p+2)^2+25} \leftarrow 3e^{-2t}\cos 5t - \frac{7}{5}e^{-2t}\sin 5t.$$

При построении оригинала, соответствующего третьему слагаемому, сначала найдем оригинал для функции $\dfrac{1}{(p-2)^3} \risingdotseq \dfrac{1}{2}e^{2t}t^2 = f(t)$, а затем применим теорему запаздывания для оригинала:

$$\frac{e^{-p}}{(p-2)^3} \leftarrow f(t-1) = \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(t-1)^2\,\eta(t-1).$$

$$f(t) = 3e^{-2t}\cos 5t - \frac{7}{5}e^{-2t}\sin 5t + \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(t-1)^2\,\eta(t-1).$$

9. Найти оригиналы следующих изображений:

а) $F(p) = \dfrac{3p-1}{p^2+4p+29}$; б) $F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)\left(p^2+1\right)}$.

Решение. а) Преобразуем дробь, выделив полный квадрат:

$$\frac{3p-1}{p^2+4p+29} = \frac{3p-1}{\left(p^2+4p+4\right)+25} = \frac{3p-1}{(p+2)^2+25} = \frac{3(p+2)-7}{(p+2)^2+25} =$$

$$= \frac{3(p+2)}{(p+2)^2+25} - \frac{7}{(p+2)^2+25} = 3\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+25} - \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{(p+2)^2+25}.$$

Согласно свойству линейности преобразования Лапласа и таблице изображений находим оригинал:

$$F(p) = 3\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+25} - \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{(p+2)^2+25} \leftarrow 3e^{-2t}\cos 5t - \frac{7}{5}e^{-2t}\sin 5t =$$

$$= e^{-2t}\left(3\cos 5t - \frac{7}{5}\sin 5t\right).$$

б) Представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{p(p-1)\left(p^2+1\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

.

Приводя правую часть равенства к общему знаменателю и приравнивая числители обеих дробей, получаем равенство:

$$1=A(p-1)\left(p^2+1\right)+Bp\left(p^2+1\right)+(Cp+D)\,p(p-1)$$

$$1=p^3(A+B+C)+p^2(-A-C+D)+p\left(A+B-D\right)-A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему

$$\begin{matrix} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{matrix}\quad \begin{cases} A+B+C=0 \\ -A-C+D=0 \\ A+B-D=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=-1/2 \\ C=1/2 \\ B=1/2 \\ A=-1 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p(p-1)\left(p^2+1\right)}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}++\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}-+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}\leftarrow$$

$$\leftarrow -1+\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

10. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$\frac{p^2}{p^4+13p^2+36}.$$

Решение. Очевидно,

$$\frac{p^2}{p^4+13p^2+36}=\frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+9};\quad \frac{p}{p^2+4}\leftarrow\cos 2t;\quad \frac{p}{p^2+9}\leftarrow\cos 3t.$$

Следовательно,

$$\frac{p^2}{p^4+13p^2+36}=\frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+9}\leftarrow\cos 3t*\cos 2t=$$

$$=\int_0^t\cos 3\tau\cos 2(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(2t+\tau)+\cos(5\tau-2t)\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{5}\left(3\sin 3t-2\sin 2t\right).$$

11. Найти свертку функций и ее изображение:

$$f(t)=\mathrm{sh}2t,\qquad g(t)=\mathrm{e}^{-t}.$$

Решение. Вычислим свертку функций, пользуясь определением:

$$\mathrm{sh}2t*\mathrm{e}^{-t}=\int_0^t\mathrm{sh}2\tau\cdot\mathrm{e}^{-(t-\tau)}d\tau=\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{2\tau}-\mathrm{e}^{-2\tau}}{2}\mathrm{e}^{-t+\tau}d\tau=\int_0^t\left(\mathrm{e}^{3\tau}-\mathrm{e}^{-\tau}\right)d\tau=$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\tau}}{3}+\mathrm{e}^{-\tau}\right)\Bigg|_0^t=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{3t}-1}{3}+\mathrm{e}^{-t}-1\right)=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{6}+\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{6}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}.$$

Следовательно, $\mathrm{sh}2t*\mathrm{e}^{-t}=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{6}+\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{6}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}$.

Теперь по таблице изображений находим изображение свертки:

$$\mathrm{sh}2t*\mathrm{e}^{-t}\rightarrow\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p+1}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{(p+2)(p+1)+3(p-2)(p+1)-4\left(p^2-4\right)}{\left(p^2-4\right)(p+1)}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{12}{\left(p^2-4\right)(p+1)}=\frac{2}{\left(p^2-4\right)(p+1)}.$$

12. Найти оригинал по изображению $F(p)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$.

Решение. Разложим $F(p)$ в ряд Лорана по степеням p в окрестностях точки $p=\infty$.

Известно разложение $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots$, сходящееся для $|z|<1$.

Положим $z=\frac{1}{p}$, тогда будем иметь

$$F(p)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{np^n}+\ldots \text{ для } |p|>1.$$

Отсюда

$$f(t)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{t}\left[t-\frac{t^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{t^n}{n!}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{t}\left\{1-\left[1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{t^n}{n!}+\ldots\right]\right\}=\frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right).$$

13. С помощью второй теоремы о разложении найти оригиналы следующих функций:

а) $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p-3)(p-1)(p+2)}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+3)^3}$.

Решение. а) Все корни знаменателя простые, обозначим

$$p_1=3,\quad p_2=1,\quad p_3=-2,\quad A(p)=2p+1,$$
$$B(p)=(p-3)(p-1)(p+2).$$

Найдем $B'(p)=(p-1)(p+2)+(p-3)(p+2)+(p-3)(p-1)$.

$$\frac{A(3)}{B'(3)}=\frac{7}{10},\quad \frac{A(1)}{B'(1)}=-\frac{1}{2},\quad \frac{A(-2)}{B'(-2)}=-\frac{1}{5}.$$

Следовательно, $F(p)\leftarrow f(t)=\dfrac{7}{10}\mathrm{e}^{3t}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t}-\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t}$.

б) Корень $p_1=-1$ кратности $r_1=1$, корень $p_2=-3$ кратности $r_2=3$. Воспользуемся формулой

$$f(t)=\lim_{p\to-1}(p+1)\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}\mathrm{e}^{pt}+$$
$$+\frac{1}{2}\lim_{p\to-3}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[(p+3)^3\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}\mathrm{e}^{pt}\right].$$

Найдем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p+1}\right)=\frac{t(p+1)-1}{(p+1)^2}\mathrm{e}^{pt},$$

$$\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)=\frac{t^2(p+1)^2-2t(p+1)+2}{(p+1)^3}e^{pt}.$$

Теперь

$$f(t)=\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}}{(p+3)^3}+\frac{1}{2}\lim_{p\to-3}\frac{t^2(p+1)^2-2t(p+1)+2}{(p+1)^3}e^{pt}=$$

$$=\frac{1}{8}e^{-t}-\frac{1}{8}\left(2t^2+2t+1\right)e^{-3t}.$$

14. Решить дифференциальное уравнение $x''-x=\sin t$, если $x(0)=-1, x'(0)=0.$

Решение. Так как $x(t)\to X(p);\ x''\to p^2X(p)-p\,x(0)-x'(0)=$ $=p^2X(p)+p$ и $\sin t\to\frac{1}{p^2+1}$, то приходим к операторному уравнению $p^2X(p)+p-X(p)=\frac{1}{p^2+1}\Leftrightarrow X(p)\left(p^2-1\right)=\frac{1}{p^2+1}-p$, из которого находим изображение $X(p)$ частного решения дифференциального уравнения

$$X(p)=\frac{1-p^3-p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов разложение этой дроби в виде суммы дробей, являющихся оригиналами элементарных функций:

$$\frac{1-p^3-p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2-1}=$$

$$=\frac{(Ap+B)\left(p^2-1\right)+(Cp+D)\left(p^2+1\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}.$$

Приравниваем числители двух дробей и составляем систему уравнений для определения коэффициентов:

$$(Ap+B)\left(p^2-1\right)+(Cp+D)\left(p^2+1\right)=1-p^3-p.$$

$$\begin{matrix} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{matrix} \quad \begin{cases} A+C=-1 \\ B+D=0 \\ -A+C=-1 \\ -B+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-1/2 \\ C=-1 \\ D=1/2 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$X(p)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{p}{p^2-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2-1}\leftarrow-\frac{1}{2}\sin t-\mathrm{ch}t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}t.$$

Решение дифференциального уравнения:

$$x(t)=-\frac{1}{2}\sin t-\mathrm{ch}t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}t.$$

15. Найти решение системы ДУ $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x+y=\mathrm{e}^{-t}, \quad x(0)=-1; \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x+y=\mathrm{e}^{-2t}, \quad y(0)=-2. \end{cases}$

Решение. Обозначим $X(p)\leftarrow x(t), Y(p)\leftarrow y(t)$ и перейдем к изображениям:

$$\begin{cases} pX+1+3X+Y=\dfrac{1}{p+1} \\ pY+2-X+Y=\dfrac{1}{p+2} \end{cases} \quad \text{или}$$

$$+\begin{cases}(p+3)X+Y=-\dfrac{p}{p+1}\\ -X+(p+1)Y=-\dfrac{2p+3}{p+2}\Big|_{\times(p+3)}\end{cases}\Bigg|^{\times[-(p+1)]}.$$

Применим метод исключения, сначала умножим второе уравнение на $(p+3)$ и сложим с первым. Имеем

$$Y(p^2+4p+4)=-\frac{2p^3+12p^2+20p+9}{(p+2)(p+1)},\quad Y=-\frac{2p^3+12p^2+20p+9}{(p+2)^3(p+1)}.$$

.

Затем умножим первое уравнение на $-(p+1)$ и, складывая со вторым, получим

$$-X(p^2+4p+4)=-\frac{p^2-3}{p+2},\quad X=-\frac{p^2-3}{(p+2)^3}.$$

Разложение дробей на простейшие дает:

$$X(p)=-\frac{1}{p+2}+\frac{4}{(p+2)^2}-\frac{1}{(p+2)^3};$$

$$Y(p)=-\frac{3}{p+2}+\frac{3}{(p+2)^2}-\frac{1}{(p+2)^3}+\frac{1}{p+1}.$$

Находим отсюда решение системы:

$$\begin{cases}x(t)=-e^{-2t}+4te^{-2t}-\dfrac{t^2}{2}e^{-2t}=e^{-2t}\left(-1+4t-\dfrac{t^2}{2}\right)\\ y(t)=-3e^{-2t}-3te^{-2t}+\dfrac{t^2}{2}e^{-2t}+e^{-t}\end{cases}.$$

3.2. **Задачи для самостоятельного решения**

Найти изображение функций.

1) $f(t) = 4t^2 - 2t + 3 + \frac{1}{3}\sin 5t + 3t^3 e^{-2t}$.

2) $f(t) = \cos^3 t$.

3) $f(t) = e^t \cos^2 t$.

4) $f(t) = 2t^2 - 1 - 5e^{2t} + \sin^2 t$.

5) $f(t) = \text{sh}2t \cdot \sin 3t + e^{-2t}\cos 3t \sin 2t$.

6) $f(t) = te^{-t} + \text{sh}t$.

7) $f(t) = t^2 \cos t \sin 3t$.

Явно используя преобразования Лапласа, найти изображения функций.

8) $f(t) = \begin{cases} t;\, t \in [0;1] \\ e^{-t};\, t \in (1;2]. \\ 0;\, t \notin [0;2] \end{cases}$

9) $f(t) = \begin{cases} 1;\, t \in [0;2] \\ te^{2t};\, t \in (2;4]. \\ 0;\, t \notin [0;4] \end{cases}$

Найти изображения следующих оригиналов:

10) $f(t) = \int_0^t \tau \sin \tau d\tau$.

11) $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t}$.

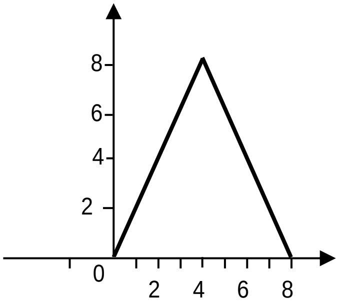
12) $f(t) = \dfrac{e^{2t} - 1}{t}$.

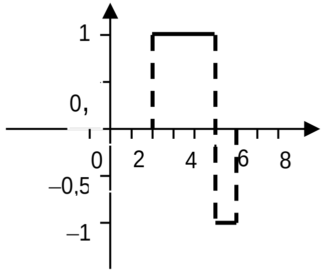
13) $f(t) = \int_0^t \tau^2 \text{sh}3\tau d\tau$.

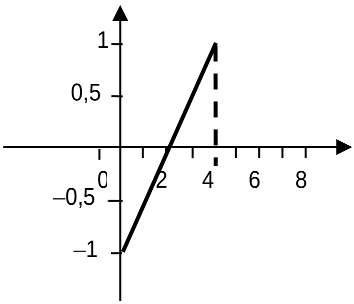
14) $f(t) = \int_0^t \cos\tau \cdot \sin 2\tau d\tau$.

15) $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}$.

Используя таблицу изображений и свойство линейности преобразования Лапласа, найти изображения оригиналов.

16) 

17) 

18) 

19. Найти свертку функций и ее изображение.

а) $f(t)=\mathrm{e}^t;\quad g(t)=t^2;$

б) $f(t)=\sin 2t;\quad g(t)=\cos t;$

в) $f(t)=t^3;\quad g(t)=\mathrm{ch}2\mathrm{t};$

г) $f(t)=t;\quad g(t)=t^2\mathrm{e}^t;$

д) $f(t)=t;\quad g(t)=t\cos 2t;$

е) $f(t)=t^2\quad g(t)=\sin 4t;$

ж) $f(t)=\mathrm{sh}2t\quad g(t)=\mathrm{ch}3t.$

Найти оригиналы по заданным изображениям.

20) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}.$

21) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)\left(p^2-4\right)}.$

22) $F(p)=\dfrac{p+2}{p\left(p^2-4p+3\right)}.$

23) $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}.$

24) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)\left(p^2+4\right)}$. 25) $F(p)=\dfrac{-p^2+8p+4}{(p+2)^3(p-2)}$.

27) $F(p)=\dfrac{5p^2+6p+20}{p^2\left(p^2-4p+20\right)}$.

С помощью первой теоремы разложения найти оригинал функции.

28) $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^4+1\right)}$. 29) $F(p)=\sin\dfrac{1}{p}$.

Найти оригинал функции, используя вторую теорему разложения.

30) $F(p)=\dfrac{p}{(2p-1)(p-3)}$. 31) $F(p)=\dfrac{2p+7}{(p+1)\left(p^2-3p\right)}$.

32) $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)^2(p-2)}$. 33) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

34) $F(p)=\dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$. 35) $F(p)=\dfrac{p^2-p+1}{\left(p^2-1\right)(p+3)^2}$.

Найти решения задачи Коши.

36) $x''+x'=t$; $x(0)=x'(0)=0$.

37) $x''+x=1$; $x(0)=-1$; $x'(0)=0$.

38) $x''+x'-2x=e^t$; $x(0)=-1$; $x'(0)=0$.

39) $x''+x'+2x=\sin t$; $x(0)=x'(0)=0$.

40) $x''+x'=t\cos t$; $x(0)=x'(0)=0$.

41) $x'''-6x''+11x'-6x=0$; $x(0)=x''(0)=0$; $x'(0)=1$.

42) $x'''-x'=t-1$; $x(0)=-1$; $x'(0)=x''(0)=0$.

43) $4x''' - 8x'' - x' - 3x = -8e^{t};$ $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$

44) $x'' - 2x' + x = \mathrm{ch}\,t;$ $x(0) = x'(0) = 0.$

Решить систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

45) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + 3y \end{cases};$ $x(0) = -1;\ \ y(0) = 1.$

46) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases};$ $x(0) = y(0) = 1.$

47) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1 \\ x' + 4y' + 3y = 0 \end{cases};$ $x(0) = y(0) = 1.$

48) $\begin{cases} x' + x - y = \sin t \\ y' + 2x = \sin t \end{cases};$ $x(0) = 0.$

49) $\begin{cases} x' + y' - y = \mathrm{e}^{t} \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases};$ $x(0) = y(0) = 0.$

50) $\begin{cases} x'' + y'' = 0 \\ x' + y = 1 + \mathrm{e}^{t} \end{cases};$ $x(0) = 0;\ \ y(0) = 1.$

51) $\begin{cases} x' - 2y + 5x = \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{y}'\text{-}\mathrm{x} + 6\mathrm{y} = \mathrm{e}^{-2t} \end{cases};$ $x(0) = 0;\ \ y(0) = -1.$

52) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = 3x + y \end{cases};$ $x(0) = y(0) = z(0) = 1.$

Ответы

1) $F(p)=\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{p^2+25}+\frac{18}{(p+1)^4}.$

2) $F(p)=\frac{p(p^2+7)}{(p^2+9)(p^2+1)}.$

3) $F(p)=\frac{p(p^2+2p+3)}{(p-1)(p^2-2p+5)}.$

4) $F(p)=\frac{4p-8-6p^3-2p^2}{p^3(p-2)}+\frac{2}{p(p^2+4)}.$

5) $F(p)=\frac{12p}{(p^2-4p+13)(p^2+4p+13)}+\frac{2p^2+8p+2}{(p^2+4p+29)(p^2+4p+5)}.$

6) $F(p)=\frac{2p+2}{p^2(p+2)^2}.$

7) $F(p)=\frac{12p^2+64}{\left(p^2+16\right)^3}+\frac{6p^2-8}{\left(p^2+4\right)^3}.$

8) $F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{p+1}{p^2}e^{-p}+\frac{e^{-2-2p}}{p+1}+\frac{e^{-p-1}}{p+1}.$

9) $F(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p}+\frac{(7-4p)e^{8-4p}+(2p-3)e^{4-2p}}{(p-2)^2}.$

10) $F(p)=\frac{2p-4}{p\left(p^2-4p+5\right)^2}.$

11) $F(p)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{2}.$

12) $F(p)=\ln\frac{p}{p-2}.$

13) $F(p)=\frac{18p^2+6}{p\left(p^2-1\right)^3}.$

14) $F(p)=\dfrac{2\left(p^2+3\right)}{p\left(p^2+9\right)\left(p^2+1\right)}$.

15) $F(p)=\ln\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{p}$.

16) $F(p)=\dfrac{2-4\mathrm{e}^{-4p}+2\mathrm{e}^{-8p}}{p^2}$.

17) $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(-2\mathrm{e}^{-4p}+\mathrm{e}^{-2p}+\mathrm{e}^{-8p}\right)$.

18) $F(p)=-\dfrac{1}{2p^2}\left(2p\mathrm{e}^{-4p}+\mathrm{e}^{-4p}-1+2p\right)$.

19) а) $f*g=2\mathrm{e}^{\mathrm{t}}-2t-t^2-2\to\dfrac{2}{p^3(p-1)}$;

б) $f*g=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\cos 2t-\dfrac{2}{3}\cos t\to\dfrac{2p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)}$;

в) $f*g=\dfrac{3}{8}\mathrm{ch}2t-\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{3}{8}\to\dfrac{6}{p^3\left(p^2-4\right)}$;

г) $f*g=6\mathrm{e}^{\mathrm{t}}-2t+t^2\mathrm{e}^{\mathrm{t}}-4t\mathrm{e}^{\mathrm{t}}-6\to\dfrac{2}{p^2(p-1)^3}$;

д) $f*g=\dfrac{2\sin 3t}{27}-\dfrac{t}{9}(t+\cos 3t)\to\dfrac{p^2-9}{p^2\left(p^2+9\right)^2}$;

е) $f*g=\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{1}{32}+\dfrac{\cos 4t}{32}\to\dfrac{8}{p^3\left(p^2+16\right)}$;

ж) $f*g=\dfrac{2}{5}(\mathrm{ch}3t-\mathrm{ch}2t)\to\dfrac{2p}{\left(p^2-4\right)\left(p^2-9\right)}$.

20) $f(t)=\mathrm{e}^t\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$.

21) $f(t)=\frac{1}{12}\left(-4\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}\right).$

22) $f(t)=1-2\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{3t}.$

23) $f(t)=1-\mathrm{e}^{-t}(1+t).$

24) $f(t)=\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{15}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t.$

25) $f(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sh}2t+\mathrm{e}^{-2t}\left(t^{2}-2t\right).$

26) $f(t)=\cos t+\sin t+\mathrm{e}^{2t}+5t\mathrm{e}^{2t}.$

27) $f(t)=1+t-\mathrm{e}^{2t}\left(\cos 4t-\frac{3}{2}\sin 4t\right).$

28) $f(t)=\frac{t^{4}}{4!}-\frac{t^{8}}{8!}+\frac{t^{12}}{12!}-\frac{t^{16}}{16!}+\ldots$

29) $f(t)=1-\frac{t^{2}}{24}+\frac{t^{4}}{2880}+\ldots$

30) $f(t)=\frac{3}{5}\mathrm{e}^{3t}-\frac{1}{10}\mathrm{e}^{t/2}.$

31) $f(t)=\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{13}{12}\mathrm{e}^{3t}-\frac{7}{3}.$

32) $f(t)=\left(\frac{t}{3}-\frac{2}{9}\right)\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{9}\mathrm{e}^{2t}.$

33) $f(t)=-\frac{1}{6}+\mathrm{e}^{t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3t}.$

34) $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(1-t^{2}\right).$

35) $f(t)=\frac{1}{17}\mathrm{e}^{t}-\frac{12}{17}\mathrm{e}^{-t}+\frac{11}{32}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{13}{8}t\mathrm{e}^{-3t}.$

36) $x=\frac{1}{2}t^{2}-t+1-\mathrm{e}^{-t}.$

37) $x=1-2\cos t.$

38) $x=\frac{t}{3}\mathrm{e}^{t}-\frac{7}{9}\mathrm{e}^{t}-\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-2t}.$

39) $x=\frac{\sin t}{5}\left(1+e^{-t}\right)-\frac{2}{5}\left(1-e^{-t}\right)\cos t.$

40) $x=\frac{1}{4}\left(t^2\sin t+t\cos t-\sin t\right).$

41) $x=-\frac{5}{2}e^t+4e^{2t}-\frac{3}{2}e^{3t}.$

42) $x=2e^{-t}-4-2t-t^2.$

43) $x=e^t.$

44) $x=\frac{t^2}{4}e^t+\frac{t}{2}\mathrm{sh}t+\frac{t}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}\mathrm{sh}t.$

45) $\begin{cases} x(t)=-e^{2t}\cos t \\ y(t)=e^{2t}(\cos t-\sin t) \end{cases}.$

46) $\begin{cases} x(t)=e^{t}(\cos t-2\sin t) \\ y(t)=e^{t}(\cos t+\sin t) \end{cases}.$

47) $\begin{cases} x(t)=\frac{1}{2}+\frac{9}{10}e^{-\frac{6t}{11}}-\frac{2}{5}e^{-t} \\ \mathrm{y}(\mathrm{t})=\frac{3}{5}e^{-\frac{6t}{11}}+\frac{2}{5}e^{-t} \end{cases}.$

48) $\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\cos t \end{cases}.$

49) $\begin{cases} x(t)=-3\cos t-3\sin t+e^t+2t+2 \\ y(t)=\cos t-\sin t+2e^t-3 \end{cases}.$

50) $\begin{cases} x(t)=-2e^t+te^t+2+t \\ y(t)=2e^t-te^t \end{cases}.$

51) $\begin{cases} x(t)=\dfrac{7}{40}\mathrm{e}^{t}+\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t}-\dfrac{17}{15}\mathrm{e}^{-4t}+\dfrac{91}{120}\mathrm{e}^{-7t} \\ \mathrm{y}(\mathrm{t})=\dfrac{1}{40}\mathrm{e}^{t}+\dfrac{3}{10}\mathrm{e}^{-2t}-\dfrac{17}{30}\mathrm{e}^{-4t}-\dfrac{91}{120}\mathrm{e}^{-7t} \end{cases}.$

52) $\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^{t/2}\left(\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{17}}{2}t+\dfrac{3\sqrt{17}}{17}\mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{17}}{2}t\right) \\ y(t)=\mathrm{e}^{t/2}\left(\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{17}}{2}t+\dfrac{3\sqrt{17}}{17}\mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{17}}{2}t\right). \\ z(t)=\mathrm{e}^{t/2}\left(\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{17}}{2}t+\dfrac{5\sqrt{17}}{17}\mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{17}}{2}t\right) \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Булдыкин, А. М. Ряды и интегралы Фурье / А. М. Булдыкин. – 2002. –127 с.

2. Власов, Е. А. Ряды : учебник для втузов / Е. А. Власов; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 611 с.

3. Григорьев, Е. А. Числовые и функциональные ряды. Теория и практика : учеб. пособие для вузов / Е. А. Григорьев. – М. : Научный мир, 2004. – 215 с.

4. Апарина, Л. В. Числовые и функциональные ряды : учеб. пособие для вузов / Л. В. Апарина. – 2-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2012. – 155 с.

5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – 4-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2006. – Ч. 2. – 608 с.

6. Гусак, А. А. Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : Тетра-Системс, 2009. – Т. 2 : Учебник для втузов. – 992 с.

7. Лунц, Г. Л. Функции комплексного переменного (с элементами операционного исчисления) / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Лань, 2002. – 292 с.

8. Морозова, В. Д. Теория функций комплексного переменного : учебник для вузов / В. Д. Морозова; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко – 3-е изд., испр. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2009. – 520 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. X).

9. Свешников, А. Г. Теория функций комплексного переменного : учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – 6-е изд., стеореот. – М. : Физматлит, 2005. – 336 с. – (Курс высшей математики и математической физики; вып. 5).

10. Эйдерман, В. Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления / В. Я. Эйдерман. – М. : Физматлит, 2002. – 256 с.

11. Волковысский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л. И. Волковысский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – 6-е изд., перераб. – М. : Физматлит, 2004. – 312 с.

12. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного и операционное исчисление. Теория устойчивости : учебн. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Мокаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 305 с.

13. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч / Д. Т. Письменный. – М. : Рольф, 2000. – Ч. 2. – 256 с.

14. Гусак, А. А. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление. Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова, Г. М. Гусак. – Минск : Тетра-Системс, 2002. – 208 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПРУСОВА Ирина Васильевна
КОНДРАТЬЕВА Наталья Анатольевна
ПРИХАЧ Наталия Константиновна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.

РЯДЫ, ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие к решению задач
для студентов
механико-технологического факультета

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *А. Е. Дарвиной*

Подписано в печать 15.02.2017. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 9,01. Уч.-изд. л. 7,05. Тираж 200. Заказ 333.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.