УДК 519.212.2

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Латушкин Е.А., Медведев О.А.

Научный руководитель – Метельский А.В., проф.

Парадокс Монти Холла.

Классическая формулировка парадокса Монти Холла звучит так: «Допустим, некоему игроку предложили поучаствовать в известном американском телешоу Let'sMake a Deal, которое ведет Монти Холл, и ему необходимо выбрать одну из трех дверей. За двумя дверьми находятся козы, за одной — главный приз, автомобиль. Ведущий, естественно, знает расположение призов. После того, как игрок делает свой выбор, ведущий открывает одну из оставшихся дверей, за которой находится коза, и предлагает игроку изменить свое решение. Стоит ли игроку сохранить свой первоначальный выбор (Стратегия 1) или лучше согласиться и изменить свой выбор (Стратегия 2)?»

С интуитивной точки зрения, нам кажется, что конечный результат не зависит от смены выбора двери и равен 1/2, но так ли это? Рассчитаем вероятности выигрыша автомобиля при Стратегии 1 и при Стратегии 2. Введем событие А= «Автомобиль при Стратегии 2», В= «Автомобиль при Стратегии 1», тогда Р(В)=1/3, независимо от открытой ведущим двери. Введем гипотезы H_1 = «Первоначальный выбор – Автомобиль» и H_2 = «Первоначальный выбор – Коза» и определим их вероятности. Они будут равны 1/3 и 2/3 соответственно. Определим условные вероятности события А при наступлении событий H_1 и H_2:

$P(A/_{H1})=0$, $P(A/_{H2})=1$.

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/_{H1}) + P(H_2)\, P(A/_{H2}) = \frac{1}{3}*0+\frac{2}{3}*1=\frac{2}{3}.$$

Вывод: Стратегия 1 даёт вероятность успеха (получение автомобиля) равную 1/3, Стратегия 2 дает вероятность успеха 2/3, т.е. есть резон изменить первоначальный выбор.

Чтобы убедиться в правильности наших рассуждений мы выполнили экспериментальную проверку полученного вывода. С этой целью мы написали программу на языке JavaScript для симуляции этого эксперимента. Суть программы заключается в том, что в цикле на 1.000.000 итераций создается массив из 3 элементов, в котором изначально все значения равны 0, после чего случайным образом от 1 до 3 генерируется индекс элемента массива и этому элементу присваивается значение 1, это и есть та дверь, за которой находится автомобиль. Для Стратегии 1 случайно генерируется от 1 до 3 индекс выбора игрока и выполняется сравнение индексов выбора игрока и индекса двери с автомобилем. Если под сгенерированным для игрока индексом «прячется» автомобиль, то игрок выиграл, и к счетчику успехов прибавляется 1. После закрытия цикла, число успехов делится на число общих итераций и умножается на 100%, тем самым мы получаем относительную частоту успехов при Стратегии 1 (примерно 34%). Для Стратегии 2 повторяется цикл и генерация индексов выбора игрока и автомобиля, но добавляется проход по массиву, определяющий невыбранную дверь.После изменяется индекс выбора игрока на оставшийся индекс, то есть происходит смена индекса выбора игрока и снова проводится проверка на совпадение индекса выбора игрока и индекса автомобиля. Если они совпадают, то на обнуленный до начала цикла счетчик добавляется 1. Таким образом, относительная частота успехов при Стратегии 2 оказалась равной 66%.

Парадокс трех узников.

Парадокс трех узников схож с парадоксом Монти Холла. Трое заключенных (А, Б и В) приговорены к смертной казни и помещены в одиночные камеры. Губернатор случайным образом выбирает одного из них и дает ему помилование. Надзиратель знает, кто из троих помилован, но ему велено держать это в тайне. Узник А просит стражника сказать ему имя второго заключенного (кроме него самого), который точно будет казнен: «Если Б помилован, скажи мне, что казнен будет В. Если помилован В, скажи мне, что казнен будет Б. Если они оба будут казнены, а помилован я, подбрось монету, и скажи любое из этих двух имен». Надзиратель говорит, что будет казнен узник Б. Стоит ли радоваться узнику А?

Казалось бы, да. Ведь до получения этой информации вероятность смерти узника А составляла ⅔, а теперь он знает, что один из двух других узников будет казнен — значит, вероятность его казни снизилась до ½. Но на самом деле узник А не узнал ничего нового: если помилован не он, ему назовут имя другого узника, а он и так знал, что кого-то из двоих оставшихся казнят. Если же ему повезло, и казнь отменили, он услышит случайное имя Б или В. Поэтому его шансы на спасение никак не изменились.

Парадокс двух конвертов.

Этот парадокс стал известен благодаря математику Мартину Гарднеру, и формулируется следующим образом: «Предположим, вам с другом предложили два конверта, в одном из которых лежит некая сумма денег $X, а в другом — сумма вдвое больше: $2X. Вы независимо друг от друга вскрываете конверты, пересчитываете деньги, после чего можете обменяться ими. Конверты одинаковые, поэтому вероятность того, что вам достанется конверт с меньшей или с большей суммой, составляет ½. Допустим, вы открыли конверт и обнаружили в нем $10. Следовательно, в конверте вашего друга может быть равновероятно $5 или $20. Если вы решаетесь на обмен, то можно подсчитать математическое ожидание итоговой суммы, то есть ее среднее значение. Она составляет 1/2×$5+1/2×$20=$12,5. Таким образом, обмен вам выгоден. И, скорее всего, ваш друг будет рассуждать точно так же. Но очевидно, что обмен не может быть выгоден вам обоим. В чем же ошибка?»

Имея конверт с 10 долларами, нет никаких оснований полагать, что для второго конверта значения $5 или $20 равновероятны. В этом ошибка приведенных рассуждений.

Дискуссии относительно разрешения парадокса продолжаются и в настоящее время. При этом предпринимаются попытки как объяснить парадокс изнутри, так и выработать наилучшую стратегию поведения в подобной ситуации. В частности, профессор Томас Кавер предложил оригинальный подход к формированию стратегии — менять или не менять конверт, руководствуясь неким интуитивным ожиданием. Скажем, если вы открыли конверт и обнаружили в нем $10 — небольшую сумму по вашим прикидкам — стоит его обменять. А если в конверте, скажем, $1 000, что превосходит ваши самые смелые ожидания, то меняться не надо. Эта интуитивная стратегия в случае, если вам регулярно предлагают выбирать два конверта, дает возможность увеличить суммарный выигрыш больше, чем стратегия постоянной смены конвертов.

Литература

1. Высшая математика. В 2 ч. Ч. 2 Андриянчик, А. Н.; Микулик, Н. А.; Раевская, Л. А.; Чепелев, Н. И.; Федосик, Е. А.; Юринок, В. И. (БНТУ, 2010)
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Монти_Холла