УДК 621.311

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛАНЕТЫ НА ОРБИТЕ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Завистовская О.С., Таразевич А.И.

Научный руководитель - Катковская И.Н., к.ф.-м.н., доцент

Иоганн Кеплер, выдающийся немецкий ученый, один из творцов небесной механики, в течение 25 лет в условиях жесточайшей нужды и невзгод обобщал данные астрономических наблюдений за движением планет. Три закона, говорящие о том, как движутся планеты, были им получены.

Согласно, первого закона Кеплера, планеты движутся по замкнутым кривым, которые называются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце. (Образец оформления материала для проецирования на экран представлен в приложении.)

Движутся планеты с изменяющейся скоростью.

Эти законы – результат математического обобщения данных астрономических наблюдений. Но совершенно непонятно было, почему так “умно” движутся планеты. Законы Кеплера надо было объяснить, то есть вывести из какого-то другого, более общего закона.

Ньютон решил эту сложную задачу. Он доказал, что если планеты движутся вокруг Солнца в соответствии с законами Кеплера, то на них должна действовать со стороны Солнца сила тяготения.

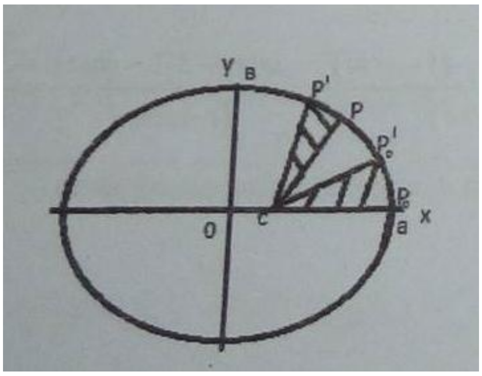
По закону всемирного тяготения $\bar{F} = k\frac{mM}{|\bar{R}(t)|^2}\cdot\frac{-\bar{R}(t)}{|\bar{R}(t)|}$, где k постоянная всемирного тяготения, m масса планеты, M масса Солнца, R вектор Солнца-планеты.

Пусть планета, к примеру Земля, движется по следующему закону $\left(a\cdot\cos\varphi(t); b\cdot\ \sin\varphi(t)\right)$, где a - большая полуось орбиты, b - малая полуось орбиты, φ(t) - угловая скорость планеты.

Тогда вектор Солнца-планеты будет равен $\bar{R}(t) = -(a\cos\varphi(t) - c\,; b\sin\varphi(t)$

Подставив данный вектор в закон всемирного тяготения получим
$$\bar{F}(t) = kmM\left(\frac{(c \quad a\cos\varphi(t))}{((a\cos\varphi(t)-c)^2+(b\sin\varphi(t))^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}};\frac{(\quad b\sin\varphi(t))}{((a\cos\varphi(t)-c)^2+(b\sin\varphi(t))^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\right)$$

Непосредственное использование второго закона Ньютона ведет к необходимости решения нелинейных ДУ второго порядка, что представляет достаточною трудность. Однако можно использовать второй закон Кеплера, по которому вектор Солнце-планета в равные промежутки времени «заметает» равные площади в эллипсе орбиты.



Решая эту задачу, получаем $\varphi(t) - \varepsilon\sin\varphi(t) = \frac{\sqrt{km}}{a^{\frac{3}{2}}}t$, где φ(t) угловая скорость, ε сколь угодно малое число, k постоянная всемирного тяготения, m масса планеты, a большая полуось.

Т.к. t = периоду обращения планеты T получим, что $\frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{km}}{a^{\frac{3}{2}}}$

$$\varphi(t) - \varepsilon\sin\varphi(t) = \frac{2\pi}{T}t, \left(a\cos\frac{2\pi t}{T}; a\sin\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Подставляя это во второй закон Ньютона, мы получае силу притяжения планеты Солнцем $|\bar{F}(t)| = \frac{ma \cdot 4\pi^2}{T^2}$.

По второму закону Кеплера величина $\lambda = \frac{T^2}{a^3}$ постоянная для всех планет Солнечной системы (квадраты периодов обращения относятся как кубы больших полуосей орбит). Очевидно, что $\lambda = \frac{l}{M}$, где M массса Солнца: чем больше притягивающая масса, тем быстрее должна вращаться планета, чтобы не «упасть» на Солнце. Следовательно $T^2 = \frac{a^3 \cdot l}{M}$.

Подставляя данный период в формулу с предыдущего слайда получим, что
$$|\bar{F}| = \frac{4\pi^2 mMa}{la^3} = \frac{4\pi^2}{l}\frac{mM}{a^2} = k\frac{mM}{a}$$

А это и есть закон всемирного тяготения.