**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

Кафедра «Высшая математика № 2 »

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Часть 1

**Минск
БНТУ
2017**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 2»

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

В 10 частях

Часть 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Рекомендовано учебно-методическим объединением высших учебных заведений по образованию в области энергетики и энергетического оборудования

Минск
БНТУ
2017

УДК 519.85 (075.8)
ББК 18.87я7
М34

А в т о р ы:
О. М. Королёва, Э. Е. Кузьмицкая,
М. В. Кураленко, Д. А. Нифонтова

Р е ц е н з е н т ы:
институт математики НАН Беларуси (ведущий научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа,
д-р физ.-мат. наук *В. Б. Малютин*);
канд. физ.-мат. наук, доцент *В. В. Карпук*

М34 **Математика** в примерах и задачах : учебно-методическое пособие : в 10 ч. Ч. 1 : Элементы линейной алгебры / О. М. Королёва [и др.]. – Минск : БНТУ, 2017. – 53 с.
ISBN 978-985-550-524-3 (Ч. 1).

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов экономических и технических специальностей ФТУГа при изучении различных разделов математики: «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия» и др. Содержатся некоторые теоретические сведения, предусмотренные учебной программой по математике, примеры решения типовых задач, задания для аудиторной и самостоятельной работы, ответы к ним.

Издание также будет полезно для преподавателей, ведущих занятия по соответствующим разделам.

УДК 519.85 (075.8)
ББК 18.87я7

ISBN 978-985-550-524-3 (Ч. 1)
ISBN 978-985-550-525-0

ВВЕДЕНИЕ

Изучение высшей математики является составной частью подготовки студентов инженерных специальностей вузов.

Предлагаемое учебно-методическое пособие подготовлено с целью оказания помощи студентам энергетического факультета и факультета технологий управления и гуманитаризации в изучении основ высшей математики согласно учебной программе. Оно может быть использовано студентами на практических занятиях, а также при самостоятельном изучении математики.

В данном издании авторы в сжатой и доступной форме изложили теоретический материал по различным разделам математики: «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия» и др. Основные теоретические положения наглядно проиллюстрированы решением большого числа примеров. Предлагаются задания для решения в аудитории, а для проверки усвоенных знаний – домашние задания с ответами, поскольку студентам важно научиться самостоятельно работать над материалом. Предлагаемый для решения в аудитории набор задач распределён по двум уровням сложности, что позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении.

1. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Матрицей размеров m на n $(m \times n)$ называется система $m \cdot n$ элементов некоторого множества (элементов матрицы), расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Матрицы обозначают A, B, C, X… Матрица, элементами которой являются числа, называется *числовой*. Обозначение числовой матрицы размеров $m \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}.$$

Если $m = n$, матрицу называют ***квадратной порядка n*** и обозначают A_n. Элементы a_{ii}, $i = \overline{1,n}$, $n \in N$, такой матрицы образуют ее ***главную диагональ***.

Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, называется ***диагональной***. Если $a_{ii} = 1$ для любого $i = \overline{1,n}$, то матрица (1.1) называется ***единичной*** и обозначается E_n.

Верхней и ***нижней треугольными матрицами*** называются квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ соответственно.

Трапециевидной матрицей называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где числа a_{11}, a_{12}, …, a_{kk} отличны от нуля.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Такую матрицу обозначают буквой O.

Две матрицы одинакового размера

$$A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right) \text{ и } B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right) \qquad (1.2)$$

называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Суммой матриц (1.2) называется матрица $A + B$ размеров $m \times n$, состоящая из элементов

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на число α называется матрица

$$\alpha A_{m\times n} = \left(\alpha a_{ij}\right).$$

Разностью матриц (1.2) называется матрица $A - B = A + (-1)B$.

Противоположной к B называется матрица $-B$, такая что

$$-B = \left(-1\right)B.$$

Свойства операций сложения матриц и умножения на число

1) $A+B=B+A$;
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3) $A+O=A$;
4) $A+(-A)=O$;
5) $1\cdot A=A$;
6) $\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)=(\alpha\beta)A$, где $\alpha,\ \beta\in R$;
7) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
8) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$, а матрицы A, B и C – одинакового размера.

Для матриц A и B может быть введена операция умножения $A\cdot B$ при условии, что матрицы *согласованы*, т. е. количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B.

Произведением матрицы $A_{k\times m}$ на матрицу $B_{m\times n}$ называется матрица

$$C_{k\times n}=A_{k\times m}\cdot B_{m\times n},$$

элементы которой c_{ij} находятся по формуле

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

Свойства операции умножения матриц

1) $A_n\cdot E_n=E_n\cdot A_n=A_n$;
2) $A_n\cdot O_n=O_n\cdot A_n=O_n$;
3) $(AB)C=A(BC)$;
4) $\alpha(AB)=(\alpha A)B$;
5) $(A+B)C=AC+BC$;
6) $A(B+C)=AB+AC$.

Матрицы, для которых $AB=BA$, называются ***коммутативными*** или ***перестановочными***.

Пусть A – квадратная матрица. Тогда k-я степень $(k\in N)$ матрицы A определяется равенством

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ \text{раз}}.$$

По определению принимают $A^0 = E$ при условии $A \neq O$.

Матрица A^{T}, полученная из матрицы A заменой столбцов строками с теми же номерами, называется ***транспонированной*** к матрице A, т. е.

$$A^{\mathrm{T}}{}_{m\times n} = (a_{ij})^{\mathrm{T}}_{m\times n} = (a_{ji})_{n\times m}.$$

Свойства операции транспонирования матриц

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;

2) $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$, $\alpha \in R$;

3) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Если для квадратной матрицы A выполняется соотношение $A = A^{\mathrm{T}}$, то матрица A называется ***симметрической*** матрицей, а если $A = -A^{\mathrm{T}}$, – то ***кососимметрической***.

Элементарными преобразованиями матрицы A называют:

1) перестановку строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на ненулевое число;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на ненулевое число.

Матрица A эквивалентна матрице B ($A \sim B$), если матрица B получена из A при помощи элементарных преобразований строк.

П р и м е р 1.1

Найти $3A + 2B - C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$3A+2B-C=3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\\ -5 & 7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 0 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-3)\\ 3\cdot(-5) & 3\cdot 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\cdot(-1) & 2\cdot 2\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 0\\ 2\cdot 4 & 2\cdot(-5)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 6 & -9\\ -15 & 21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 6 & 0\\ 8 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 44\\ -3 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0-2-2 & 3+4-4\\ 6+6+3 & -9+0-0\\ -15+8-1 & 21-10-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 15 & -9\\ -8 & 6\end{pmatrix}.$$

П р и м е р 1.2

Если возможно, найти *AB* и *BA* для следующих пар матриц:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix};$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение

1) Матрицы *A* и *B* согласованные, так как матрица *A* имеет размер 2 × 3, а матрица *B* – размер 3 × 2, т. е. количество столбцов матрицы *A* совпадает с числом строк матрицы *B*.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot 3+2\cdot 4 & 1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot(-5)\\ -3\cdot(-1)+1\cdot 3+5\cdot 4 & -3\cdot 2+1\cdot 0+5\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -8\\ 26 & -31\end{pmatrix}.$$

Матрицы *B* и *A* согласованные, так как количество столбцов матрицы *B* совпадает с числом строк матрицы *A*.

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+2\cdot(-3) & -1\cdot 0+2\cdot 1 & -1\cdot 2+2\cdot 5\\ 3\cdot 1+0\cdot(-3) & 3\cdot 0+0\cdot 1 & 3\cdot 2+0\cdot 5\\ 4\cdot 1+(-5)\cdot(-3) & 4\cdot 0+(-5)\cdot 1 & 4\cdot 2+(-5)\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 8\\ 3 & 0 & 6\\ 19 & -5 & -17\end{pmatrix}.$$

2) Умножение матрицы *A* на матрицу *B* невозможно, так как матрицы не согласованы (число столбцов матрицы *A* не равно числу строк матрицы *B*). Произведение *BA* может быть найдено, так как в этом случае матрицы согласованы:

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+2\cdot(-3) & -1\cdot 0+2\cdot 1 & -1\cdot 2+2\cdot 5\\ 3\cdot 1+0\cdot(-3) & 3\cdot 0+0\cdot(-3) & 3\cdot 2+0\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 8\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

П р и м е р 1.3

Найти матрицу *X*, удовлетворяющую условию

$$\frac{1}{2}X-5A^{\mathrm{T}}=E,$$

если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение

Выразим *X* из данного равенства:

$$X=2E+10A^{T}=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+10\cdot\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & 50\\ 20 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 50\\ 20 & 2\end{pmatrix}.$$

П р и м е р 1.4

Найти *f*(*A*), если

$$f(x)=2x^{2}+3x-5,\ \ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение

$$f(A)=A^{2}+3A-5E=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11 & -2\\ -5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 15 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 10 & -5\end{pmatrix}.$$

П р и м е р 1.5

Привести к трапециевидной или треугольной форме матрицу

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 8 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение

Поменяем местами первую и вторую строки. Затем ко второй строке прибавим первую, умноженную на (–2), к третьей строке прибавим первую, умноженную на (–3). Далее к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (–2). В результате получим треугольную матрицу, эквивалентную матрице *A*. Эти преобразования записывают в виде

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 8 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 8 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 7 & -2\\ 0 & 14 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 7 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Задания для решения в аудитории

I уровень

1.1. Если возможно, вычислить:

1) $-A+4B$, AB, BA, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$;

2) $2A^T+B$, AB, BA, если $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

3) $3A+2B$, AB, BA, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

4) $2A - B$, AB, BA, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $2A - 3B$, AB, BA, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

$$1)\ 2X + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = O;$$

$$2)\ 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} - 5X^T = 3E.$$

1.3. Найти значения $f(A)$ и $f(B)$ функций $f(x)$, если

$$f(x) = 5x + 4,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.4. Привести к трапециевидной или треугольной форме матрицу:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -20 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & -15 \end{pmatrix}.$$

II уровень

2.1. Найти сумму, разность и произведение матриц *A* и *B*, если

1) $A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -a-b & b-a \\ a-b & a+b \end{pmatrix}.$

2.2. Выполнить действия:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3;$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2.3. Найти значение $f(A)$ функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 2, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

2) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить:

1) $2A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

2) $4A - B$, BA, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Выполнить действия:

1) $$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix};$$

2) $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}};$$

3) $$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix};$$ 4) $$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5;$$ 5) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

3. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

1) $$2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -13 \end{pmatrix} - X^{\mathrm{T}} = O;$$

2) $\frac{1}{3}X + 2\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = E.$

4. Найти значение *f*(*A*) функции *f*(*x*), если:

1) $f(x) = -3x - 4,\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix};$

2) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 16x + 5,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

5. Привести к трапециевидной или треугольной форме матрицу:

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ответы.

1. 1) $\begin{pmatrix} -7 & 28 & -4 \\ -5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$;

2. 1) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$; 2) (31); 3) $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

3. 1) $\begin{pmatrix} 14 & 24 \\ -6 & -26 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -21 & -6 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$;

4. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 \\ 4 & -13 & 0 \\ -12 & 6 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -18 & 40 \\ 0 & 62 \end{pmatrix}$;

5. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ИХ СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ

Определитель (детерминант) квадратной матрицы A_n – число, которое вычисляется по определенному правилу и обозначается

$$\Delta = |A| = \det A.$$

Порядок матрицы A является и порядком ее определителя. Определители порядка 1–3 вычисляются соответственно по правилам:

$$|a_{11}| = a_{11},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \qquad (2.1)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ порядка n, где $i, j = \overline{1, n}$, называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из Δ вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением этого же элемента называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определитель порядка n, где $n \geq 2$, $n \in N$, вычисляется аналогично определителю порядка 3 как обобщение равенств (2.1). Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{ij}.$$

Последнее равенство называют ***разложением определителя по элементам первой строки***.

2.1. Свойства определителей

1) $|A| = \left|A^{\mathrm{T}}\right|$;

2) $|AB| = |A| \cdot |B|$;

3) $\left|A^n\right| = |A|^n$;

4) общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

5) перестановка двух строк (столбцов) меняет знак определителя на противоположный;

6) $|A| = 0$, если выполняется одно из следующих условий:

в определителе есть нулевая строка (нулевой столбец);

в определителе есть пропорциональные строки (столбцы);

в определителе есть строки (столбцы), являющиеся линейной комбинацией соответствующих элементов других строк (столбцов);

7) если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить линейную комбинацию соответствующих элементов других строк (столбцов), то значение определителя не изменится.

2.2. Основные методы вычисления определителей

Определитель порядка n может быть вычислен ***разложением по любой строке (столбцу)***:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Метод эффективного понижения порядка определителя: используя свойства определителя, его преобразуют к такому виду, чтобы все элементы некоторой строки (столбца) определителя, кроме одного, стали нулевыми, затем вычисляют определитель разложением по этой строке (столбцу).

Метод приведения к треугольному или ***диагональному виду*** использует свойства определителя, когда последний равен произведению диагональных элементов.

П р и м е р 2.1

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение

По определению $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = 15.$

П р и м е р 2.2

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ различными способами.

Решение

1-й способ. Используем правило треугольников:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot(-1) + (-3)\cdot(-3) -$$

$$-(-1)\cdot 2\cdot(-3) - 6\cdot(-3)\cdot 1 - 4\cdot 1(-3) = 48 - 1 - 27 - 6 + 18 + 12 = 44.$$

2-й способ. Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\times$$

$$\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot(8+3) + 3\cdot(4-9) - (1+6) = 44.$$

3-й способ. Занулим элементы первого столбца, т. е. используем метод эффективного понижения порядка. Для этого к первой строке прибавим вторую, умноженную на (–6), к третьей строке прибавим вторую, умноженную на 3. Затем разложим определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -15 & 17 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -15 & 17 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -(75-119) = 44.$$

4-й способ. Используя свойства определителя, приведем его к треугольному виду. Для этого поменяем местами первую и вторую строки. Затем ко второй строке прибавим первую, умноженную на (–6), к третьей строке прибавим первую, умноженную на 3. Далее ко второй строке прибавим третью, умноженную на 2. И, наконец, к третьей строке прибавим вторую, умноженную на 7. Определитель равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -15 & 17 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 44 \end{vmatrix} = -(1\cdot(-1)\cdot 44) = 44.$$

П р и м е р 2.3

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение

Используем метод эффективного понижения порядка. Для этого из первой строки вычтем, а ко второй прибавим удвоенную третью строку. Полученный определитель разложим по первому столбцу. Далее из первой строки определителя третьего порядка вычтем третью строку. Общий множитель (–11) элементов первой строки вынесем за знак определителя. Из третьего столбца вычтем удвоенный первый столбец. Затем разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -5 & -16 \\ 0 & 12 & 12 & 17 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -7 & -5 & -16 \\ 12 & 12 & 17 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} -11 & 0 & -22 \\ 12 & 12 & 17 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 2(-11)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 12 & 12 & 17 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -22\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & -7 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -22\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -22(-24-35) = 1298.$$

П р и м е р 2.4

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение

Используя свойства определителя, приведем его к треугольному виду. Для этого из второй, третьей и четвёртой строки вычтем первую строку. Поменяем местами третью и четвёртую строки. Затем из четвёртой строки вычтем утроенную третью строку. Полученный определитель треугольного вида равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -(1\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 10) = -20.$$

Задания для решения в аудитории

I уровень

1.1. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -16 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -2\sin\alpha \\ \sin\alpha & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \sqrt{a-b} & a \\ 1 & \sqrt{a-b} \end{vmatrix}$.

1.2. Вычислить определитель различными способами:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix};\quad 4)\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.3. Найти миноры M_{11}, M_{32} и алгебраические дополнения A_{23}, A_{33} для следующих матриц:

$$1)\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix};\qquad 2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II уровень

2.1. Вычислить определитель приведением к треугольному виду и используя метод эффективного понижения порядка:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix};\qquad 2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$3)\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \end{vmatrix};\qquad 4)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2. Решить уравнения:

$$1)\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=0;\qquad 2)\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ x+9 & x \end{vmatrix}=0;$$

3) $\begin{vmatrix} x+1 & x+3 \\ x+4 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;   4) $\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ -1 & x & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

2.3. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & x & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \le 0$;   2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ x & 2 & x+1 \end{vmatrix} \le 8x$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 4 & -13 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & -\sin^2\alpha \\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha} & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a-b & b-a \\ a^2+b^2 & ab \end{vmatrix}$.

2. Вычислить различными способами определитель:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$.

3. Найти миноры M_{21}, M_{33} и алгебраические дополнения A_{13}, A_{32} для следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$;   2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель, используя метод приведения к треугольному виду и метод эффективного понижения порядка:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ x-4 & 2 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$;

3) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

6. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} \geq 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ x+2 & 2 & x+1 \end{vmatrix} \geq -1$.

Ответы

1. 1) 43; 2) –31; 3) $\frac{1}{\cos^2}\alpha$; 4) $a^3 - b^3$.

2. 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) $-4a^3$.

3. 1) 4, –5, –23, 9; 2) 1, –2, –18, 18.
4. 1) 160; 2) 0; 3) –1800; 4) 4.
5. 1) $x = 12$; 2) $x_1 = -1; x_2 = -4$; 3) $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; 4) $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{22}$.
6. 1) $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$; 2) $[-2;0,5]$.

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РАНГ МАТРИЦЫ

Квадратная матрица B называется ***обратной*** к матрице A и обозначается A^{-1}, если $AB = BA = E$. Для квадратной матрицы A обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда A – невырожденная матрица, т. е. $\det A \neq 0$.

Вычисление обратной матрицы

1-й способ. С помощью формулы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

2-й способ. С помощью элементарных преобразований строк матрица (A/E) приводится к виду (E/B). Тогда $B = A^{-1}$.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля ее миноров. Обозначение: r_A или rank A. Любой ненулевой минор порядка $r = r_A$ называется ***базисным минором*** матрицы A. При этом под минором порядка k матрицы понимают определитель, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении k ее строк и k столбцов.

Основные методы нахождения ранга матрицы *A*

Метод окаймляющих миноров

В матрице A находят ненулевой минор M_k по возможности наибольшего порядка k, $k \in N$, затем вычисляют все окаймляющие его миноры $(k+1)$-го порядка. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k ($r_A = k$). Если есть хотя бы один ненулевой минор M_{k+1}, то вычисляют все окаймляющие его миноры $(k+1)$-го порядка и процесс продолжается.

Метод элементарных преобразований

Используя элементарные преобразования, матрицу приводят к трапециевидной или треугольной форме, далее ранг находят по определению.

П р и м е р 3.1

Исследовать матрицу A на невырожденность, найти A^{-1}, если она существует, результат проверить.

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};\ 2)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-(-3)\cdot(-2)=4-6=-2\neq 0.$$

Невырожденность матрицы A означает, что существует единственная обратная ей матрица A^{-1}.

1-й способ. Используя формулу (3.1), найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-3)=3,$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-2)=2, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1.$$

Тогда по формуле (3.1) имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2-й способ. Воспользуемся эквивалентностью матриц (A/E) и (E/A^{-1}):

$$(A/E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right) = \left(E/A^{-1}\right).$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}.$

Для контроля правильности результата достаточно проверить условия $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$ Действительно,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4-6 & 3-3 \\ -8+8 & -6+4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $A^{-1} \cdot A = E.$

2) Вычислим определитель матрицы *A:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 3 - (1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 2) =$$

$$= 8 + 8 + 45 - 12 - 12 - 20 = 17 \neq 0.$$

Невырожденность матрицы A означает, что существует единственная обратная ей матрица A^{-1}.

1-й способ. Используя формулу (3.1), найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&3\\4&2\end{vmatrix}=-4, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&1\\4&2\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}=5, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&4\\3&4\end{vmatrix}=-4; \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&5\\3&4\end{vmatrix}=11;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&1\\4&3\end{vmatrix}=11,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}=-6.$$

Тогда по формуле (3.1) имеем

$$A^{-1}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4&-6&11\\5&-1&-1\\-4&11&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/17&-6/17&11/17\\5/17&-1/17&-1/17\\-4/17&11/17&-6/17\end{pmatrix}.$$

2-й способ. Воспользуемся эквивалентностью матриц (A/E) и (E/A^{-1}):

$$(A/E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&1&1&0&0\\2&4&3&0&1&0\\3&4&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&1&1&0&0\\0&-6&1&-2&1&0\\0&-11&-1&-3&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -17/6 & 2/3 & -11/6 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 21/17 & -11/17 & 6/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 & -1/17 & -1/17 \\ 0 & 0 & 1 & -4/17 & 11/17 & -6/17 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/17 & -6/17 & 11/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 & -1/17 & -1/17 \\ 0 & 0 & 1 & -4/17 & 11/17 & -6/17 \end{array}\right) = (E\,/\,A^{-1}).$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/17 & -6/17 & 11/17 \\ 5/17 & -1/17 & -1/17 \\ -4/17 & 11/17 & -6/17 \end{pmatrix}.$

Для контроля правильности результата достаточно проверить условия

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

Действительно,

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4/17 & -6/17 & 11/17 \\ 5/17 & -1/17 & -1/17 \\ -4/17 & 11/17 & -6/17 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & -1 \\ -4 & 11 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -4+25-4 & -6-5+11 & 11-5-6 \\ -8+20-12 & -12-4+33 & 22-4-18 \\ -12+20-8 & -18-4+22 & 33-4-12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $A^{-1}\cdot A = E$.

П р и м е р 3.2

Решить матричные уравнения:

$$1)\ X\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение

1) Запишем уравнение в виде

$$XA=B, \qquad (3.2)$$

где A, B – заданные матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Умножим уравнение (3.2) справа на A^{-1}. Тогда справедливо

$$XA\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$$

или, учитывая определение обратной матрицы:

$$X=B\cdot A^{-1}.$$

Матрица A^{-1} найдена в примере 1.1:

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = B \cdot A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -8 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $X = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2) Запишем уравнение в виде

$$AX = B, \tag{3.3}$$

где A, B – заданные матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножим уравнение (3.3) слева на A^{-1}. Тогда справедливо

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$$

или, учитывая определение обратной матрицы, $X = A^{-1} \cdot B$.

Матрица A^{-1} найдена в примере 3.1, п. 2):

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & -1 \\ -4 & 11 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/17 & -6/17 & 11/17 \\ 5/17 & -1/17 & -1/17 \\ -4/17 & 11/17 & -6/17 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & -1 \\ -4 & 11 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -4-18+44 & -8+0-11 \\ 5-3-4 & 10+0+1 \\ -4+33-24 & -8+0+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 22 & -19 \\ -2 & 11 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $X = \begin{pmatrix} 22/17 & -19/17 \\ -2/17 & 11/17 \\ 5/17 & -2/17 \end{pmatrix}.$

3) Запишем уравнение в виде

$$AXB = C, \tag{3.4}$$

где A, B, C – заданные матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножим уравнение (3.4) слева на A^{-1} и справа на B^{-1}. Тогда справедливо $A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ или, учитывая определение обратной матрицы, $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Матрица B^{-1} найдена в примере 3.1, п. 1):

$$B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{4-0}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-1}CB^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 56 & 36 \\ 26 & 16 \end{pmatrix}.$$

Значит, $X = \begin{pmatrix} -7 & -9/2 \\ -13/4 & -2 \end{pmatrix}.$

П р и м е р 3.3

Найти ранг и указать один из базисных миноров матрицы *A*.

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};\quad 3)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix};\quad 5)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1) Вычислим определитель матрицы *A*:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) = 5 \neq 0.$$

Значит, по определению $r_A = 2$, базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$

2) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2) = 0.$

Значит, по определению $r_A = 1$, а базисным минором можно считать любой отличный от нуля элемент матрицы *A*, например, $M_1 = 4$.

3) $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4 \neq 0.$ Этот же определитель можно считать одним из базисных миноров. Заметим, что минор $M_2^{(2)} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ базисным не является.

4) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 8 + 45 - 12 - 12 - 20 = 17 \neq 0.$

Значит, по определению $r_A = 3$. Этот же определитель является единственным базисным минором $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

5) *1-й способ.* Воспользуемся методом окаймляющих миноров. Фиксируем $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0.$ Для M_2 окаймляющими будут два минора 3-го порядка:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 7 & 5 \\ -22 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, $r_A = 2$, а базисным минором можно считать, например, M_2.

2-й способ. С помощью элементарных преобразований приведём матрицу A к трапециевидной форме. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (–2), к третьей строке прибавим первую, умноженную на (–3). Далее к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (–7). В результате на втором шаге преобразований получим трапециевидную матрицу, которая содержит нулевую строку и ненулевой минор M_2 (выделен) максимального порядка 2:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&5\\2&3&1&8\\3&-1&-4&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&-1&-1&-2\\0&-7&-7&-14\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&2\\0&-1\end{matrix}}&\begin{matrix}1&5\\-1&-2\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы по определению равен двум, следовательно, таков же ранг исходной матрицы $r_A = 2$.

Задания для решения в аудитории

I уровень

1.1. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix}1&2\\6&7\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2&-1\\3&-5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&4\\2&3&2\end{pmatrix}$.

1.2. Решить матричное уравнение:

1) $\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}5&-6&4\\3&-3&2\\4&-5&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$; 4) $X\cdot\begin{pmatrix}5&-6&4\\3&-3&2\\4&-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}$.

1.3. Найти какой-либо базисный минор матрицы:

1) $\begin{pmatrix}6&-6\\2&-2\\4&-4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0&0&2\\3&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&0&0&2&1\\1&0&0&3&-1\\2&0&0&5&0\end{pmatrix}$.

1.4. Определить ранг матрицы и указать один из базисных миноров:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 8 & -11 & 7 & -12 \end{pmatrix}$.

II уровень

2.1. Найти обратную матрицу для заданной матрицы, используя формулу (3.1):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2. Методом эквивалентных преобразований найти обратные для следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 3 & 13 & 8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Решить матричные уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.4. Найти ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Различными методами найти обратные для следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Решить матричное уравнение:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров:

1) $\begin{pmatrix} 0 & -11 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответы

1. 1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

2. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -19/10 & 3/10 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ -2/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 7 & 14/5 & -19/5 \\ 6 & 13/5 & -18/5 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 10/3 & -5/3 \\ -5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3. 1) $r = 2$, $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -11 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $r = 1$, $M_1 = 21$

3) $r = 2$, $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $r = 2$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$; 5) $r = 2$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; 6) $r = 4$, $M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 7) $r = 3$, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (4.1)$$

где a_{ij} – коэффициенты системы;
b_i – свободные члены;
x_j – неизвестные;
$i = \overline{1, m}$;
$j = \overline{1, n}$.

Матричная запись СЛАУ

$$AX = B, \quad (4.2)$$

где $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – матрица системы;

$B=\left(b_i\right)_{m\times 1}$ – матрица-столбец свободных членов b_i;

X – матрица-столбец неизвестных, т. е. такая, которая обращает матричное уравнение (4.2) в равенство (является решением этого уравнения).

Решением системы (4.1) называется упорядоченная совокупность $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ n чисел, которые после подстановки в уравнения системы вместо соответствующих переменных обращают каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система (4.1) называется ***совместной***, если у нее существует хотя бы одно решение, в противном случае она называется ***несовместной***. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет одно решение, и ***неопределенной*** – если более одного решения. Две системы называются ***эквивалентными*** (***равносильными***), если множества их решений совпадают.

Критерий совместности системы (***теорема Кронекера–Капелли)***: для того чтобы система (4.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r_A = r_{A/B}$, где (A/B) – расширенная матрица системы (4.1), т. е. матрица A системы, к которой добавлен столбец B свободных членов.

Рассмотрим ***систему*** $\boldsymbol{n\times n}$, имеющую вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (4.3)$$

или в матричном виде $AX = B$.

Определителем системы (4.3) называется определитель матрицы этой системы: $\Delta = \det A$. Если $\Delta \neq 0$, то система называется ***невырожденной***; если $\Delta = 0$ – ***вырожденной***.

Методы решения невырожденных систем используются для решения линейных систем (4.3), состоящих из n уравнений с n неизвестными, для которых $\Delta \neq 0$.

Метод обратной матрицы (матричный метод) состоит в решении матричного уравнения

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{4.4}$$

Метод Крамера. Неизвестные находят по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \; j = \overline{1,n}, \tag{4.5}$$

где Δ_j – определитель, получаемый из определителя Δ системы (4.3) заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Решение ***произвольной линейной системы из m уравнений и n неизвестных*** начинается с нахождения ранга.

Если система (4.1) совместна, $r_A = r_{A/B} = r$, и, например,

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} –$$

базисный минор матрицы системы, то она равносильна системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{4.6}$$

Если $r = n$, то система (4.6) имеет единственное решение, которое можно получить указанными выше методами; если $r < n$, то существует бесконечное множество решений. Для его получения неизвестные x_1, x_2, …, x_r называют ***базисными***, x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n – ***свободными***, система (4.6) записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Свободным переменным присваиваются произвольные числовые значения $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$.

Последняя система решается, например, методом Крамера.

Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) используют для решения произвольных систем. С помощью элементарных преобразований строк расширенную матрицу системы (4.1) приводят к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2r} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{rr} & \ldots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & d_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & d_m \end{array}\right), \text{ где } c_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1, r}.$$

Соответствующая ей система, равносильная (4.1), примет вид

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_m. \end{cases} \tag{4.7}$$

Если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, d_{r+2}, \ldots, d_m$ отлично от нуля, то система (4.7), а значит, и исходная система (4.1) несовместны.

Если $d_{r+1} = d_{r+2} = ... = d_m = 0$:

1) то при $r = n$ системы (4.7) и (4.1) имеют единственное решение, поскольку свободные переменные отсутствуют (сначала находим из последнего уравнения системы (4.6) x_n, из предпоследнего x_{n-1} и т. д.);

2) при $r < n$, система (4.7) позволяет получить явное выражение для базисных неизвестных x_1, …, x_r через свободные неизвестные x_{r+1}, …, x_n. Значения базисных переменных ищутся в обратном порядке. Таким образом получают бесконечное множество решений.

Однородная система линейных уравнений $AX = O$ всегда совместна. Она имеет нетривиальные (ненулевые) решения, если $r = r_A < n$.

Для однородных систем базисные переменные выражаются через свободные переменные соотношениями вида

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + ... + d_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + ... + d_{2,n-r}x_n, \\ .... \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + ... + d_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

П р и м е р 4.1

Решить разными способами систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение

1-й способ. Используем метод обратной матрицы. Запишем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A невырожденная, так как ее определитель не равен нулю. Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$A_{11} = -3$; $A_{21} = -5$; $A_{31} = 5$;
$A_{12} = 1$; $A_{22} = 1$; $A_{32} = -1$;
$A_{13} = 7$; $A_{23} = 13$; $A_{33} = -11$.

Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 13 & -11 \end{pmatrix}$.

Далее используем формулу (4.4):

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 13 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$ – единственное решение.

Получаем ответ (–2; 0; 8).

2-й способ. Используем формулы Крамера (4.5). Вычисляем определитель системы (4.7).

В определителе Δ первый столбец заменяем столбцом свободных членов и вычисляем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4.$$

В определителе Δ второй столбец заменяем столбцом свободных членов и вычисляем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

В определителе Δ третий столбец заменяем столбцом свободных членов. Тогда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2(28-36) = 16.$$

Тогда, используя формулы (4.5), получим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{2} = 0; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{2} = 8.$$

Таким образом получаем решение (–2; 0; 8).

3-й способ. Используем метод Гаусса. Приведем заданную систему к равносильной. Для этого осуществим элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы:

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -11 & 1 & 8 \\ 0 & -13 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 8. \end{cases}$

Из нее последовательно находим неизвестные, начиная с x_3:

$$x_3 = 8,\ \ x_2 = 0,\ \ x_1 = -2 - 5 \cdot 0 = -2.$$

Таким образом приходим к ответу (–2; 0; 8).

Пример 4.2

Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

и найти ее решение.

Решение

Запишем расширенную матрицу системы:

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Наибольший порядок отличных от нуля миноров равен 2 (так как любой минор 3-го порядка содержит нулевую строку, то он будет равен нулю). Значит, $r_A = r_{A|B} = 2,$ т. е. исходная система совместна. Поскольку ранг меньше количества неизвестных (2 < 5), то система имеет бесконечное множество решений.

В качестве базисного выберем минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3, x_4, x_5 – свободные. Система, равносильная исходной, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_6. \end{cases}$$

Полагаем

$$x_3 = c_1,\ x_4 = c_2,\ x_5 = c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные, и решаем указанную систему. Получаем

$$x_2 = 23 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3,$$

$$x_1 = 7 - c_1 - c_2 - c_3 - 23 + 2c_1 + 2c_2 + 6c_3 = -16 + c_1 + c_2 + 5c_3.$$

Таким образом решение примет вид

$$(-16 + c_1 + c_2 + 5c_3;\quad 23 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3;\quad c_1, c_2, c_3),$$

где $c_1,\ c_2,\ c_3 \in R.$

Задания для решения в аудитории

I уровень

1.1. Используя формулы Крамера и метод обратной матрицы, решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y + x - 1 = 0, \\ y - x - 1 = 0; \end{cases}$

$$3)\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -x + 6y + z = 5; \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} 2x + 3y - z = 6, \\ x - y + 7z = 8, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$$

1.2. Используя теорему Кронекера–Капелли, исследовать на совместность системы:

$$1)\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 = 1; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 20, \\ 3x_1 + 6x_2 = 12; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 1; \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

и найти их решение методом Гаусса.

II уровень

2.1. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

$$1)\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ ax + 5y = -2a - 5; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 3x - y + z = -4; \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x + 2y - z = 12, \\ 3x - y + 4z = -13, \\ -x + 5y - z = 27; \end{cases} \quad 5)\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 14, \\ 3x - y + 4z = -13, \\ -x + 5y - z = 27. \end{cases}$$

2.2. Решить системы уравнений, пользуясь методом обратной матрицы:

$$1)\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x - 2y + 4z = 9, \\ y + z = 2; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 2x + 3y - z = -1, \\ x + 2y - 4z = 9, \\ -x - 12y + 14z = 1. \end{cases}$$

2.3. Исследовать на совместность системы:

1) $\begin{cases} 4x + y + 3z = 1, \\ 7y - 2z = 2, \\ 8x + 9y + 4z = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

и решить их методом Гаусса.

2.4. Найти ненулевое решение однородных систем линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

2.6. Решить неоднородные системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить системы уравнений, пользуясь методом обратной матрицы и методом Крамера:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ x + 5y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_3 = 13; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$

2. Исследовать системы на совместность и решить методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_1 - x_2 + x_3 = b, \\ x_1 + x_2 - x_3 = c; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

3. Исследовать системы на совместность и в случае совместности решить их:

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Ответы

1. 1) $x = 2,\ \ y = 1;$

   2) $x = -1,\ \ y = 2;$

   3) $x_1 = 5,\ \ x_2 = 6,\ \ x_3 = 10;$

   4) $x_1 = -1,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1;$

   5) $x_1 = -1,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 3;$

   6) $x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 1.$

2. 1) $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = -2;$

   2) $x_1 = 1,\ \ x_2 = -1,\ \ x_3 = 2;$

   3) $x_1 = 1,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 1;$

   4) $x_1 = (b + c)/2,\ \ x_2 = (a - b)/2,\ \ x_3 = (a - c)/2;$

   5) $x_1 = 1,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = -1,\ \ x_4 = -1;$

   6) $x_1 = -2,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = -1.$

3. 1) $x_3 = (34x_1 - 17x_2 - 29)/5,\quad x_4 = (16x_1 - 8x_2 - 16)/5;$

   2) $x_3 = (26 - 27x_1 + 9x_2)/13,\quad x_4 = (3x_1 - x_2 - 13)/13;$

   3) Несовместна;

   4) $x_1 = x_2 = x_3 = 0;$

   5) $x_1 = x_2 = x_3 = 0;\quad x_4 = x_5;$

   6) $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М. : Рольф, 2000.

2. Жевняк, Р. М., Высшая математика : Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1992.

3. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1986.

4. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 ч. / А. А. Гусак. – Минск : Тетрасистемс, 2001.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2000–2002.

6. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа,1986.

7. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. / под ред. А. В. Ефимова и В. П. Демидовича. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа.

8. Рысюк, Н. А. Линейная алгебра : методическое пособие / Н. А. Рысюк, В. К. Цыганова, Н. П. Имашева. – Минск : БПИ, 1984.

9. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : методическое пособие / А. И. Герасимович [и др.]. – Минск : БПИ, 1986.

10. Рысюк, Н. А. Аналитическая геометрия : методическое пособие / Н. А. Рысюк, В. К. Цыганова. – Минск : БПИ, 1985.

11. Кеда, Н. П. Векторная алгебра и аналитическая геометрия : методическое пособие / Н. П. Кеда. – Минск : БГПА, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КОРОЛЁВА Ольга Михайловна
КУЗЬМИЦКАЯ Эльвира Евгеньевна
КУРАЛЕНКО Маргарита Владимировна
НИФОНТОВА Дарья Александровна

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

В 10 частях

Часть 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *А. Е. Дарвиной*

Подписано в печать 24.02.2017. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,14. Уч.-изд. л. 2,45. Тираж 200. Заказ 576.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.