УДК 621.311

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА ПОДВОДНУЮ ЛАБОРАТОРИЮ, ИМЕЮЩУЮ ФОРМУ ЦИЛИНДРА С ПОЛУСФЕРИЧЕСКИМ КУПОЛОМ

Ярош И.С.

Научный руководитель – Рябушко А.П.

Задача:

Вычислить давление на подводную лабораторию, имеющую форму цилиндра, верхнее основание которого накрыто полусферой, погруженную в жидкость. Объем принять как постоянное значение.

Решение:

Точку отсчёта возьмём в центре полусферы. Тогда R – радиус полусферы, $H_ц$ – высота цилиндра.

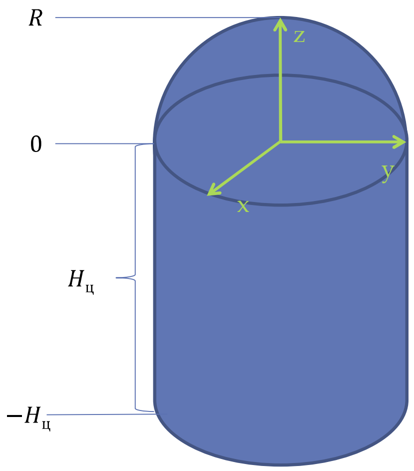

Рисунок 1. Погруженное в жидкость тело.

По условию задачи объём является постоянной величиной. Объём такого тела равен $V = const = \pi R^2 H_ц + \frac{2}{3}\pi R^3$ Выразим из этой формулы высоту цилиндра $H_ц = \frac{V - \frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2}$

Давление на тело будет зависеть от радиуса цилиндра и его высоты. Для того, чтобы найти такой радиус, при котором площадь поверхности будет минимальной, необходимо решить задачу на экстремум. Запишем формулу площади поверхности:

$$S = 2\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi R H_ц = 3\pi R^2 + 2\pi R\left(\frac{V - \frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2}\right) = 3\pi R^2 + \frac{2V}{R} - \frac{4\pi R^2}{3} = \frac{5}{3}\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Находим производную:

$$S' = \frac{10}{3}\pi R - \frac{2V}{R^2} = \frac{10\pi R^3 - 6V}{3R^2} = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{6V}{10\pi}};$$

Таким образом, мы нашли радиус, при котором площадь поверхности будет минимальной. Подставим этот радиус в формулы высоты цилиндра и площади поверхности:

$$H_ц = \frac{V - \frac{2}{3}\pi\frac{6V}{10\pi}}{\pi\sqrt[3]{\frac{36V}{100\pi^2}}} = \frac{3V}{5\pi\sqrt[3]{\left(\frac{6V}{10\pi}\right)^2}};$$

$$S_{min} = \frac{5}{3}\pi\sqrt[3]{\frac{36V^2}{100\pi^2}} + \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{6V}{10\pi}}};$$

Таким образом, мы нашли минимальную площадь поверхности при $R = \sqrt[3]{\frac{6V}{10\pi}}$;

Для нахождения давления разобьём тело на две части: полусферу и цилиндр. Найдем силу давления на их площади поверхности и просуммируем.

1) Находим силу давления на площадь поверхности полусферы:

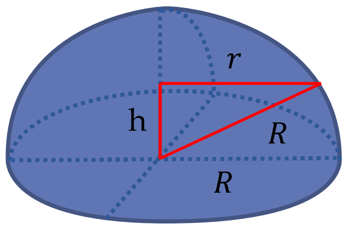

Рисунок 2. Полусфера.

Радиус полусферы – R, h – переменная интегрирования, r- радиус окружности при высоте h. По теореме Пифагора находим r:

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}$$

Через теорему Паскаля найдем давление на площадь поверхности полусферы:

$\mathrm{F} = \rho g(H_c - h)2\pi r\Delta h = \rho g(H_c - h)2\pi\sqrt{R^2 - h^2}\Delta h$, где H_c – высота столба воды

Перейдем к пределам и проинтегрируем полученную формулу:

$$\lim_{\Delta h \to 0} \rho g(H_c - h)2\pi\sqrt{R^2 - h^2}\Delta h = \rho g 2\pi \int_0^R (H_c - h)\sqrt{R^2 - h^2}\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2 - h^2}}dh =$$

$$\rho g 2\pi \int_0^R (H_c - h)Rdh = (\rho g 2\pi H_c Rh - \rho g\pi Rh^2)\Big|_0^R = 2\rho g\pi H_c R^2 - \rho g\pi R^3 =$$

$= 2\rho g\pi H_c\left(\frac{6V}{10\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - \rho g\frac{6V}{10} = \mathrm{F_c}$ – сила давления на площадь поверхности полусферы.

2) Находим силу давления на площадь поверхности цилиндра:

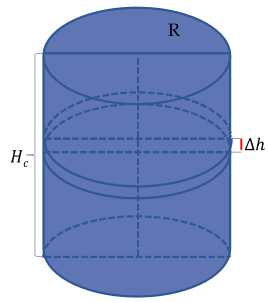

Рисунок 3. Цилиндр.

Высота цилиндра – $H_ц$, h – переменная интегрирования

Используя формулу Паскаля находим давление на площадь поверхности цилиндра:

$$F = \rho g(H_c - h)2\pi R\Delta h$$

Проделываем те же операции, что и с полусферой:

$$\lim_{\Delta h\to 0}\rho g(H_c-h)2\pi R\Delta h = 2\rho g\pi R\int_{-H_ц}^{0}(H_c-h)dh = 2\rho g\pi RH_c h-\rho g\pi Rh^2\Big|_{-\frac{3V}{5\pi\sqrt[3]{\left(\frac{6V}{10\pi}\right)^2}}}^{0} =$$

$$= 2\rho g\pi\sqrt[3]{\frac{6V}{10\pi}}H_c\frac{3V}{5\pi\sqrt[3]{\left(\frac{6V}{10\pi}\right)^2}}+\rho g\pi\sqrt[3]{\frac{6V}{10\pi}}\frac{9V^2}{25\pi^2\sqrt[3]{\left(\frac{6V}{10\pi}\right)^4}} = \rho g\left(\frac{6VHc}{5\sqrt[3]{\frac{6V}{10\pi}}}+3V\right) = F_ц$$

– сила давления на площадь поверхности цилиндра.

Найдем общую силу давления на площадь поверхности тела:

$$F = F_ц + F_c = 2\rho g\pi H_c\left(\frac{6V}{10\pi}\right)^{\frac{2}{3}}-\rho g\frac{6V}{10}+\rho g\left(\frac{6VH_c}{5\sqrt[3]{\frac{6V}{10\pi}}}+3V\right)+\rho g\pi H_c\left(\frac{6V}{10\pi}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \rho g\left(3\pi H_c\left(\frac{6V}{10\pi}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{6V}{10}+\frac{6VH_c}{5\sqrt[3]{\frac{6V}{10\pi}}}+3V\right);$$

Литература:

1. А.П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть - Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2.