



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ**

**Минск
БНТУ
2017**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2017

УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121я7
С23

Составители:

Е. А. Евсева, С. И. Зиневич, М. В. Югова

Рецензенты:

М. Т. Насковец, В. Н. Основин

Сборник задач по сопротивлению материалов с примерами решения / сост. : Е. А. Евсева, С. И. Зиневич, М. В. Югова. – Минск : БНТУ, 2017. – 274 с.
ISBN 978-985-550-821-3.

Сборник задач содержит задания к расчетно-графической работе с примерами решения по курсу «Сопротивление материалов», а также справочный материал, необходимый для решения задач.

Издание предназначено для студентов строительных специальностей.

УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121я7

ISBN 978-985-550-821-3

© Белорусский национальный
технический университет, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Центральное растяжение и сжатие	5
1.1. Расчет статически определимого стержня. Задача 1	5
1.2. Расчет статически определимой стержневой системы. Задача 2.....	14
1.3. Расчет статически неопределимой стержневой системы. Задача 3.....	30
2. Геометрические характеристики плоских сечений.....	40
2.1. Определение главных осей инерции составного сечения. Задача 4	40
3. Кручение	49
3.1. Расчет вала на кручение. Задача 5	49
4. Плоский поперечный изгиб.....	63
4.1. Расчет балок и рамы на изгиб. Задача 6	63
4.2. Определение линейных и угловых перемещений в однопролетной балке. Задача 7	130
5. Расчет статически неопределимых балок	147
5.1. Расчет балки с одной степенью статической неопределимости. Задача 8	147
5.2. Расчет балки с двумя степенями статической неопределимости. Задача 9	166
6. Сложное сопротивление	196
6.1. Расчет внецентренно сжатой колонны. Задача 10.....	196
6.2. Расчет балки на косоугольный изгиб. Задача 11	205
6.3. Расчет пространственного стержня. Задача 12.....	213
7. Устойчивость.....	228
7.1. Расчет стержня на устойчивость. Задача 13	228
8. Динамика	244
8.1. Расчет системы на динамическую нагрузку. Задача 14.....	244
9. Напряженно-деформированное состояние в точке	253
9.1. Исследование напряженно-деформированного состояния в точке. Задача 15	253
Литература.....	261
Приложение 1	262
Приложение 2	263
Приложение 3	264
Приложение 4	266
Приложение 5	269
Приложение 6	270
Приложение 7	271

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Сопротивление материалов» включает изучение теоретического материала и приобретение практических навыков расчета элементов инженерных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, что достигается посредством самостоятельного решения задач.

В сборнике приведены задачи с примерами их решения, подобранные по основным разделам курса «Сопротивление материалов», изучаемого студентами строительных специальностей. В сборник также включен справочный материал, необходимый для решения задач.

При подготовке издания использовался материал предыдущих сборников задач, выпущенных кафедрой «Сопротивление материалов и теории упругости» БНТУ с дополнениями и изменениями.

1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

1.1. Расчет статически определимого стержня

Задача 1

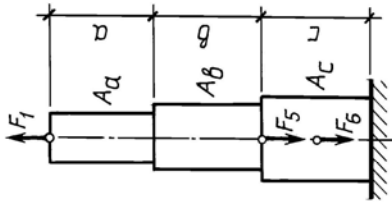
Ступенчатый стержень находится под действием внешних сил F . Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа. Требуется построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.

Исходные данные к задаче 1 приведены в табл. 1.1.

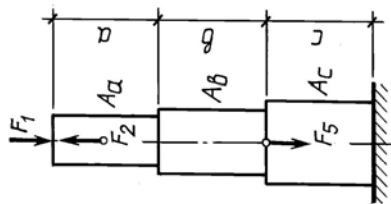
Таблица 1.1

Исходные данные к задаче 1

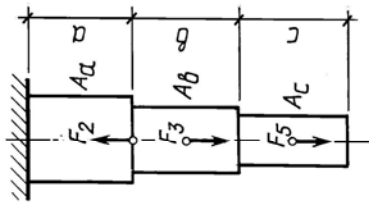
№ варианта	Длина участка, см			Площадь поперечного сечения, см ²			Нагрузка, кН					
	a	b	c	A_a	A_b	A_c	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	80	50	20	12	6	10	60	20	40	60	50	100
2	60	20	70	10	8	6	100	40	140	80	60	120
3	20	80	60	6	8	10	80	90	100	110	40	80
4	50	70	40	6	10	12	160	110	40	60	80	90
5	70	40	80	8	10	14	150	40	90	60	70	110
6	30	60	50	12	8	10	100	120	60	130	40	100
7	80	40	50	16	12	10	110	180	140	50	80	120
8	60	30	50	10	14	12	80	190	50	60	120	100
9	70	60	80	8	12	14	100	50	110	80	90	120
10	50	30	60	10	14	12	60	120	80	110	100	90



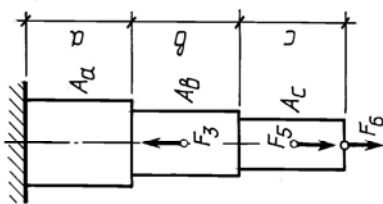
4



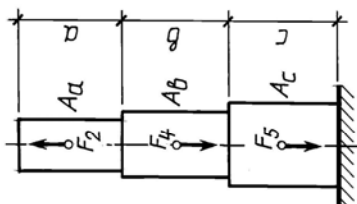
8



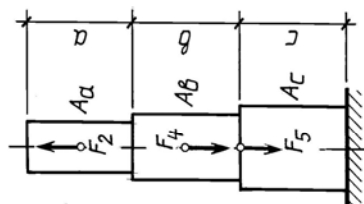
3



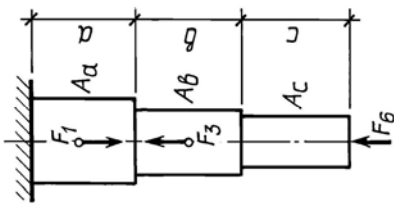
7



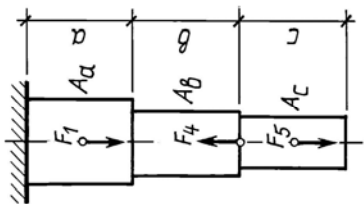
2



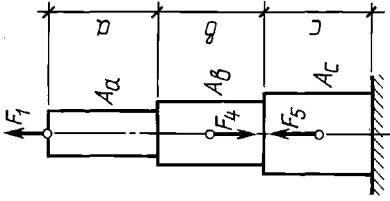
6



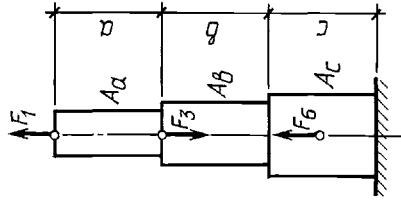
1



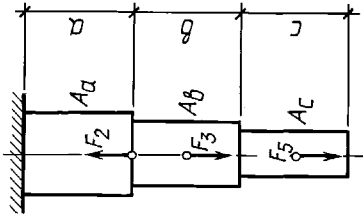
5



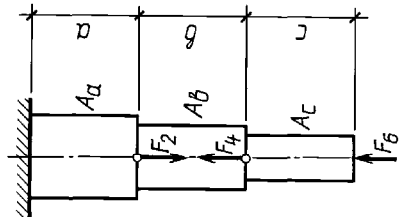
12



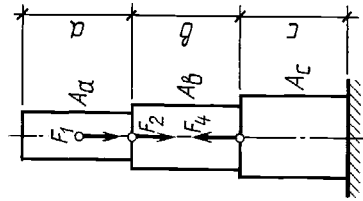
16



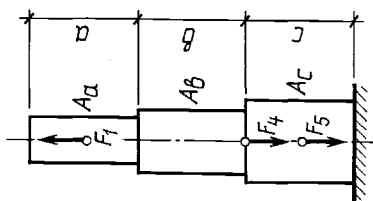
11



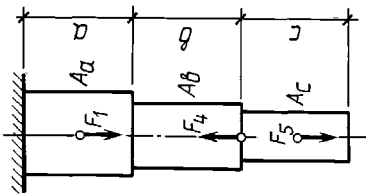
15



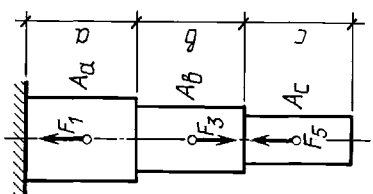
10



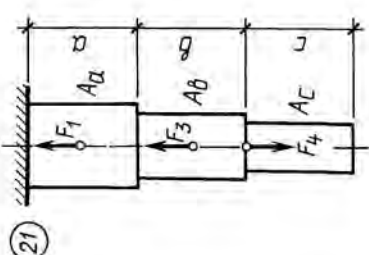
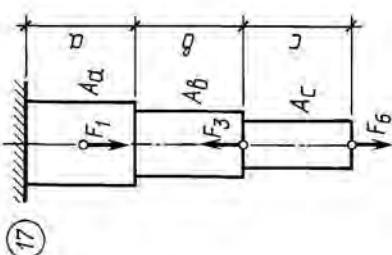
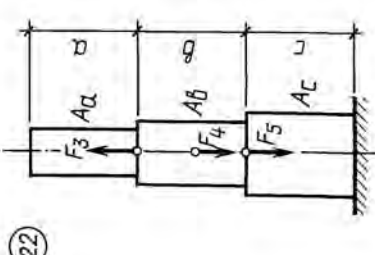
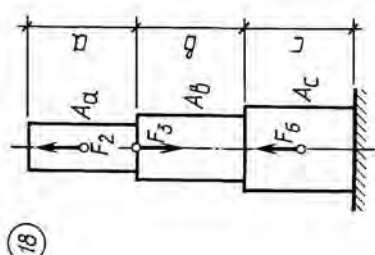
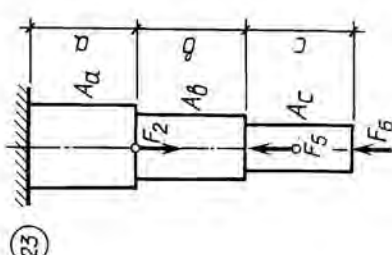
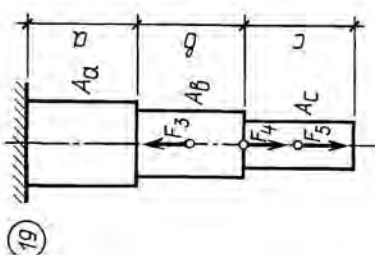
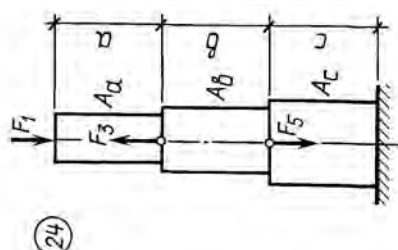
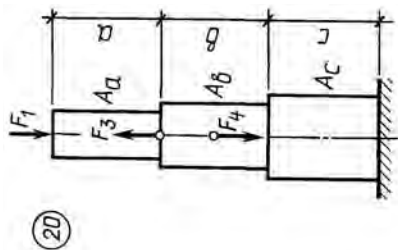
14

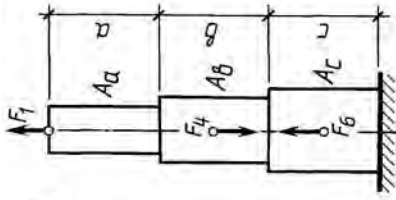


9

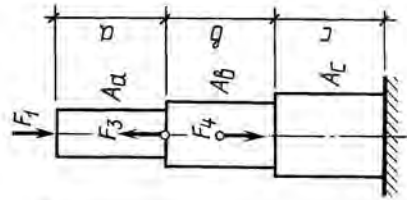


13

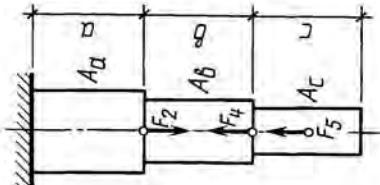




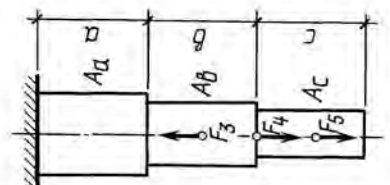
(28)



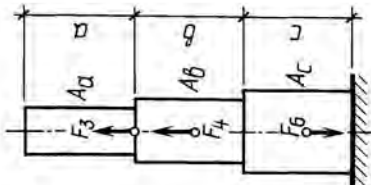
(32)



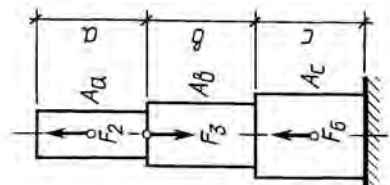
(27)



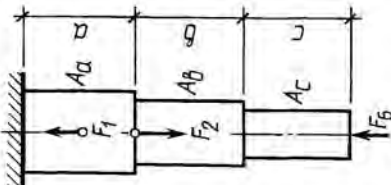
(31)



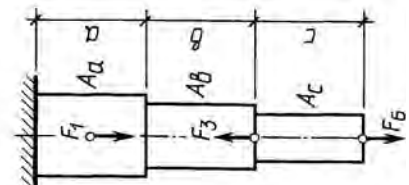
(26)



(30)



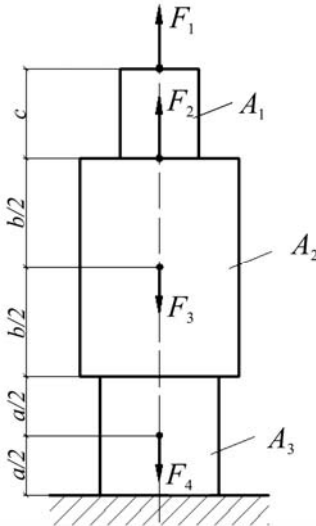
(25)



(29)

Пример решения задачи 1

Ступенчатый стержень находится под действием внешних сил F (рис. 1.1). Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа. Требуется построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений. Собственный вес стержня не учитывать.



$$\begin{aligned} F_1 &= 60 \text{ кН}; \\ F_2 &= 20 \text{ кН}; \\ F_3 &= 100 \text{ кН}; \\ F_4 &= 30 \text{ кН}; \\ A_1 &= 6 \text{ см}^2; \\ A_2 &= 12 \text{ см}^2; \\ A_3 &= 10 \text{ см}^2; \\ a &= 80 \text{ см}; \\ b &= 100 \text{ см}; \\ c &= 100 \text{ см}. \end{aligned}$$

Рис. 1.1. Схема стержня

Решение

Для определения внутренних усилий разбиваем стержень на участки. Границами участков являются точки продольной оси, соответствующие изменению площади поперечного сечения и местам приложения сосредоточенных сил. Определяем, что стержень необходимо разбить на пять участков (рис. 1.2, а).

На участке 1–2 проведем сечение I–I. Отбросим нижнюю часть стержня и ее действие заменим продольной силой N_{12} . Направляем продольную силу от сечения в сторону отброшенной части, тем самым предполагаем, что участок растягивается.

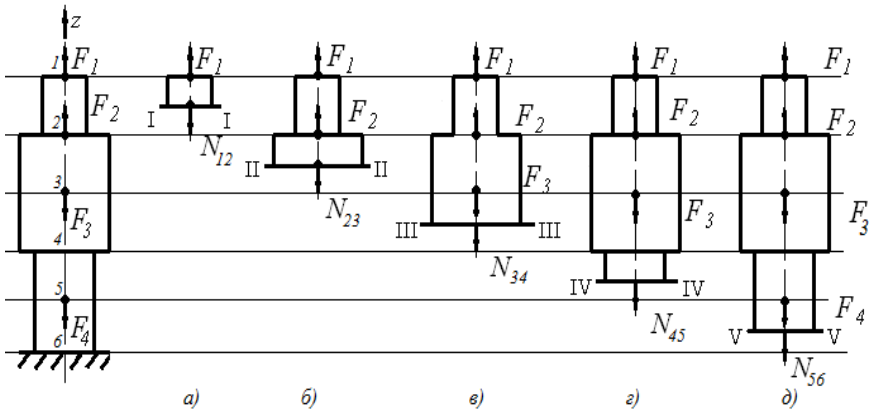


Рис. 1.2. Схема расчета стержня

Запишем уравнение равновесия, проецируя все силы на продольную ось стержня:

$$\sum Z = F_1 - N_{12} = 0,$$

откуда

$$N_{12} = F_1 = 60 \text{ кН}.$$

На участке 1–2 нормальная сила N_{12} постоянна по величине.

Проведем сечение II–II (рис. 1.2, б) и, отбрасывая нижнюю часть стержня, заменяем ее действие продольной силой N_{23} . Проецируем все силы на ось стержня:

$$\sum Z = F_1 + F_2 - N_{23} = 0,$$

откуда

$$N_{23} = F_1 + F_2 = 60 + 20 = 80 \text{ кН}.$$

Аналогично находим продольную силу в сечении III–III (рис. 1.2, в):

$$\sum Z = F_1 + F_2 - F_3 - N_{34} = 0,$$

откуда

$$N_{34} = F_1 + F_2 - F_3 = 60 + 20 - 100 = -20 \text{ кН}.$$

В сечении IV–IV (рис. 1.2, з):

$$\sum Z = F_1 + F_2 - F_3 - N_{45} = 0,$$

откуда

$$N_{45} = F_1 + F_2 - F_3 = 60 + 20 - 100 = -20 \text{ кН}.$$

В сечении V–V (рис. 1.2, д):

$$\sum Z = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - N_{56} = 0,$$

откуда

$$N_{56} = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 = 60 + 20 - 100 - 30 = -50 \text{ кН}.$$

Откладывая в масштабе значения продольных сил N_{12} , N_{23} , N_{34} , N_{45} , N_{56} в пределах соответствующих участков, получаем эпюру продольных сил (рис. 1.3, а).

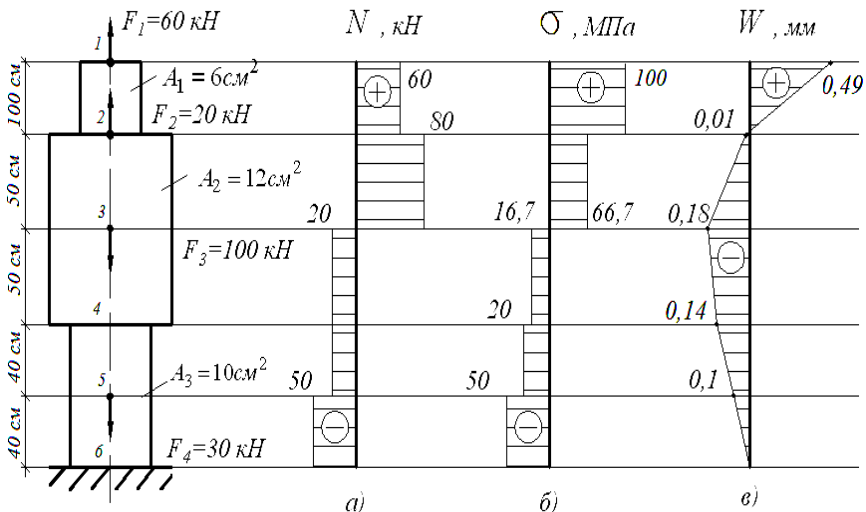


Рис. 1.3. Эпюры продольных сил, напряжений и перемещений

Знак «плюс» показывает, что в пределах данного участка происходит растяжение, а «минус» – сжатие.

Для построения эпюры нормальных напряжений воспользуемся формулой

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Определим напряжение на каждом участке:

$$\sigma_{12} = \frac{N_{12}}{A_1} = \frac{60 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{23} = \frac{N_{23}}{A_2} = \frac{80 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 66,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 66,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{34} = \frac{N_{34}}{A_2} = -\frac{20 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = -16,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = -16,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{45} = \frac{N_{45}}{A_3} = -\frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -20 \cdot 10^6 \text{ Па} = -20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{56} = \frac{N_{56}}{A_3} = -\frac{50 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -50 \cdot 10^6 \text{ Па} = -50 \text{ МПа}.$$

В масштабе откладываем значение напряжений и определяем, что максимальное напряжение возникает на участке 1–2 (рис. 1.3, б).

Определим изменение длин каждого из участков по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E}.$$

$$\Delta l_{56} = -\frac{\sigma_{56} l_{56}}{E} = -\frac{50 \cdot 10^6 \cdot 0,4}{200 \cdot 10^9} = -0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,1 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{45} = -\frac{\sigma_{45} l_{45}}{E} = -\frac{20 \cdot 10^6 \cdot 0,4}{200 \cdot 10^9} = -0,04 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,04 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{34} = -\frac{\sigma_{34} l_{34}}{E} = -\frac{16,7 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9} = -0,04 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,04 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{23} = \frac{\sigma_{23} l_{23}}{E} = \frac{66,7 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9} = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,17 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{12} = \frac{\sigma_{12} l_{12}}{E} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 1,0}{200 \cdot 10^9} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,5 \text{ мм}.$$

Построим эпюру перемещений. Расчет начинаем с верхнего сечения, так как перемещение в заделке отсутствует:

$$W_6 = 0;$$

$$W_5 = W_6 + \Delta l_{56} = -0,1 \text{ мм};$$

$$W_4 = W_5 + \Delta l_{43} = -0,1 - 0,04 = -0,14 \text{ мм};$$

$$W_3 = W_4 + \Delta l_{32} = -0,14 - 0,04 = -0,18 \text{ мм};$$

$$W_2 = W_3 + \Delta l_{21} = -0,18 + 0,17 = -0,01 \text{ мм};$$

$$W_1 = W_2 + \Delta l_{12} = -0,01 + 0,5 = -0,49 \text{ мм}.$$

В масштабе откладываем значение перемещений (рис. 1.3, в).

1.2. Расчет статически определимой стержневой системы

Задача 2

Конструкция, состоящая из элементов большой жесткости и двух стальных стержней с расчетным сопротивлением материала $R = 210$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа, нагружена нагрузкой. Требуется подобрать диаметр стержней, округлив до большего значения с шагом 0,5 см, и выполнить проверочный расчет жесткости, если перемещение точки «С» не должно превышать 2 см ($[\delta] = 2$ см).

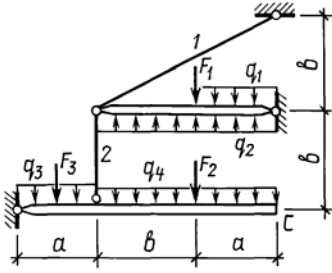
Исходные данные к задаче 2 приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

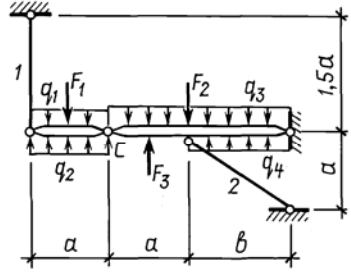
Исходные данные к задаче 2

№ вари- анта	Нагрузка							Длина, м	
	кН			кН/м					
	F_1	F_2	F_3	q_1	q_2	q_3	q_4	a	b
1	10	–	–	–	–	20	–	1,0	1,5
2	30	–	–	–	–	–	20	1,5	2,0
3	20	–	–	–	–	30		1,0	2,0
4	60	–	30	–	–	–	–	2,0	3,0
5	40	20	–	–	–	–	–	2,0	3,0
6	–	60	–	–	10	–	–	3,0	4,0
7	–	–	60	–	20	–	–	2,0	3,0
8	–	–	40	10	–	–	–	2,0	4,0
9	–	–	–	30	–	–	20	1,0	2,0
10	–	–	–	30	–	20	–	1,0	2,0

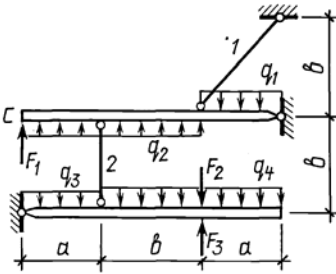
1



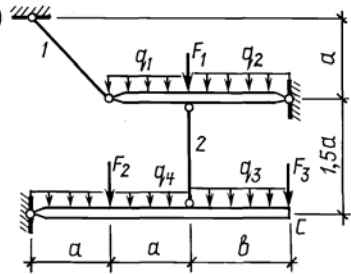
2



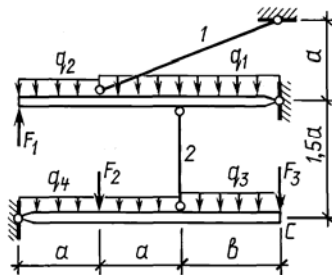
3



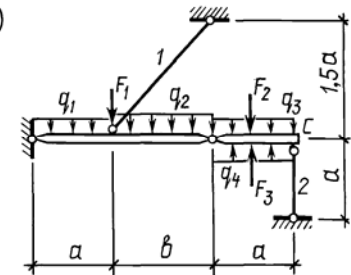
4



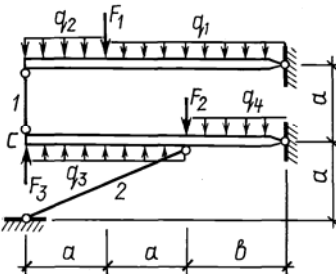
5



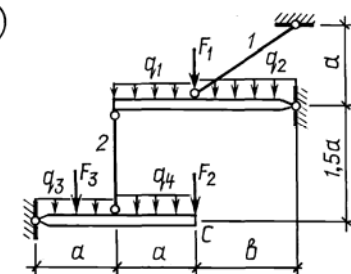
6



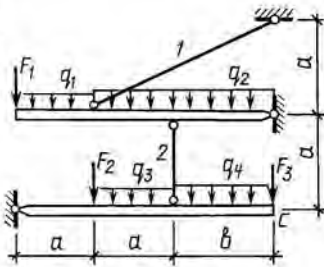
7



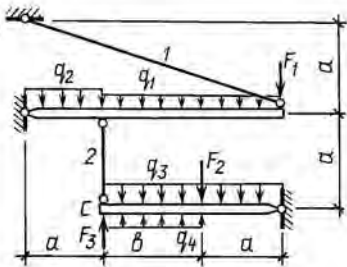
8



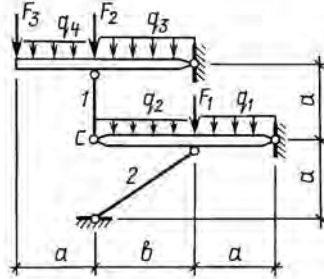
9



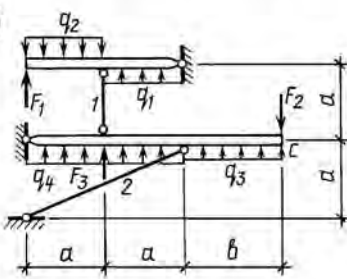
10



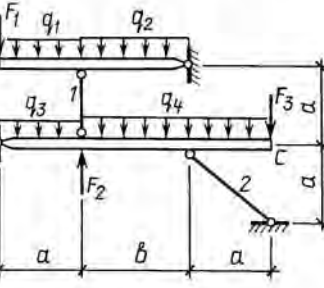
11



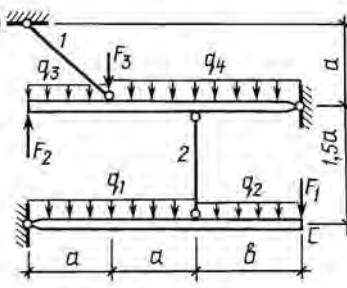
12



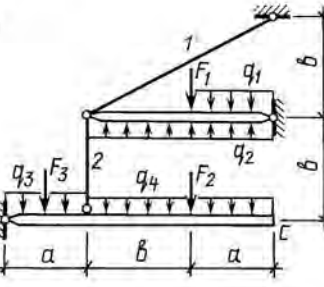
13



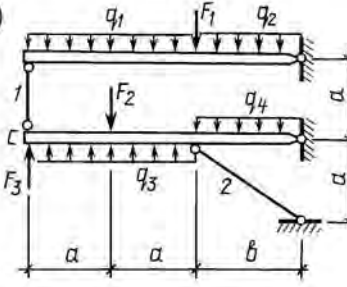
14



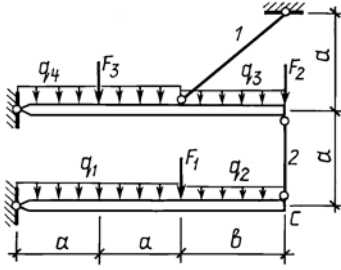
15



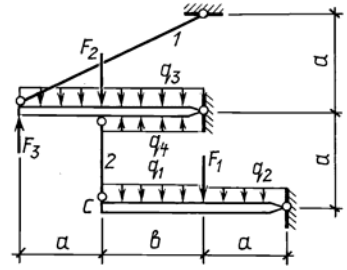
16



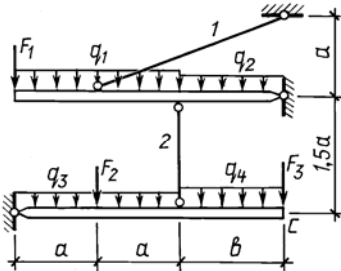
17



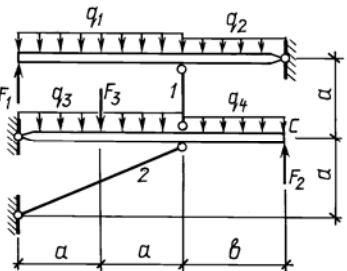
18



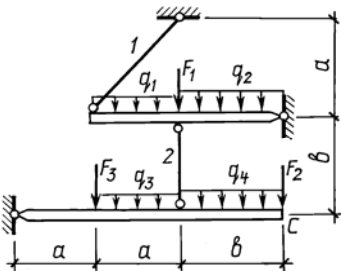
19



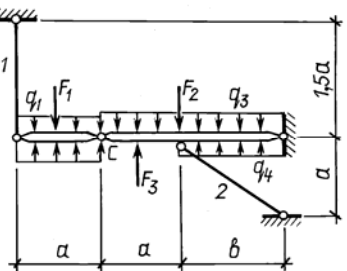
20



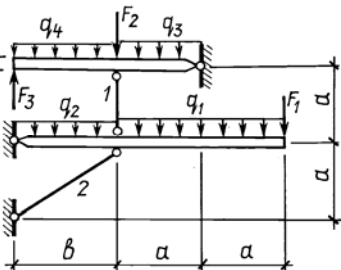
21



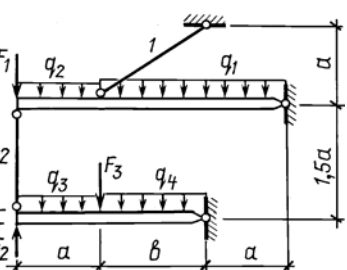
22

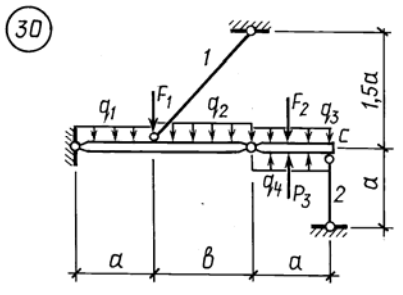
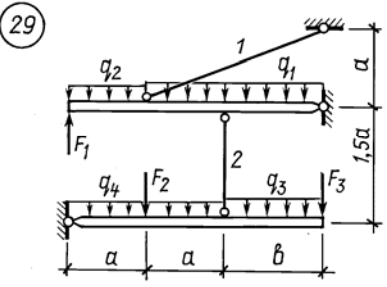
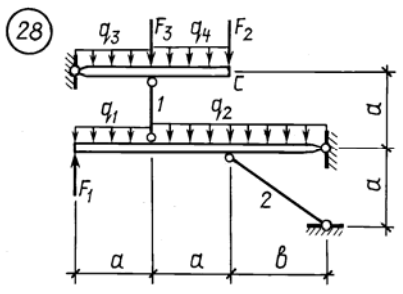
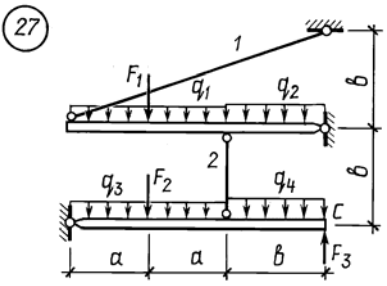
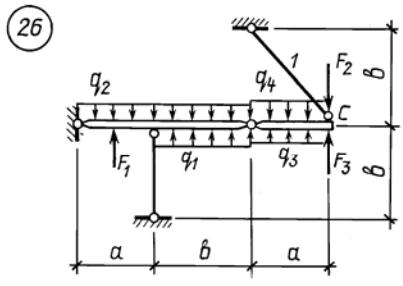
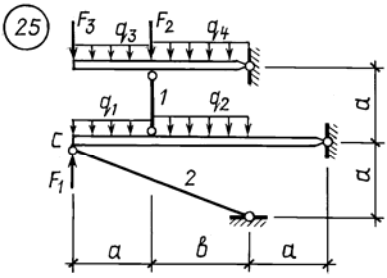


23



24





Примеры решения задачи 2

Пример 1. Конструкция, состоящая из элементов большой жесткости и двух стальных стержней с расчетным сопротивлением материала $R = 210$ МПа и модулем продольной упругости $E = 210$ ГПа, нагружена согласно схеме (рис. 1.4).

Требуется подобрать диаметр стержней, округлив их до большего значения с шагом 0,5 см, и выполнить проверочный расчет жесткости, если перемещение точки C не должно превышать 20 мм.

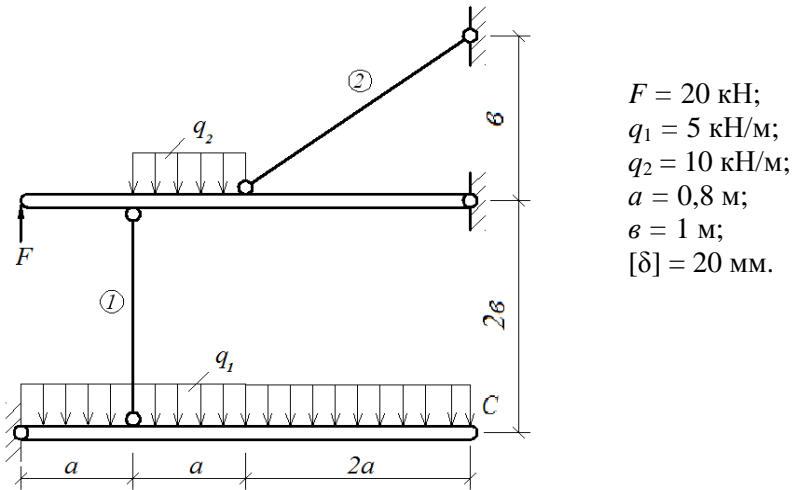


Рис. 1.4. Схема стержневой системы

Решение

Для определения усилий в стержнях мысленно разделим стержневую систему на две составляющие. В первую очередь рассмотрим жесткий элемент I (рис. 1.5), так как при рассечении стержня I он теряет первоначальную форму равновесия. Приложим к стержню I неизвестную продольную силу N_1 , направим ее от сечения, предположив, что стержень растягивается, и определим ее значение.

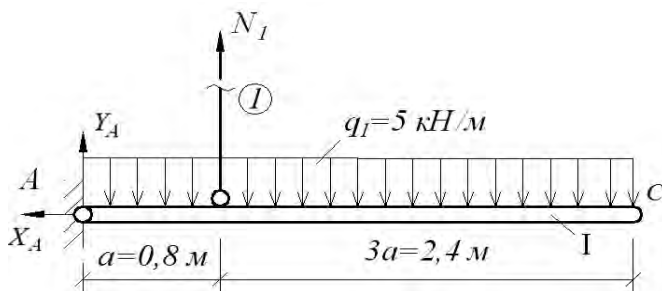


Рис. 1.5. Схема жесткого элемента I

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad q_I 4a 2a - N_I a = 0;$$

$$5 \cdot 4 \cdot 0,8 \cdot 2 \cdot 0,8 - N_I 0,8 = 0;$$

$$N_I = \frac{25,6}{0,8} = 32 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» свидетельствует о том, что стержень растягивается.

Определим опорные реакции X_A и Y_A , составив уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad X_A = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Y_A + N_I - q_I 4a = 0;$$

$$Y_A = q_I 4a - N_I = 5 \cdot 4 \cdot 0,8 - 32 = -16 \text{ кН.}$$

Знак «минус» показывает, что направление реакции Y_A необходимо заменить на противоположное.

Рассмотрим жесткий элемент II (рис. 1.6), приложив к нему растягивающую продольную силу N_1 . Рассечем стержень 2, приложив к нему растягивающее усилие N_2 .

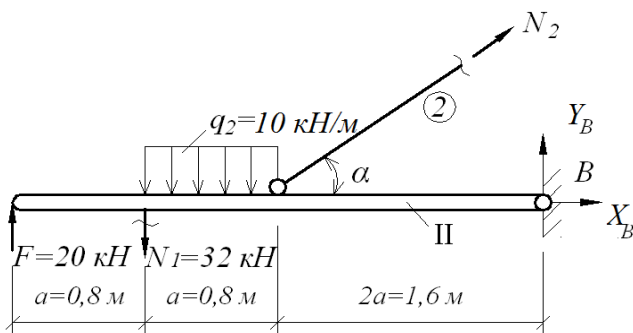


Рис. 1.6. Схема жесткого элемента II

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_B = 0; \quad F4a - N_13a - q_2a2,5a + N_22a \sin \alpha = 0,$$

$$20 \cdot 4 \cdot 0,8 - 32 \cdot 3 \cdot 0,8 - 10 \cdot 0,8 \cdot 2,5 \cdot 0,8 + N_2 \sin \alpha \cdot 2 \cdot 0,8 = 0,$$

$$N_2 \sin \alpha \cdot 1,6 = 28,8.$$

Определим $\sin \alpha$.

Длина стержня 1:

$$l_1 = 2b = 2 \text{ м.}$$

Длина стержня 2:

$$l_2 = \sqrt{b^2 + (2a)^2} = \sqrt{1^2 + 1,6^2} = 1,89 \text{ м.}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{l_2} = \frac{1}{1,89} = 0,529.$$

Тогда $N_2 \cdot 0,529 \cdot 1,6 = 28,8$, $N_2 = \frac{28,8}{0,529 \cdot 1,6} = 34,03 \text{ кН.}$

Определим опорные реакции Y_B и X_B , составив уравнения равновесия:

$$\Sigma Y = 0; \quad F - N_1 - q_2 a + N_2 \sin \alpha + Y_B = 0;$$

$$Y_B = -20 + 32 + 10 \cdot 0,8 - 34,03 \cdot 0,529 = 1,99 \text{ кН.}$$

$$\Sigma X = 0; \quad X_B + N_2 \cos \alpha = 0, \quad X_B = -N_2 \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,529^2} = 0,849,$$

$$X_B = -34,03 \cdot 0,849 = -28,89 \text{ кН.}$$

Знак «минус» говорит о том, что направление реакции X_B необходимо заменить на противоположное.

Подберем диаметр сечения для стержней по расчетному сопротивлению R :

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq R \Rightarrow A \geq \frac{N}{R}.$$

Для первого стержня:

$$A_1 = \frac{N_1}{R} = \frac{32 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,524 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,524 \text{ см}^2,$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}, \quad d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,524}{3,14}} = 1,393 \text{ см} \approx 1,5 \text{ см.}$$

Тогда

$$A_1 = \frac{3,14 \cdot 1,5^2}{4} = 1,77 \text{ см}^2.$$

Для второго стержня:

$$A_2 = \frac{N_2}{R} = \frac{34,03 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,62 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,62 \text{ см}^2;$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,62}{3,14}} = 1,44 \text{ см} \approx 1,5 \text{ см.}$$

Тогда

$$A_2 = 1,77 \text{ см}^2.$$

Для проведения расчета на жесткость определим удлинение стержней I и 2:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 2}{210 \cdot 10^9 \cdot 1,77 \cdot 10^{-4}} = 1,72 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,72 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{34,03 \cdot 10^3 \cdot 1,89}{210 \cdot 10^9 \cdot 1,77 \cdot 10^{-4}} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,73 \text{ мм}.$$

Составим схему перемещений элементов стержневой системы, предположив, что жесткие брусья I и II будут поворачиваться относительно своих опор A и B, оставаясь прямыми (рис. 1.7).

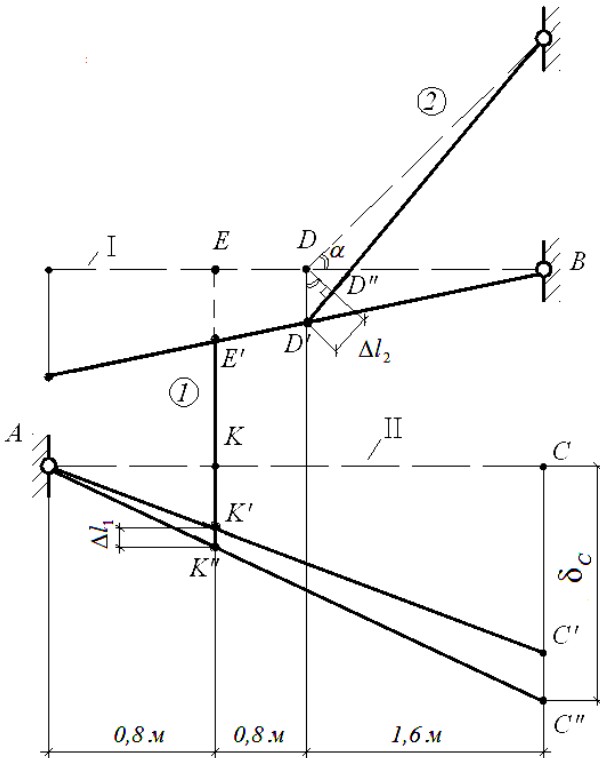


Рис. 1.7. Схема перемещений стержневой системы

Из-за малости перемещений будем полагать, что точки D , E , K и C переместятся соответственно в точки D' , E' , K' и C' , то есть перемещение точек жесткого бруса будет происходить вертикально.

Определим перемещение точки D :

$$D'D'' = \Delta l_2;$$

$$DD' = \frac{D'D''}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} = \frac{1,73}{0,529} = 3,27 \text{ мм.}$$

Из подобия треугольников BEE' и BDD' определим перемещение точки E :

$$\frac{EE'}{BE} = \frac{DD'}{BD};$$

$$EE' = \frac{BE \cdot DD'}{BD} = \frac{2,4 \cdot 3,27 \cdot 10^{-3}}{1,6} = 4,91 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4,91 \text{ мм};$$

$$KK'' = KK' + K'K'';$$

$$KK' = EE' = 4,91 \text{ мм};$$

$$K'K'' = \Delta l_1 = 1,72 \text{ мм};$$

$$KK'' = 4,91 + 1,72 = 6,63 \text{ мм.}$$

Из подобия треугольников ACC'' и AKK'' определим перемещение точки C :

$$\frac{CC''}{AC} = \frac{KK''}{AK};$$

$$CC'' = \frac{AC \cdot KK''}{AK} = \frac{3,2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-3}}{0,8} = 26,52 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 26,52 \text{ мм.}$$

$$\delta_C = CC'' = 26,52 \text{ мм} > [\delta] = 20 \text{ мм.}$$

Жесткость конструкции не обеспечена.

Пример 2. Конструкция, состоящая из элементов большой жесткости и двух стальных стержней с расчетным сопротивлением материала $R = 210$ МПа и модулем продольной упругости $E = 210$ ГПа, загружена согласно схеме (рис. 1.8).

Требуется подобрать диаметр стержней, округлив их до большего значения с шагом 0,5 см, и выполнить проверочный расчет жесткости, если перемещение точки C не должно превышать 20 мм.

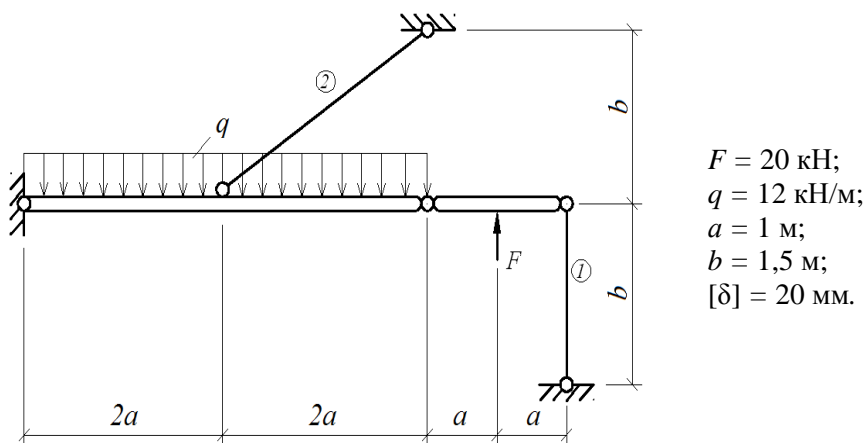


Рис. 1.8. Схема стержневой системы

Решение

Определим усилия в стержнях, мысленно разделив стержневую систему на две составляющие. Рассмотрим жесткий элемент I (рис. 1.9).

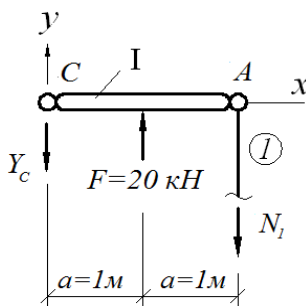


Рис. 1.9. Схема жесткого элемента I

Приложим к стержню *I* неизвестную растягивающую продольную силу N_1 и определим ее значение, составив уравнение равновесия:

$$\sum M_C = 0; \quad N_1 2a - Fa = 0, \quad N_1 2a = Fa;$$

$$N_1 = \frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 10 \text{ кН.}$$

Определим реакцию в шарнире Y_C :

$$\sum Y = 0; \quad F - Y_C - N_1 = 0;$$

$$Y_C = 20 - 10 = 10 \text{ кН.}$$

Рассмотрим жесткий элемент II (рис. 1.10), приложив к нему реакцию Y_C , взятую с обратным знаком.

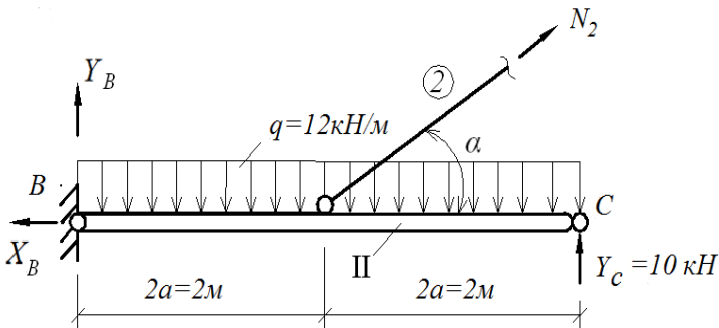


Рис. 1.10. Схема жесткого элемента II

Рассекаем стержень 2 и прикладываем к нему растягивающее усилие N_2 . Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_B = 0; \quad q4a2a - N_2 \sin \alpha 2a - Y_C 4a = 0;$$

$$N_2 \sin \alpha = \frac{q4a2a - Y_C 4a}{2a} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 4}{2} = 28 \text{ кН;}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{l_2} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6;$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 + (2a)^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ м.}$$

Тогда

$$N_2 = \frac{28}{0,6} = 46,67 \text{ кН.}$$

Усилия N_1 и N_2 получились положительными, что говорит о том, что оба стержня растягиваются.

Подберем диаметр сечения для стержней по расчетному сопротивлению R :

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq R \Rightarrow A \geq \frac{N}{R}.$$

Для первого стержня:

$$A_1 = \frac{N_1}{R} = \frac{10 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,476 \cdot 10^{-4} = 0,476 \text{ см}^2;$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}};$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,476}{3,14}} = 0,78 \text{ см} \approx 1,0 \text{ см.}$$

Тогда

$$A_1 = \frac{3,14 \cdot 1,0^2}{4} = 0,79 \text{ см}^2.$$

Для второго стержня:

$$A_2 = \frac{N_2}{R} = \frac{46,67 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,22 \text{ см}^2;$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,22}{3,14}} = 1,68 \text{ см} \approx 2,0 \text{ см}.$$

Тогда

$$A_2 = \frac{3,14 \cdot 2,0^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2.$$

Определим опорные реакции X_B и Y_B , составив уравнения равновесия:

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_B - q4a + N_2 \sin \alpha + Y_C = 0;$$

$$Y_B = 12 \cdot 4 \cdot 1 - 46,67 \cdot 0,6 - 10 = 10 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad -X_B + N_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8;$$

$$X_B = 46,67 \cdot 0,8 = 37,34 \text{ кН}.$$

Для выполнения расчета на жесткость рассмотрим схему перемещений системы (рис. 1.11).

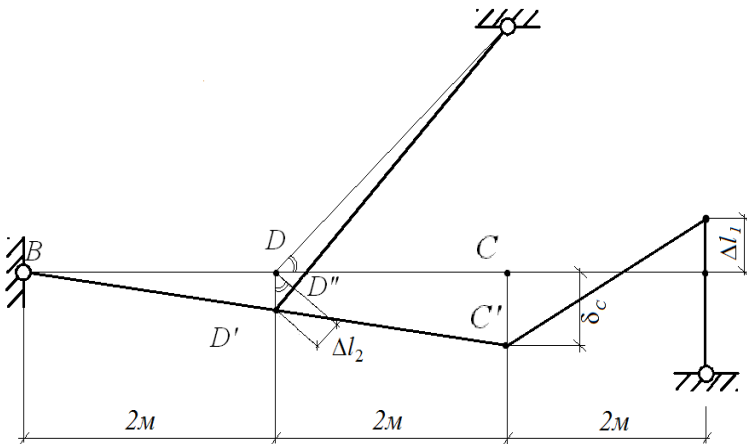


Рис. 1.11. Схема перемещений стержневой системы

Определим удлинение стержня 2, так как перемещение точки C определяется только удлинением этого стержня:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{46,67 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{210 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,77 \text{ мм.}$$

Из схемы перемещений системы запишем

$$D'D'' = \Delta l_2;$$

$$DD' = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} = \frac{1,77}{0,6} = 2,95 \text{ мм.}$$

Из подобия треугольников BCC' и BDD' :

$$\frac{CC'}{BC} = \frac{DD'}{BD};$$

$$CC' = \frac{BC \cdot DD'}{BD} = \frac{4 \cdot 2,95 \cdot 10^{-3}}{2} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5,9 \text{ мм.}$$

Перемещение точки C :

$$\delta_C = CC' = 5,9 \text{ мм} < [\delta] = 20 \text{ мм.}$$

Жесткость конструкции обеспечена.

1.3. Расчет статически неопределимой стержневой системы

Задача 3

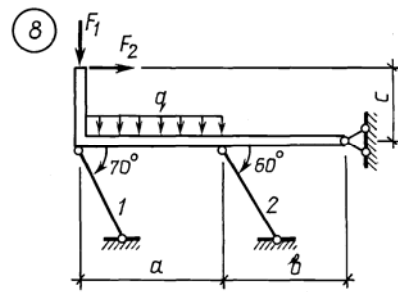
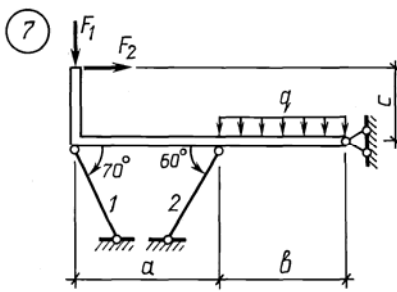
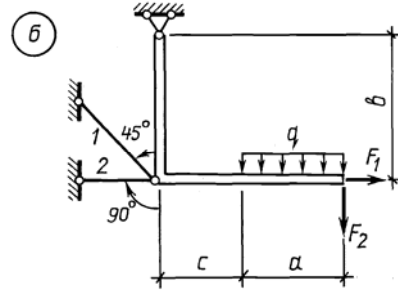
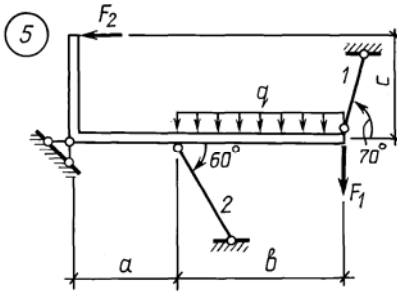
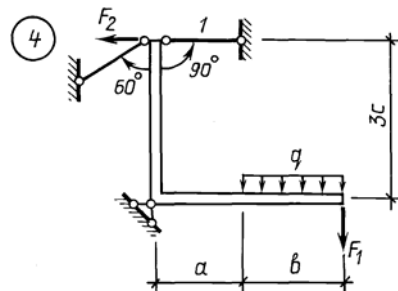
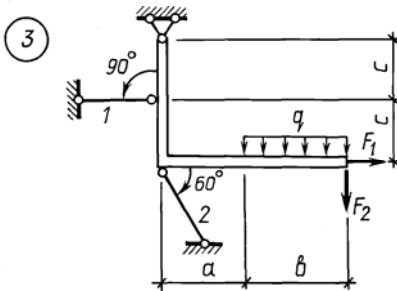
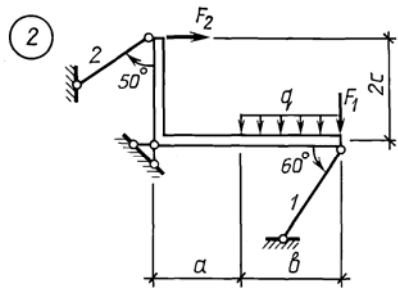
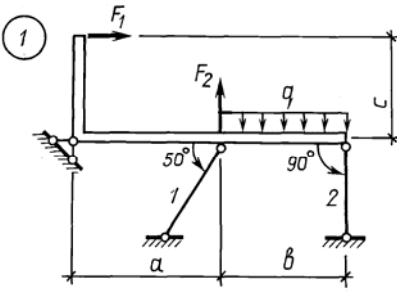
Система, состоящая из элементов большой жесткости и двух стальных стержней, нагружена расчетной нагрузкой. Расчетное сопротивление материала стержней $R = 210$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа. Требуется проверить прочность стержней.

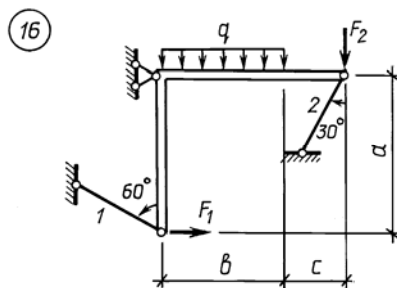
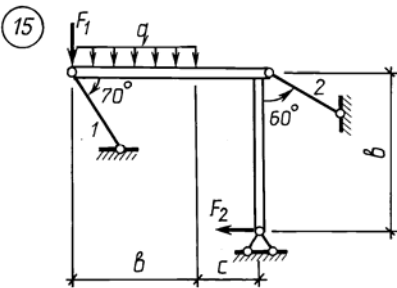
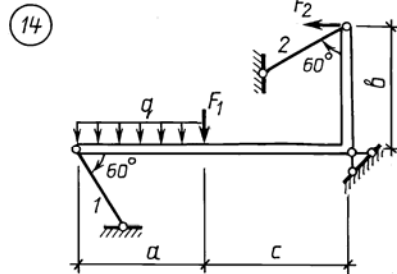
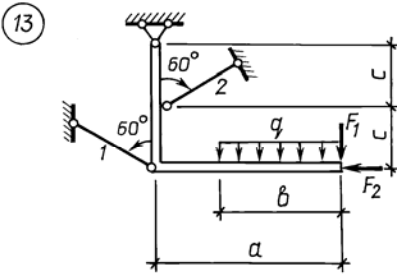
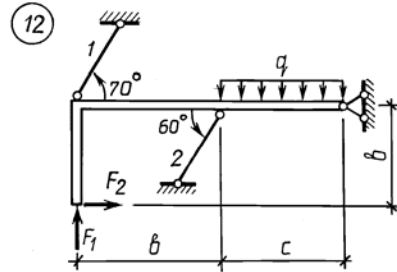
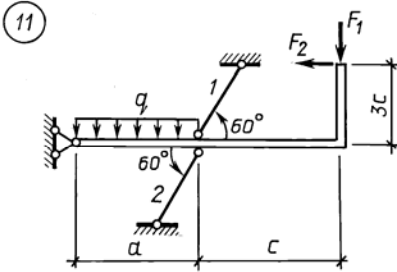
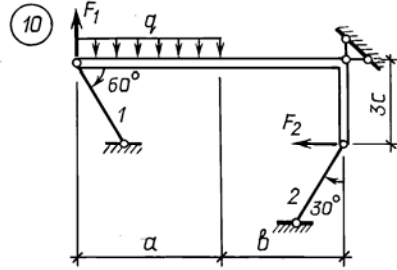
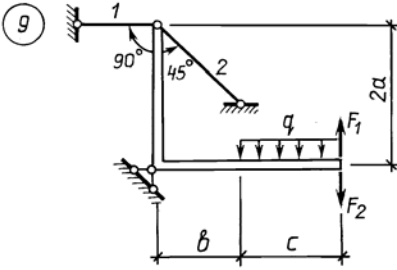
Исходные данные для решения задачи 3 приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

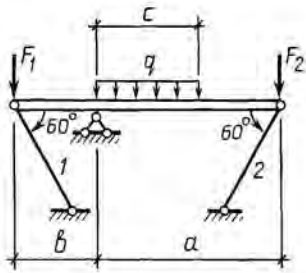
Исходные данные к задаче 3

№ вари- анта	Нагрузка			Длины, м					Площадь сечений, см ²	
	кН		кН/м							
	F_1	F_2	q	a	b	c	l_1	l_2	A_1	A_2
1	10	–	–	4,4	2,6	1,8	1,0	1,2	5	10
2	–	20	–	4,6	2,4	1,2	1,4	1,4	8	9
3	–	–	10	4,8	2,6	1,2	1,6	1,2	7	8
4	20	–	–	4,4	2,8	1,8	1,2	1,0	8	11
5	–	10	–	4,8	2,6	1,6	1,8	1,2	8	7
6	–	–	12	5,0	2,8	0,8	1,0	1,2	10	6
7	15	–	–	5,2	3,2	0,9	0,8	1,1	11	5
8	–	40	–	5,4	3,8	1,6	1,6	1,4	7	6
9	–	–	15	5,2	2,6	1,2	1,2	1,4	9	4
10	30	–	–	4,6	2,8	1,2	1,8	1,2	8	8

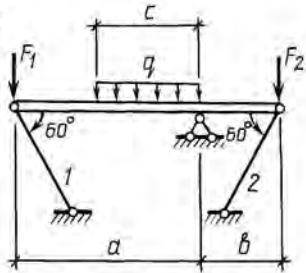




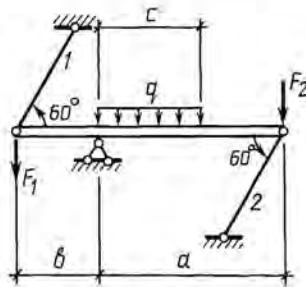
17



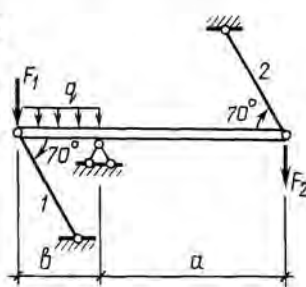
18



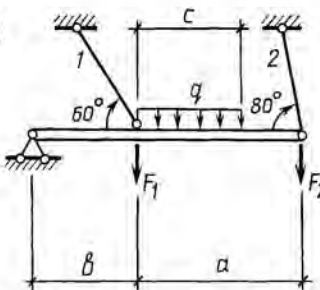
19



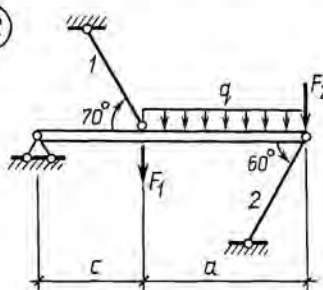
20



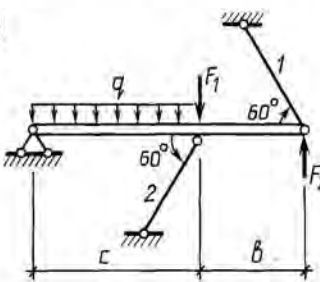
21



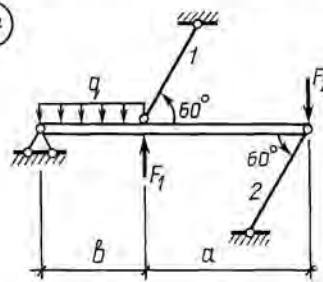
22



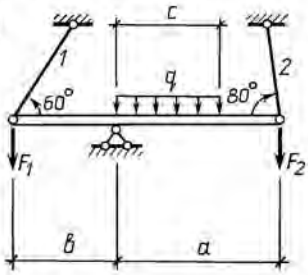
23



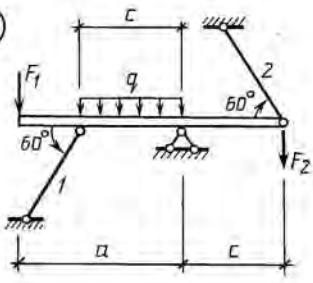
24



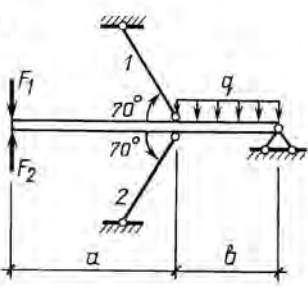
25



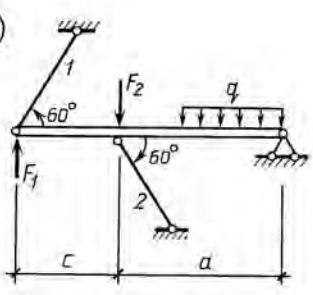
26



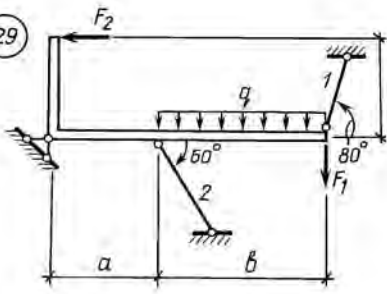
27



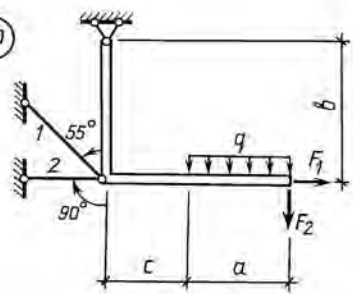
28



29



30



Пример решения задачи 3

Система, состоящая из элементов большой жесткости и двух стальных стержней, загружена расчетной нагрузкой (рис. 1.12, 1.13). Расчетное сопротивление материала стержней $R = 210$ МПа. Требуется проверить прочность стержней.

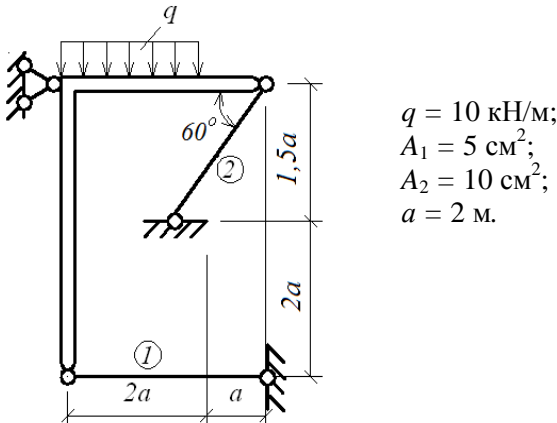


Рис. 1.12. Схема стержневой системы

Решение

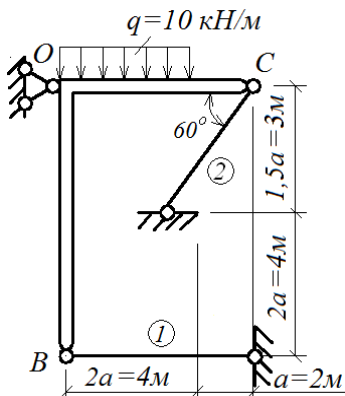


Рис. 1.13. Схема стержневой системы с нагрузкой

Составим расчетную схему стержневой системы (рис. 1.14).

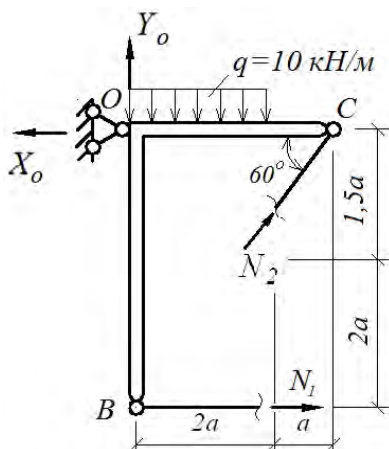


Рис. 1.14. Расчетная схема стержневой системы

В схеме N_1 и N_2 – продольные силы, возникающие в стержнях 1 и 2, Y_o и X_o – вертикальная и горизонтальная составляющая опорной реакции шарнирно-неподвижной опоры O .

Из направления действия нагрузки предполагаем, что первый стержень растягивается (силу N_1 направляем от сечения), а второй стержень сжимается (силу N_2 направляем к сечению). Таким образом, имеем четыре неизвестные силы (N_1 , N_2 , Y_o , X_o) и три уравнения равновесия ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M_i = 0$). Следовательно, данная система является один раз статически неопределимой и для ее решения требуется составить дополнительное уравнение перемещений.

Запишем уравнение равновесия:

$$\sum M_O = -N_2 3a \sin 60^\circ + q 2a a - N_1 3,5a = 0;$$

$$-N_2 \cdot 0,866 \cdot 6 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - N_1 \cdot 3,5 \cdot 2 = 0;$$

$$-5,196N_2 - 7N_1 + 80 = 0.$$

Данное уравнение имеет две неизвестные продольные силы.

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим схему перемещений стержневой системы (рис. 1.15). Из-за малости деформаций считаем, что при повороте жесткого элемента вокруг неподвижной точки O , все его точки перемещаются линейно по перпендикуляру к линии, соединяющей эту точку с неподвижной.

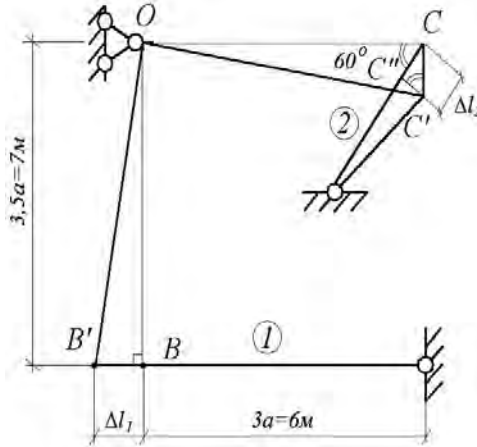


Рис. 1.15. Схема перемещений стержневой системы

Из подобия треугольников OCC' и OBV' определим:

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}, \quad \frac{BB'}{7} = \frac{CC'}{6};$$

$$BB' = \Delta l_1, \quad CC' = \frac{CC''}{\sin 60^\circ} = \frac{\Delta l_2}{\sin 60^\circ},$$

$$\frac{\Delta l_1}{7} = \frac{\Delta l_2}{\sin 60^\circ \cdot 6};$$

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1 \cdot 7} = \frac{N_2 l_2}{0,866 EA_2 \cdot 6}.$$

Рассчитаем длину стержней:

$$l_1 = 6 \text{ м}, \quad l_2 = \frac{1,5a}{\sin 60^\circ} = \frac{1,5 \cdot 2}{0,866} = 3,46 \text{ м}.$$

Подставляем все известные величины и получаем дополнительное уравнение перемещений:

$$\frac{N_1 \cdot 6}{E \cdot 5 \cdot 7} = \frac{N_2 \cdot 3,46}{0,866E \cdot 10 \cdot 6} \Rightarrow N_1 = 0,388N_2.$$

Решаем совместно уравнение моментов и дополнительное уравнение:

$$\begin{cases} -5,196N_2 - 7N_1 + 80 = 0; \\ N_1 = 0,388N_2. \end{cases}$$

$$-5,196N_2 - 7 \cdot 0,388N_2 + 80 = 0, \quad -7,912N_2 = -80;$$

$$N_2 = 10,11 \text{ кН}, \quad N_1 = 0,388N_2 = 0,388 \cdot 10,11 = 3,92 \text{ кН}.$$

Знак «плюс» указывает на то, что предполагаемый вид деформации стержней подтверждается.

Определим напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3,92 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 7,84 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,84 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{10,11 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 10,11 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,11 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Прочность стержней обеспечена.

Определим реакции в опоре O :

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_o - q2a + N_2 \sin 60^\circ = 0;$$

$$Y_o = 10 \cdot 4 - 10,11 \cdot 0,866 = 31,24 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad -X_o + N_1 + N_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$X_o = 3,92 + 10,11 \cdot 0,5 = 8,98 \text{ кН}.$$

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

2.1. Определение главных осей инерции составного сечения

Задача 4

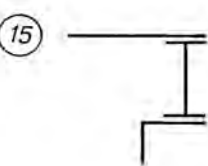
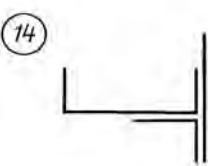
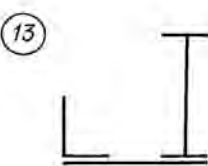
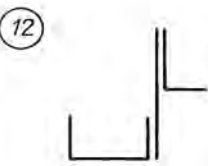
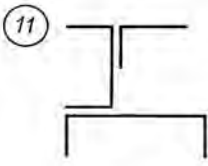
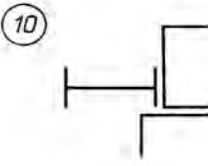
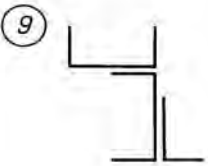
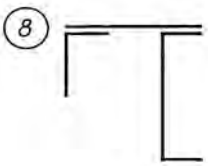
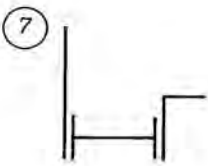
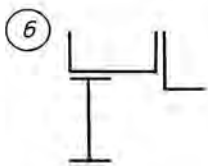
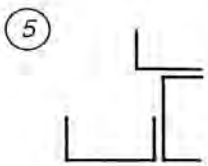
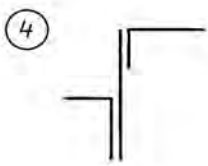
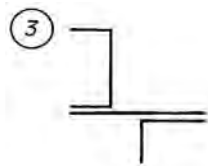
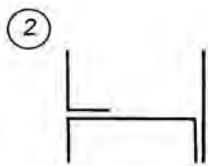
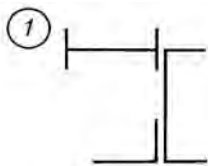
Для заданного сечения, состоящего из листа и прокатных профилей требуется вычислить главные центральные моменты инерции, определить их положение; вычертить сечение в масштабе 1 : 2, показать все оси и размеры.

Исходные данные к задаче 4 представлены в табл. 2.1.

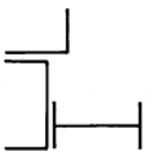
Таблица 2.1

Исходные данные к задаче 4

№ вари- анта	Лист		Уголок равно- полочный	Уголок неравно- полочный	Двутавр	Швеллер
	h	b				
	см		мм	мм		
1	18	1,4	80 × 80 × 6	–	16	22
2	18	1,6	–	90 × 56 × 6	18	22
3	20	1,8	100 × 100 × 8	–	18	20
4	22	2,0	–	125 × 80 × 8	20	20
5	24	2,2	125 × 125 × 10	–	20	18
6	16	2,4	–	100 × 63 × 7	22	18
7	18	1,4	90 × 90 × 7	–	22	16
8	20	1,6	–	110 × 70 × 8	24	18
9	22	1,8	110 × 110 × 8	–	24	18
10	24	2,0	–	125 × 80 × 10	16	20



16



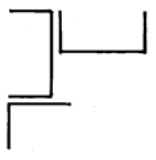
17



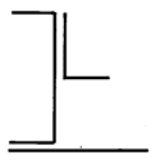
18



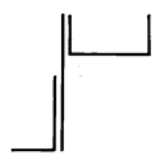
19



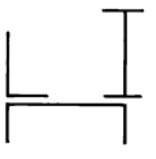
20



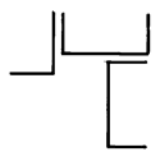
21



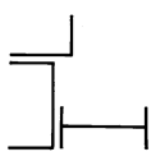
22



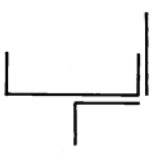
23



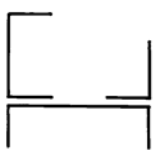
24



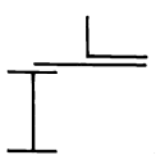
25



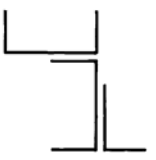
26



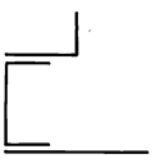
27



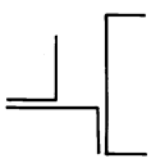
28



29



30



Пример решения задачи 4

Заданное сечение (рис. 2.1) состоит из прямоугольного листа и прокатных профилей: лист 22×2 см, уголок неравнополочный $125 \times 80 \times 8$, двутавр № 18.

Требуется вычислить главные центральные моменты инерции, начертить сечение и показать все оси и размеры.

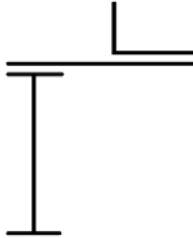


Рис. 2.1. Схема сечения

Решение

Предварительно рассчитаем и выпишем из сортамента (прил. 1) геометрические характеристики профилей, составляющих сечение.

Геометрические характеристики листа 22×2 см (фигура 1, рис. 2.2):

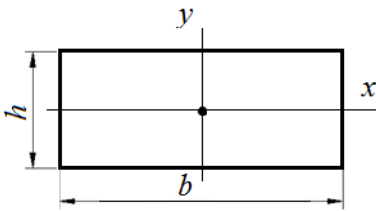


Рис. 2.2. Фигура 1

$$b = 22 \text{ см}, \quad h = 2 \text{ см};$$

$$A_1 = 22 \cdot 2 = 44 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{22 \cdot 2^3}{12} = 14,67 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{22^2 \cdot 2}{12} = 1774,67 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_1y_1} = 0.$$

Геометрические характеристики уголка $125 \times 80 \times 8$ (фигура 2, рис. 2.3):

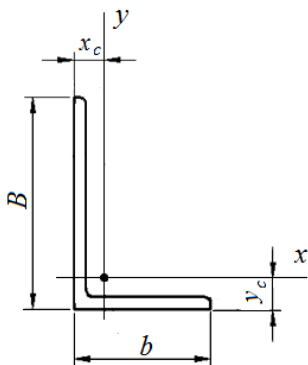


Рис. 2.3. Фигура 2

$$B = 125 \text{ мм}, \quad b = 80 \text{ мм};$$

$$A_2 = 15,98 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_2} = 80,95 \text{ см}^4, \quad I_{y_2} = 225 \text{ см}^4;$$

$$x_{c_2} = 4,05 \text{ см}, \quad y_{c_2} = 1,84 \text{ см};$$

$$I_{x_2 y_2} = 84,1 \text{ см}^4.$$

Уголок в составном сечении повернут на 90° , поэтому моменты инерции из сортамента меняются местами.

Геометрические характеристики двутавра № 18 (фигура 3, рис. 2.4):

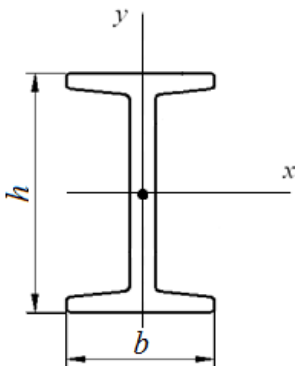


Рис. 2.4. Фигура 3

$$h = 180 \text{ мм}, \quad b = 90 \text{ мм};$$

$$A_3 = 23,4 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_3} = 1290 \text{ см}^4, \quad I_{y_3} = 82,6 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3 y_3} = 0.$$

Определим положение центра тяжести сечения, предварительно выбрав вспомогательные оси x_0 и y_0 . Проведем эти оси через центр тяжести листа и рассчитаем расстояние между осями x_0 и y_0 и центральными осями каждого из элементов сечения (рис. 2.5)

$$x_c = \frac{S_y}{A_i} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{44 \cdot 0 + 16 \cdot 2,55 - 23,4 \cdot 6,5}{44 + 15,98 + 23,4} =$$

$$= -\frac{111,35}{83,38} = -1,33 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{44 \cdot 0 + 15,98 \cdot 2,84 - 23,4 \cdot 10}{44 + 15,98 + 23,4} =$$

$$= -\frac{188,62}{83,38} = -2,26 \text{ см.}$$

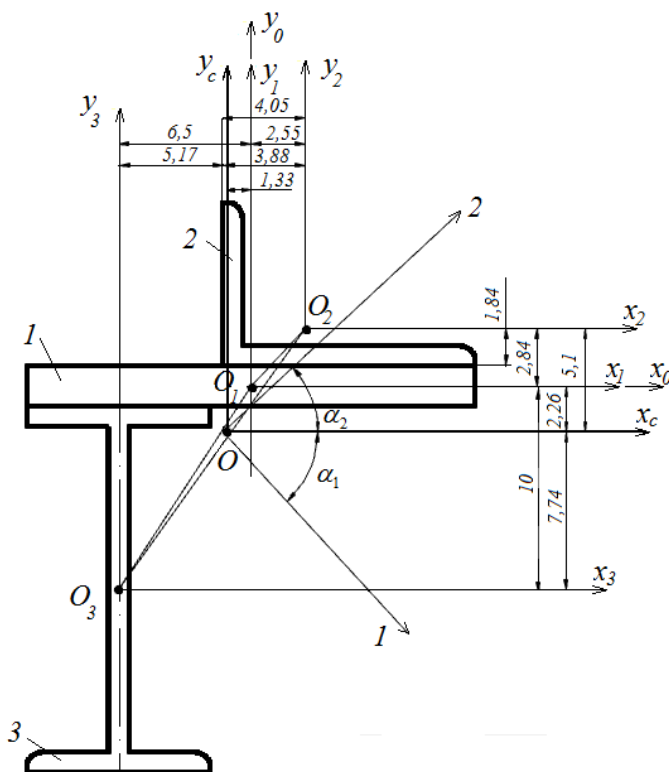


Рис. 2.5. Схема составного сечения с положением главных центральных осей (размеры даны в см)

Через найденный центр тяжести составного сечения проводим центральные оси x_c и y_c . Рассчитаем расстояния между осями x_c и y_c и центральными осями каждого из элементов сечения.

Расстояния между осями x_i :

$$a_1 = 10 - 7,74 = 2,26 \text{ см};$$

$$a_2 = 2,26 + 2,84 = 5,1 \text{ см};$$

$$a_3 = -10 + 2,26 = -7,74 \text{ см}.$$

Расстояния между осями y_i :

$$b_1 = 1,33 \text{ см};$$

$$b_2 = 2,55 + 1,33 = 3,88 \text{ см};$$

$$b_3 = -6,5 + 1,33 = -5,17 \text{ см}.$$

Определим осевые моменты инерции составного сечения относительно центральных осей:

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= \sum (I_{x_i} + a_i^2 A_i) = I_{x_1} + A_1 a_1^2 + I_{x_2} + A_2 a_2^2 + I_{x_3} + A_3 a_3^2 = \\ &= 14,67 + 44 \cdot 2,26^2 + 80,95 + 15,98 \cdot 5,1^2 + 1290 + 23,4 \cdot (-7,74)^2 = \\ &= 3427,83 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= \sum (I_{y_i} + b_i^2 A_i) = I_{y_1} + A_1 b_1^2 + I_{y_2} + A_2 b_2^2 + I_{y_3} + A_3 b_3^2 = \\ &= 1774,67 + 44 \cdot 1,33^2 + 225 + 15,98 \cdot 3,88^2 + 82,6 + \\ &+ 23,4 \cdot (-5,17)^2 = 3026,13 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Определим центробежный момент инерции составного сечения:

$$\begin{aligned}
 I_{x_c y_c} &= \sum (I_{x_i y_i} + A_i a_i b_i) = I_{x_1 y_1} + A_1 a_1 b_1 + I_{x_2 y_2} + A_2 a_2 b_2 + \\
 &+ I_{x_3 y_3} + A_3 a_3 b_3 = 44 \cdot 2,26 \cdot 1,33 - 84,1 + 15,98 \cdot 5,1 \cdot 3,88 + \\
 &+ 23,4 \cdot (-7,74) \cdot (-5,17) = 1300,73 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Перед $I_{x_3 y_3}$ ставим знак «минус» в соответствии с правилом знаков при расположении уголка (рис. 2.6).

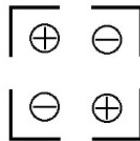


Рис. 2.6. Схема определения знака центробежного момента инерции для уголка

Определим значения главных центральных моментов инерции:

$$\begin{aligned}
 \frac{I_{\max}}{\min} &= I_{1,2} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2} = \\
 &= \frac{3427,83 + 3026,13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3427,83 - 3026,13}{2}\right)^2 + 1300,73^2} = \\
 &= 3228,42 \pm 1316,15.
 \end{aligned}$$

$$I_{\max} = I_1 = 3228,42 + 1316,15 = 4543,13 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_2 = 3228,42 - 1316,15 = 1910,83 \text{ см}^4.$$

Проверим правильность вычисления:

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{\max} + I_{\min};$$

$$3427,83 + 3026,13 = 4545,13 + 1910,83.$$

Определим положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_1} = \frac{1300,73}{3026,13 - 4543,13} = -0,857;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_2} = \frac{1300,73}{3026,13 - 1910,83} = 1,163;$$

$$\alpha_1 = -40,7^\circ, \quad \alpha_2 = 49,3^\circ, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^\circ.$$

Угол α_1 откладывается от оси x_c по ходу часовой стрелки, так как он отрицателен, α_2 – против нее, так как он положителен (см. рис. 2.5).

3. КРУЧЕНИЕ

3.1. Расчет вала на кручение

Задача 5

Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен скручивающими моментами. Расчетное сопротивление материала вала на сдвиг $R_c = 130$ МПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Требуется построить эпюру крутящих моментов, подобрать диаметр вала, округлив его до большего размера с шагом 0,5 см, построить эпюру напряжений, эпюру углов закручивания, эпюру относительных углов закручивания.

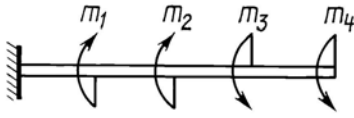
Исходные данные к задаче 5 представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

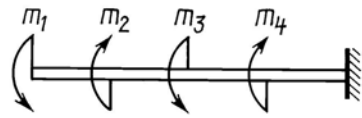
Исходные данные к задаче 5

№ варианта	Длина участков, м			Моменты, кНм				[Θ], градус
	a	b	c	m_1	m_2	m_3	m_4	
1	1,1	1,6	0,8	10	14	9	26	2,0
2	1,2	1,4	0,9	33	6	25	7	1,5
3	1,4	0,8	1,1	7	18	8	25	1,1
4	1,4	1,8	0,8	6	9	24	8	2,5
5	1,5	0,9	0,7	9	19	10	24	2,1
6	0,6	1,8	1,2	32	9	23	8	1,6
7	0,7	1,7	0,9	12	18	10	27	2,7
8	0,8	0,5	1,6	13	10	22	7	3,0
9	0,9	1,2	1,6	4	20	9	26	1,2
10	1,0	0,8	1,8	30	12	23	8	2,2

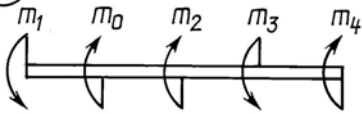
1



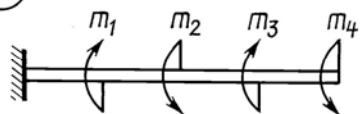
2



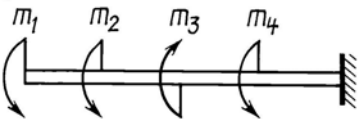
3



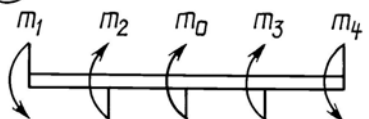
4



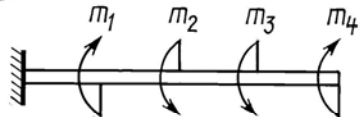
5



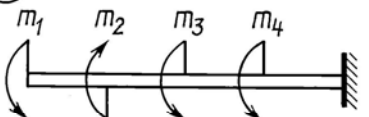
6



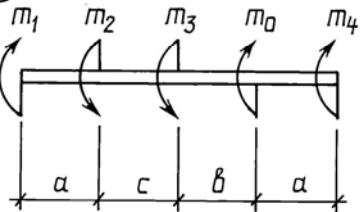
7



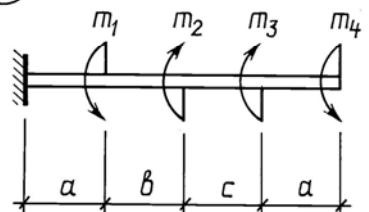
8

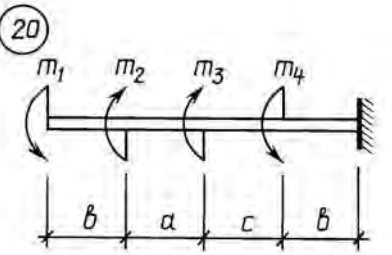
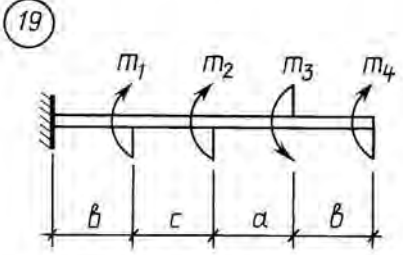
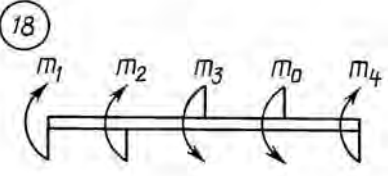
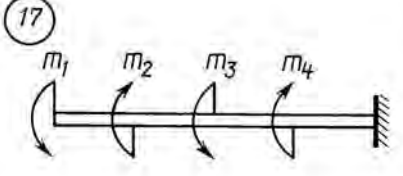
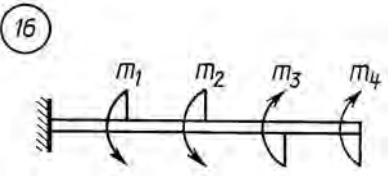
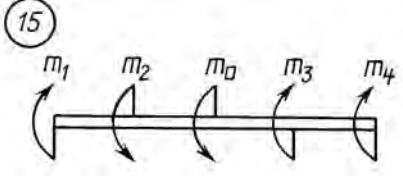
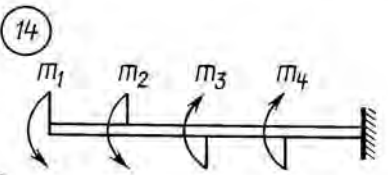
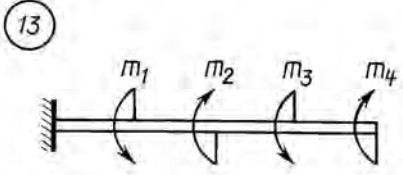
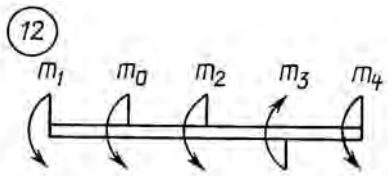
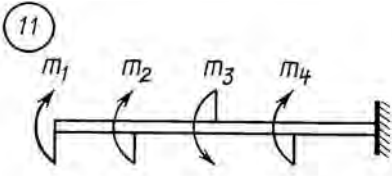


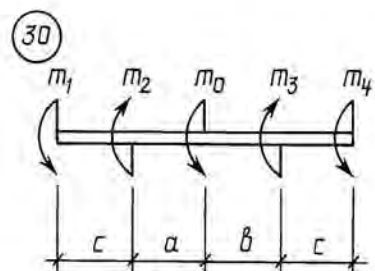
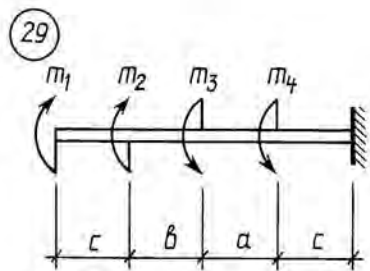
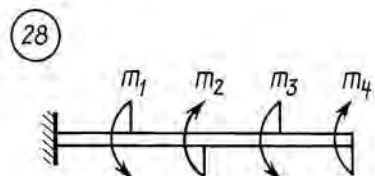
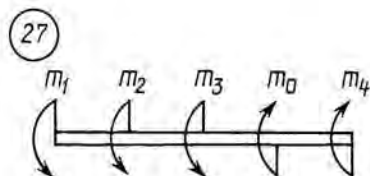
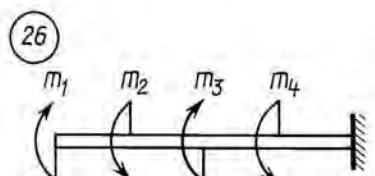
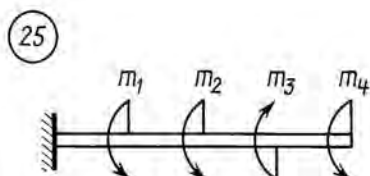
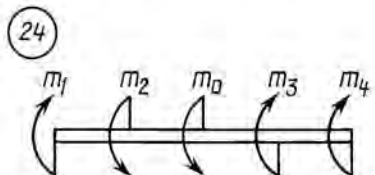
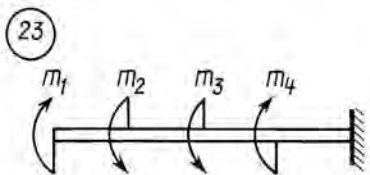
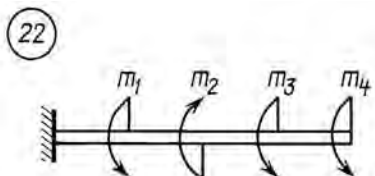
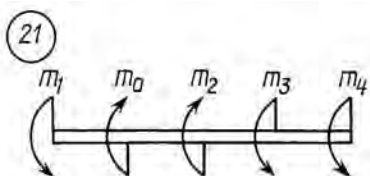
9



10







Примеры решения задачи 5

Пример 1. Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен скручивающими моментами (рис. 3.1). Расчетное сопротивление материала вала на сдвиг $R_c = 130$ МПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Требуется построить эпюру крутящих моментов, подобрать диаметр вала, округлив его до большего размера с шагом 0,5 см, построить эпюру напряжений, эпюру углов закручивания, эпюру относительных углов закручивания.

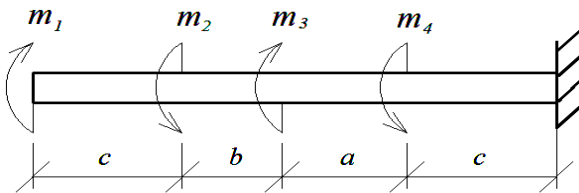


Рис. 3.1. Схема вала

$$a = 1 \text{ м}, \quad b = 0,8 \text{ м}, \quad c = 1,2 \text{ м};$$

$$m_1 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad m_2 = 21 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad m_3 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad m_4 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$[\theta] = 2^\circ/\text{м}.$$

Решение

Построим эпюру крутящих моментов (рис. 3.2, а). При определении крутящих моментов в сечениях вала принимаем следующее правило знаков: момент считается положительным, если при взгляде со стороны сечения его направление совпадает с движением часовой стрелки.

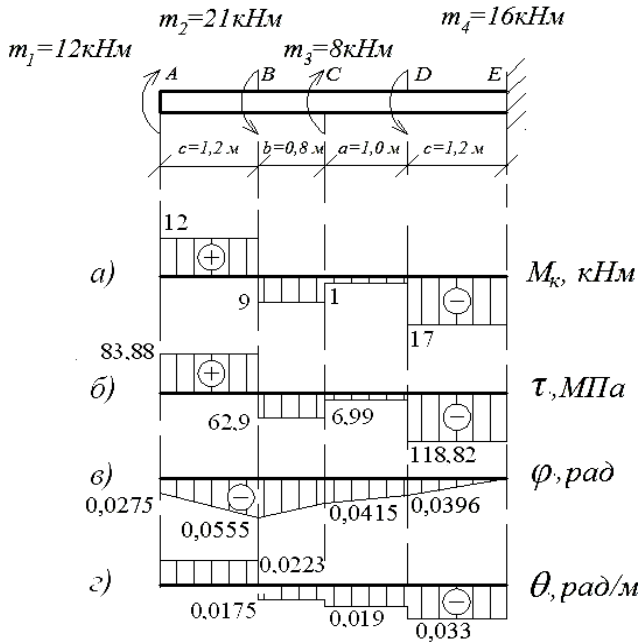


Рис. 3.2. Эпюры крутящих моментов, касательных напряжений, углов закручивания и относительных углов закручивания

Участок AB :

$$M_{K_{AB}} = m_1 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BC :

$$M_{K_{BC}} = m_1 - m_2 = 12 - 21 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD :

$$M_{K_{CD}} = m_1 - m_2 + m_3 = -9 + 8 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DE :

$$M_{K_{DE}} = m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = -1 - 16 = -17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По эпюре (см. рис. 3.2, а) определяем максимальный крутящий момент:

$$M_{K_{\max}} = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K\max}}{W_{\rho}} = \frac{16M_{K\max}}{\pi d^3} \leq R_c, \quad \text{где} \quad W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{K\max}}{\pi R_c}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 17 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 130 \cdot 10^6}} = 0,0873 \text{ м} = 8,73 \text{ см} \approx 9 \text{ см}.$$

Определим диаметр вала из условия жесткости:

$$\theta = \frac{M_{K\max}}{GI_{\rho}} \leq [\theta], \quad \text{где} \quad I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$\theta = \frac{32M_{K\max}}{G\pi d^4} \leq [\theta];$$

$$[\theta] = 2 \text{ }^\circ/\text{м} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,0349 \text{ рад/м};$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{K\max}}{G\pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 17 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,0349}} = 0,0888 \text{ м} = 8,88 \text{ см} \approx 9 \text{ см}.$$

Из двух значений диаметров выбираем большее, округлив его

$$d = 0,09 \text{ м}.$$

Тогда полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,09^3}{16} = 143,07 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Определим касательные напряжения, возникающие на участках вала:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{KAB}}{W_{\rho}} = \frac{12 \cdot 10^3}{143,07 \cdot 10^{-6}} = 83,88 \cdot 10^6 \text{ Па} = 83,88 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{KBC}}{W_{\rho}} = -\frac{9 \cdot 10^3}{143,07 \cdot 10^{-6}} = -62,91 \cdot 10^6 \text{ Па} = -62,91 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{KCD}}{W_{\rho}} = -\frac{1 \cdot 10^3}{143,07 \cdot 10^{-6}} = -6,99 \cdot 10^6 \text{ Па} = -6,99 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{DE} = \frac{M_{KDE}}{W_{\rho}} = -\frac{17 \cdot 10^3}{143,07 \cdot 10^{-6}} = -118,82 \cdot 10^6 \text{ Па} = -118,82 \text{ МПа.}$$

Построим эпюру касательных напряжений (рис. 3.2, б).

Определим углы закручивания на участках вала, используя следующую формулу:

$$\varphi = \frac{M_K l}{GI_{\rho}},$$

где полярный момент инерции $I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,09^4}{32} = 643,79 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$.

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{KDE} c}{GI_{\rho}} = -\frac{17 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 644 \cdot 10^{-8}} = -0,0396 \text{ рад};$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{KCD} a}{GI_{\rho}} = -\frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1}{80 \cdot 10^9 \cdot 644 \cdot 10^{-8}} = -0,0019 \text{ рад};$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{KBC} b}{GI_{\rho}} = -\frac{9 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{80 \cdot 10^9 \cdot 644 \cdot 10^{-8}} = -0,014 \text{ рад};$$

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{KAB} c}{GI_{\rho}} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 644 \cdot 10^{-8}} = 0,0279 \text{ рад.}$$

Строим эпюру углов закручивания (рис. 3.2, з), учитывая, что угол поворота в заделке отсутствует:

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_D = \varphi_E + \varphi_{DE} = -0,0396 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_D + \varphi_{CD} = -0,0396 - 0,0019 = -0,0415 \text{ рад};$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \varphi_{BC} = -0,0415 - 0,014 = -0,0555 \text{ рад};$$

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{AB} = -0,0555 + 0,0279 = -0,0276 \text{ рад}.$$

Построим эпюру относительных углов закручивания (рис. 3.2, з). Наиболее нагруженным является участок DE , где

$$\tau_{\max} = 118,82 < R_c = 130 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Пример 2. Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен скручивающими моментами (рис. 3.3). Расчетное сопротивление материала вала на сдвиг $R_c = 130$ МПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Требуется построить эпюру крутящих моментов, подобрать диаметр вала, округлив его до большего размера с шагом 0,5 см, построить эпюру напряжений, эпюру углов закручивания, эпюру относительных углов закручивания.

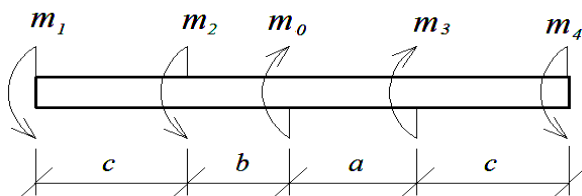


Рис. 3.3. Схема вала

$$a = 1,2 \text{ м}, \quad b = 1,4 \text{ м}, \quad c = 0,9 \text{ м},$$

$$m_1 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad m_2 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad m_3 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad m_4 = 14 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$[\theta] = 1,2^\circ/\text{м}.$$

Решение

Определим величину значения неизвестного момента m_0 , составив уравнение равновесия:

$$\sum m = 0;$$

$$\sum m = -m_1 - m_2 + m_0 + m_3 - m_4 = 0;$$

$$-16 - 8 + m_0 + 12 - 14 = 0, \quad m_0 = 26 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Найдем крутящий момент на участках вала:

Участок AB :

$$M_{K_{AB}} = -m_1 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BC :

$$M_{K_{BC}} = -m_1 - m_2 = -16 - 8 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD :

$$M_{K_{CD}} = -m_1 - m_2 + m_0 = -24 + 26 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DE :

$$M_{K_{DE}} = -m_1 - m_2 + m_0 + m_3 = 2 + 12 = 14 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построим эпюру крутящих моментов (рис. 3.4, a).

По эпюре определяем максимальный крутящий момент:

$$M_{K_{\max}} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

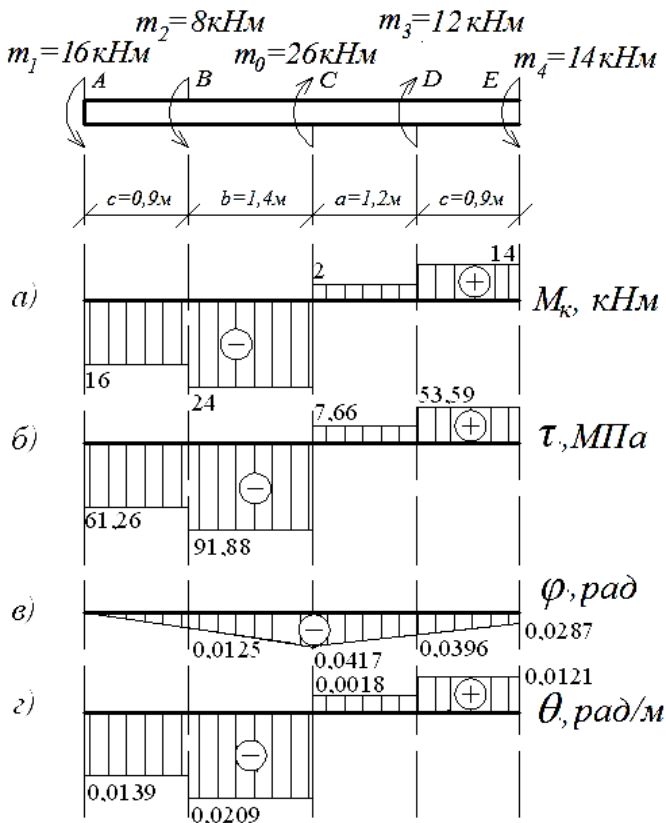


Рис. 3.4. Схема вала. Эпюры крутящих моментов, касательных напряжений, углов закручивания и относительных углов закручивания

Определим диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K \max}}{W_{\rho}} = \frac{16M_{K \max}}{\pi d^3} \leq R_c, \quad \text{где} \quad W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{K \max}}{\pi R_c}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 24 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 130 \cdot 10^6}} = 0,098 \text{ м} = 9,8 \text{ см} \approx 10 \text{ см}.$$

Определим диаметр вала из условия жесткости:

$$\theta = \frac{M_{K \max}}{GI_{\rho}} \leq [\theta], \quad \text{где} \quad I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$[\theta] = 1,2^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} = 0,021 \text{ рад/м};$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{K \max}}{G\pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 24 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,021}} = 0,109 \text{ м} = 10,9 \text{ см} \approx 11 \text{ см}.$$

Из двух значений диаметров выберем большее, округлив его:

$$d = 0,11 \text{ м}.$$

Тогда полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,11^3}{16} = 261,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Определим касательные напряжения, возникающие на участках вала:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{KAB}}{W_{\rho}} = -\frac{16 \cdot 10^3}{261,2 \cdot 10^{-6}} = -61,26 \cdot 10^6 \text{ Па} = -61,26 \text{ МПа};$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{KBC}}{W_{\rho}} = -\frac{24 \cdot 10^3}{261,2 \cdot 10^{-6}} = -91,88 \cdot 10^6 \text{ Па} = -91,88 \text{ МПа};$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{KCD}}{W_{\rho}} = \frac{2 \cdot 10^3}{261,2 \cdot 10^{-6}} = 7,66 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,66 \text{ МПа};$$

$$\tau_{DE} = \frac{M_{KDE}}{W_{\rho}} = \frac{14 \cdot 10^3}{261,2 \cdot 10^{-6}} = 53,59 \cdot 10^6 \text{ Па} = 53,59 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру касательных напряжений (рис. 3.4, б).

Определим углы закручивания на участках вала, используя формулу

$$\varphi = \frac{M_K l}{GI_\rho},$$

где полярный момент инерции $I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,11^4}{32} = 1437 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$.

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{K_{AB}} c}{GI_\rho} = -\frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{80 \cdot 10^9 \cdot 1437 \cdot 10^{-8}} = -0,0125 \text{ рад};$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{K_{BC}} b}{GI_\rho} = -\frac{24 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{80 \cdot 10^9 \cdot 1437 \cdot 10^{-8}} = -0,0292 \text{ рад};$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{K_{CD}} a}{GI_\rho} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 1437 \cdot 10^{-8}} = 0,0021 \text{ рад};$$

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{K_{DE}} c}{GI_\rho} = \frac{14 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{80 \cdot 10^9 \cdot 1437 \cdot 10^{-8}} = 0,0109 \text{ рад}.$$

Строим эпюру углов закручивания (рис. 3.4, в), условно считая, что сечение A является неподвижным:

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 - 0,0125 \text{ рад} = -0,0125 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = -0,0125 - 0,0292 = -0,0417 \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = -0,0417 + 0,0021 = -0,0396 \text{ рад};$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{DE} = -0,0396 + 0,0109 = -0,0287 \text{ рад}.$$

Определим относительные углы закручивания на участках вала, для расчета используем формулу $\theta = \frac{\varphi}{l}$:

$$\theta_{AB} = \frac{\varphi_B}{c} = -\frac{0,0125}{0,9} = -0,0139 \text{ рад};$$

$$\theta_{BC} = \frac{\varphi_{BC}}{e} = -\frac{0,0292}{1,4} = -0,0209 \text{ рад};$$

$$\theta_{CD} = \frac{\varphi_{CD}}{a} = \frac{0,0021}{1,2} = 0,0018 \text{ рад};$$

$$\theta_{DE} = \frac{\varphi_{DE}}{c} = \frac{0,0109}{0,9} = 0,0121 \text{ рад}.$$

Построим эпюру относительных углов закручивания (рис. 3.4, з). Наиболее нагруженным является участок BC :

$$\tau_{\max} = 91,88 \text{ МПа} < R_c = 130 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

4. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

4.1. Расчет балок и рамы на изгиб

Задача 6

Для заданных схем требуется построить эпюры внутренних усилий (поперечных сил и изгибающих моментов); для рамы (*д*) дополнительно построить эпюру продольных сил. Для балок выполнить расчет на прочность: для консольной балки (*а*) подобрать двутавровое сечение из прокатных профилей, для простой балки (*б*) подобрать сечение из двух швеллеров из прокатных профилей, для одноконсольной балки (*в*) подобрать круглое сечение из древесины ($d_{\max} = 28$ см), для двухконсольной балки (*з*) подобрать прямоугольное сечение из древесины при соотношении сторон $h/b = 1,4$, для составной балки (*е*) проверить прочность двутавра № 24.

Принять расчетное сопротивление: для стали $R = 210$ МПа; $R_c = 130$ МПа, для древесины $R = 16$ МПа; $R_c = 2$ МПа.

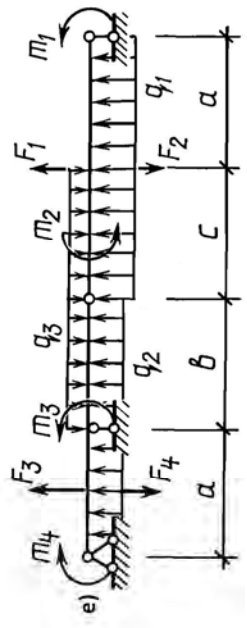
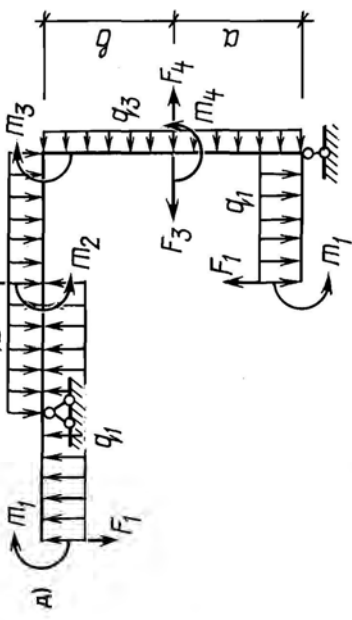
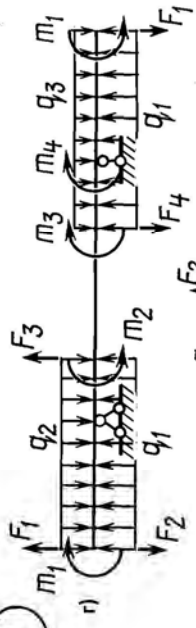
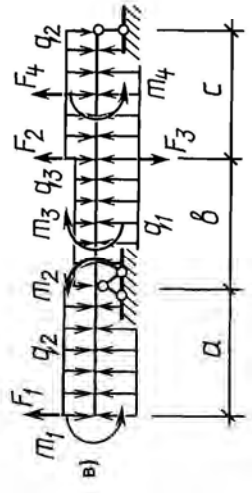
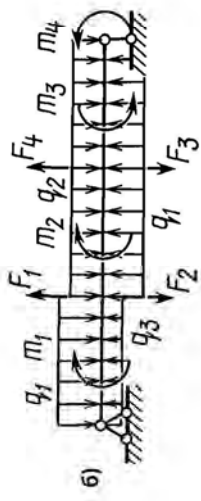
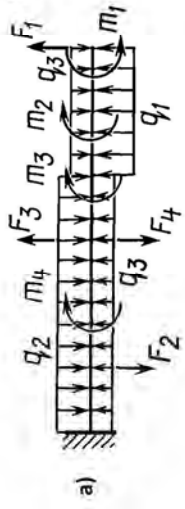
Исходные данные к задаче 6 представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

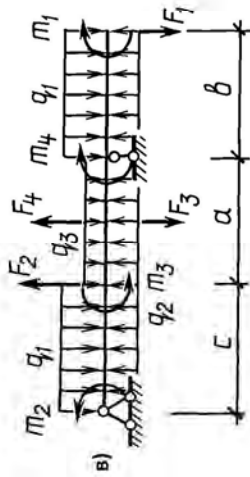
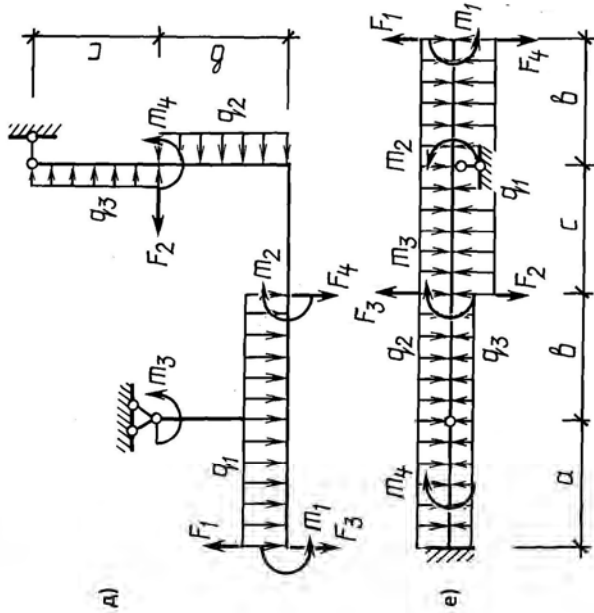
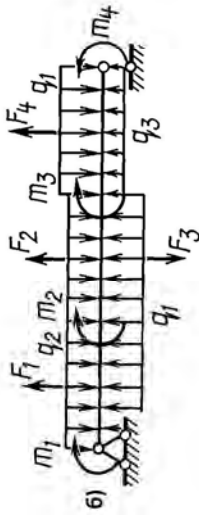
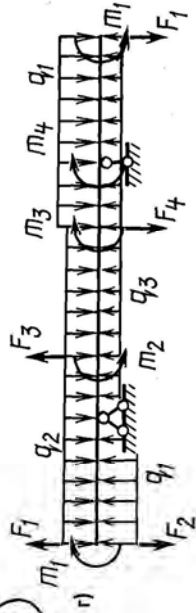
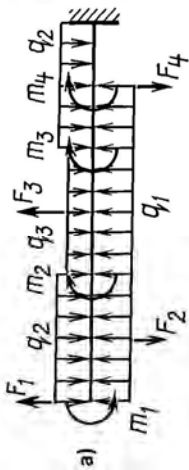
Исходные данные к задаче 6

№ варианта	Размеры			Нагрузки			Индекс нагрузки		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>q</i>	<i>F</i>	<i>m</i>	<i>q</i>	<i>F</i>	<i>m</i>
	м			кН/м	кН	кН·м			
1	2,0	1,6	2,4	16	10	20	1	4	2
2	1,6	2,0	2,2	12	10	16	2	1	2
3	2,4	2,0	1,6	10	12	20	1	2	1
4	2,0	1,6	2,0	8	10	12	3	4	1
5	1,6	2,0	2,4	14	16	20	1	3	2
6	2,0	2,4	1,6	16	24	8	2	2	1
7	2,4	2,0	2,4	20	10	14	1	4	3
8	2,0	2,4	2,0	12	16	10	3	3	1
9	2,0	2,0	1,6	6	18	12	1	1	1
10	1,6	2,0	2,4	10	12	14	2	3	1

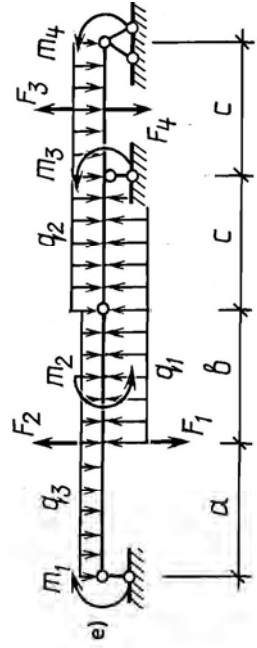
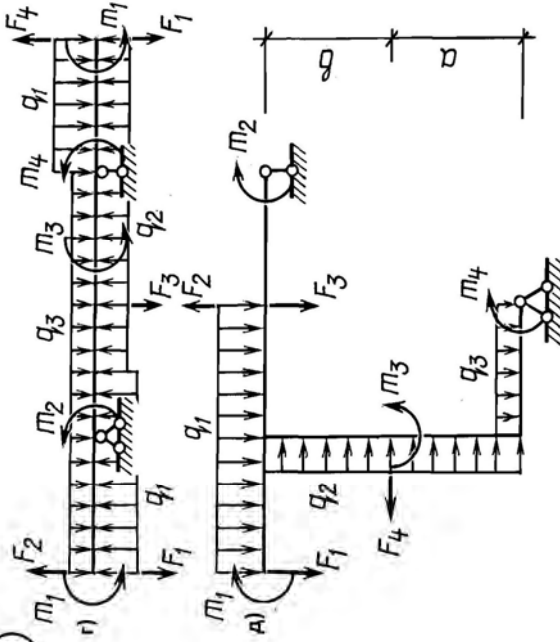
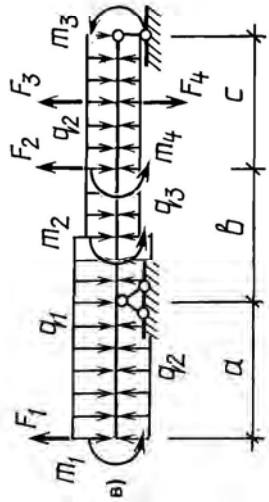
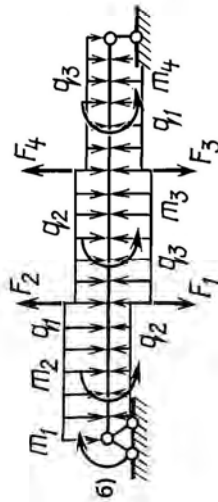
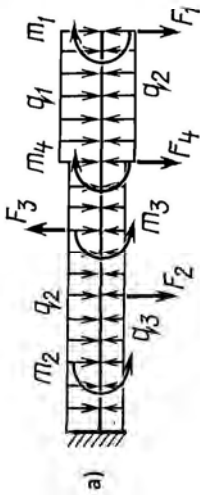
1



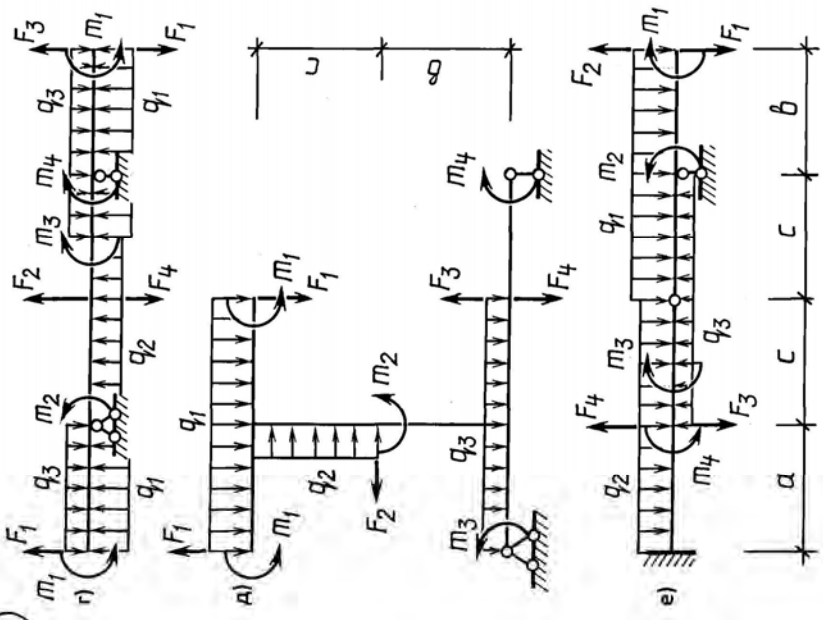
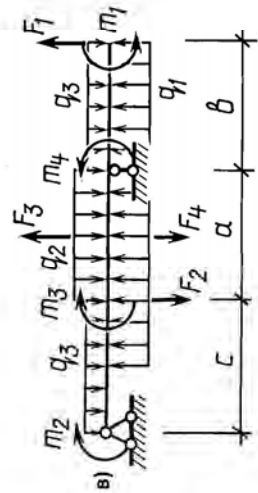
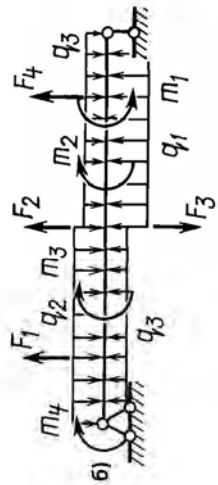
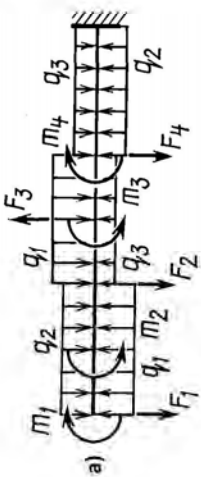
2



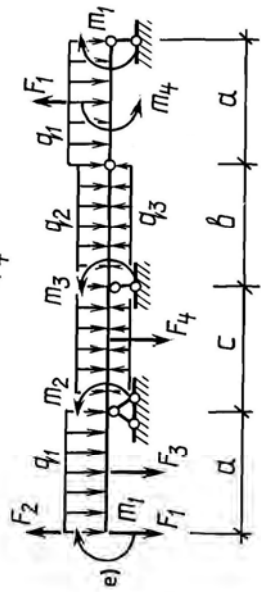
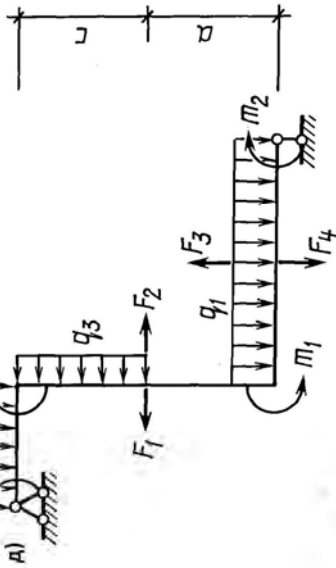
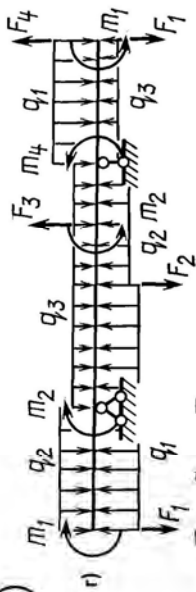
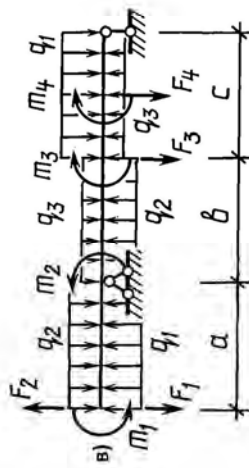
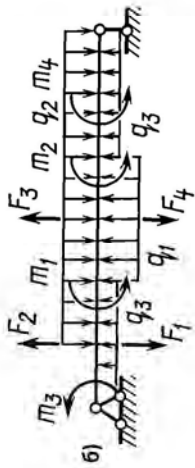
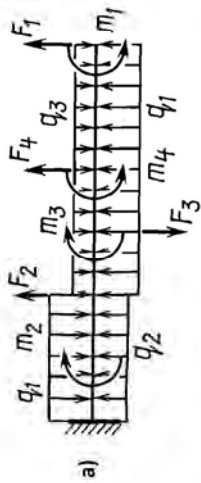
3



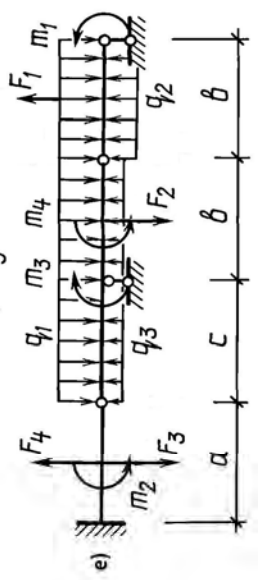
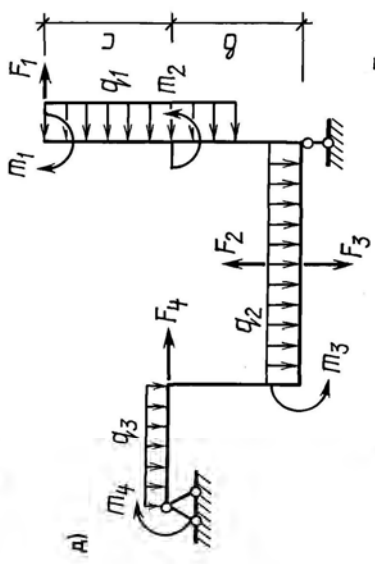
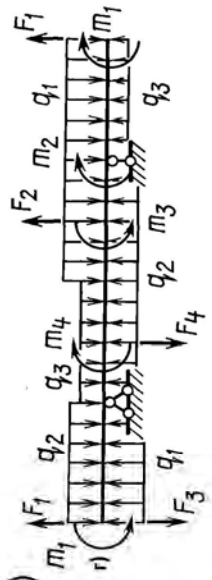
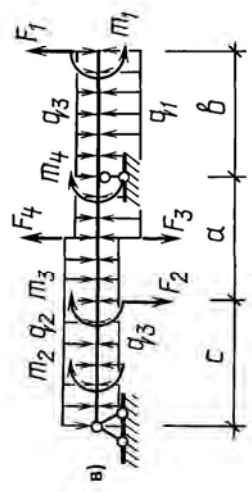
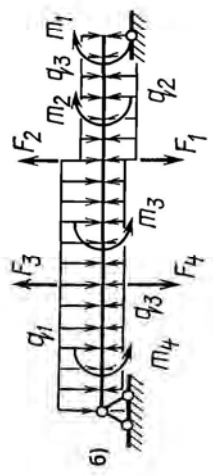
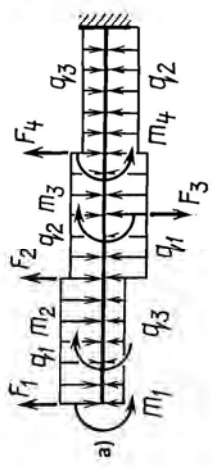
4



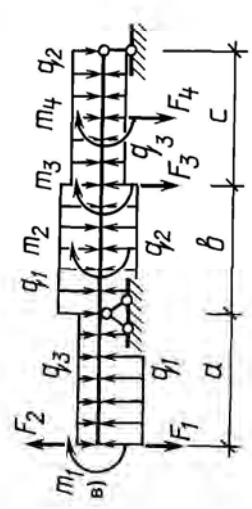
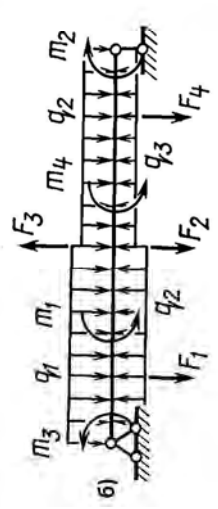
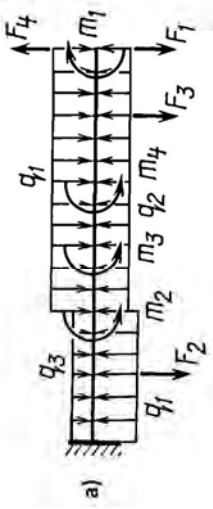
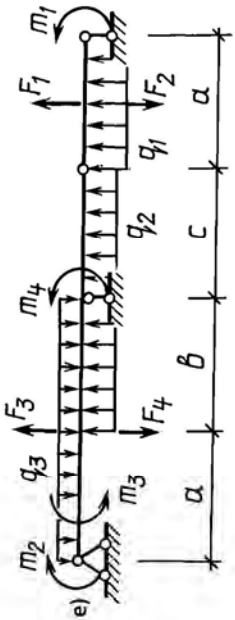
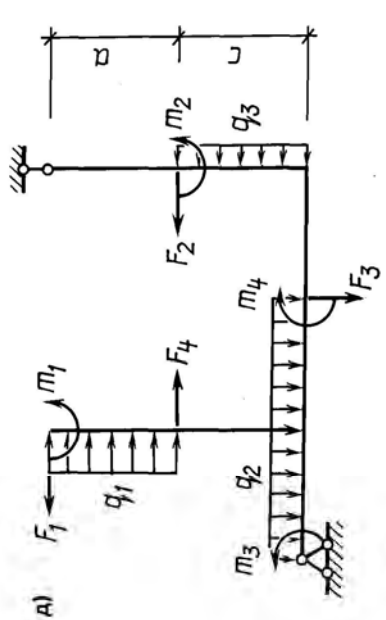
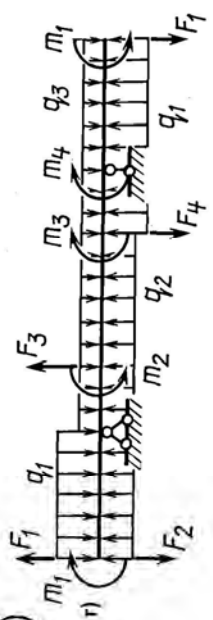
5



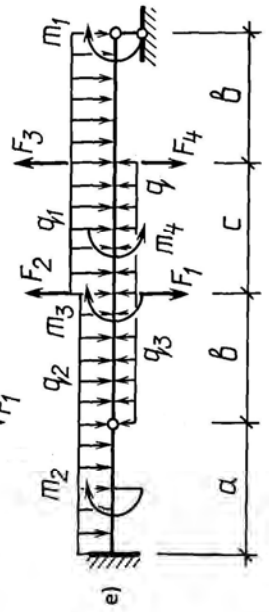
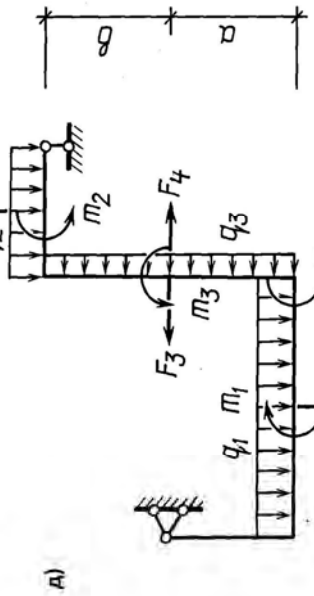
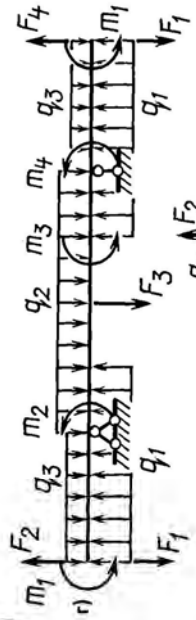
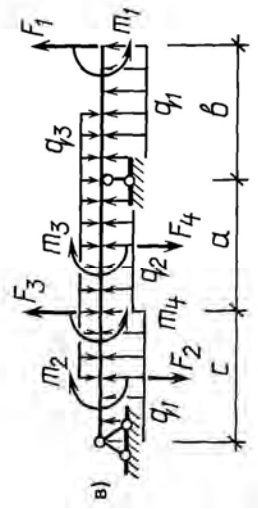
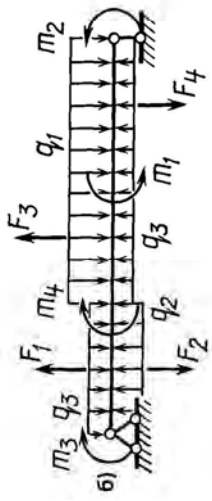
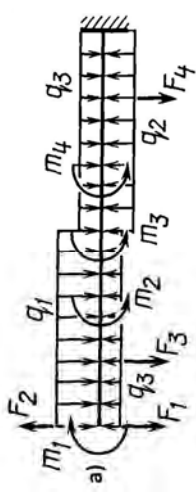
б



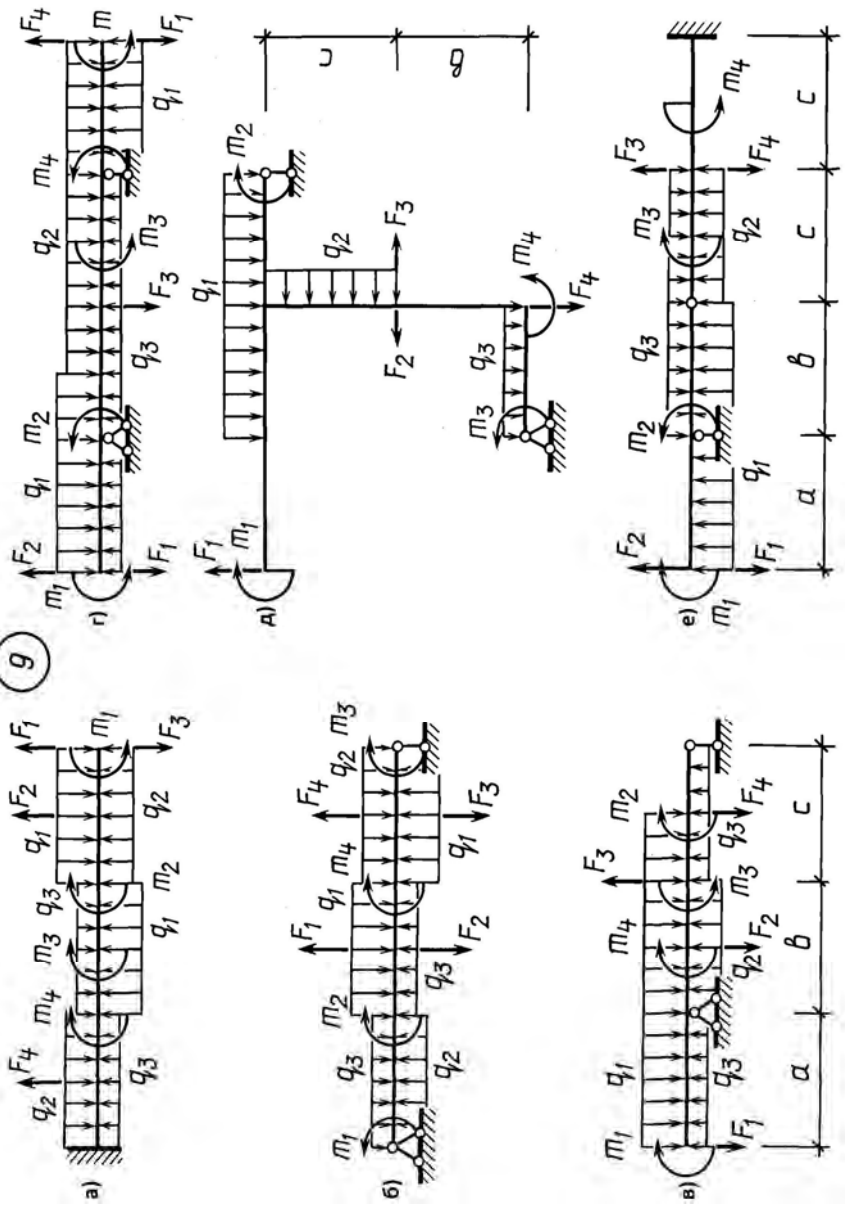
7



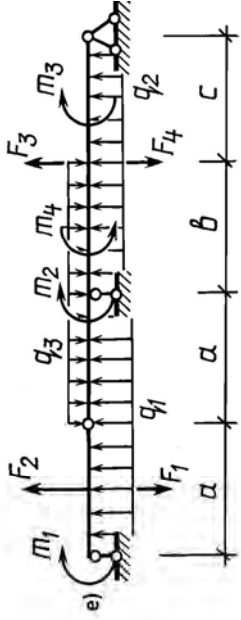
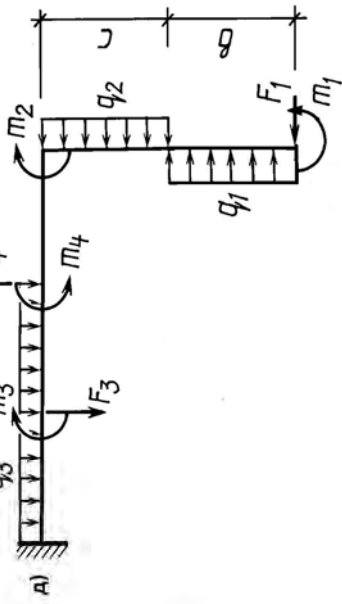
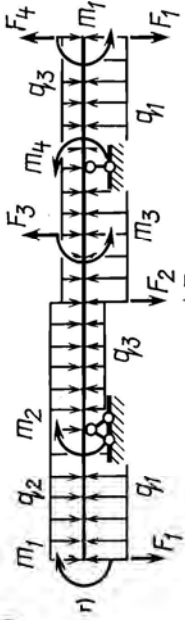
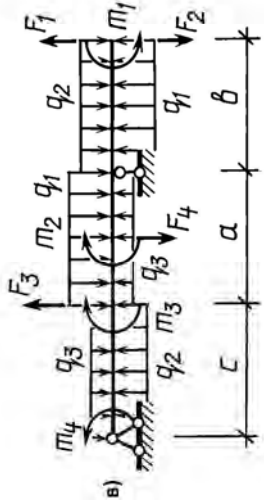
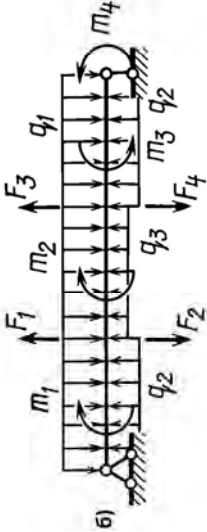
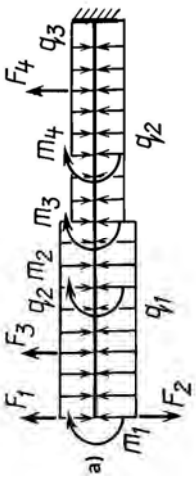
8



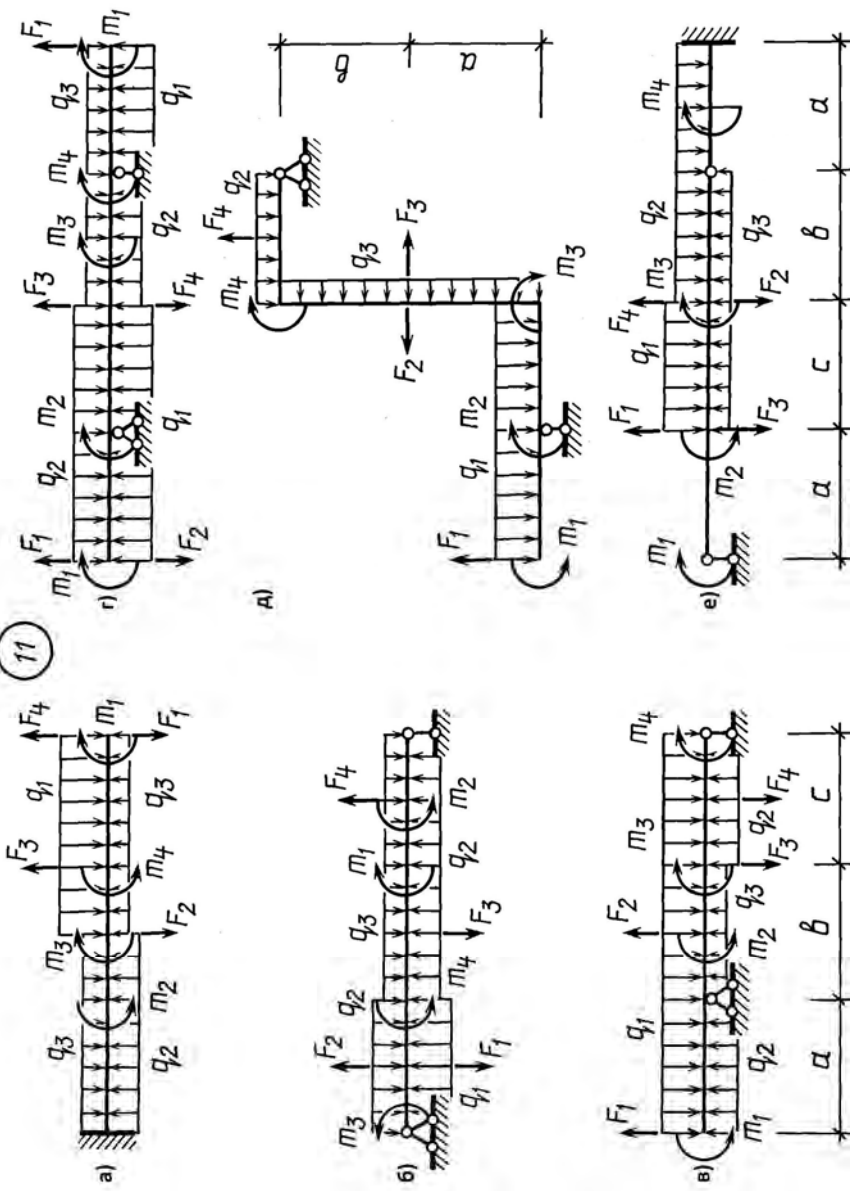
9



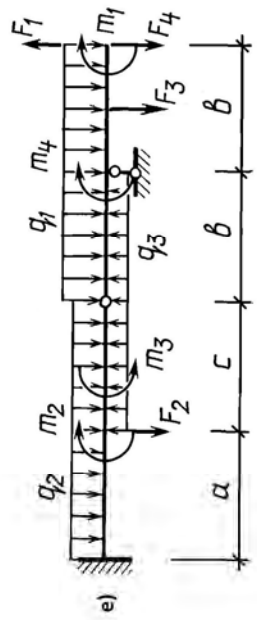
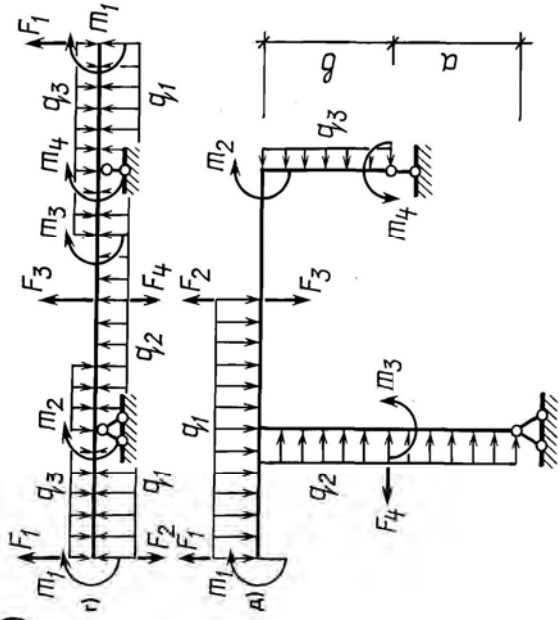
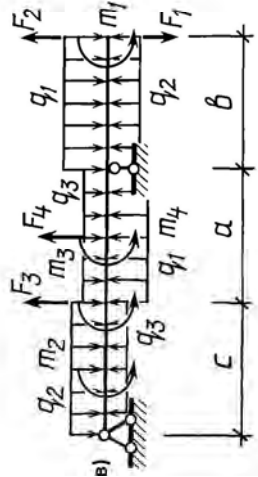
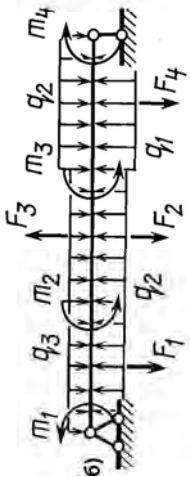
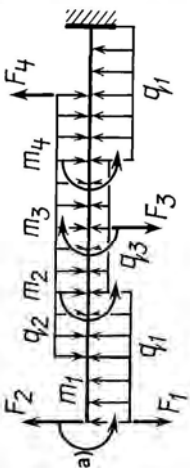
10



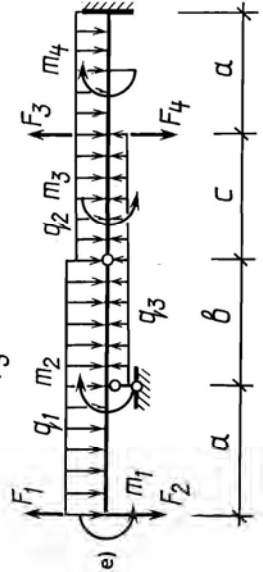
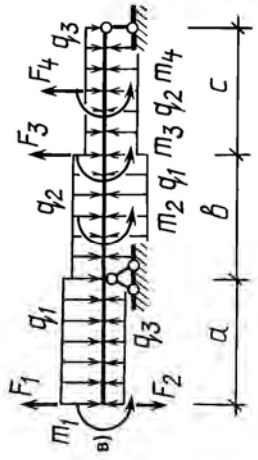
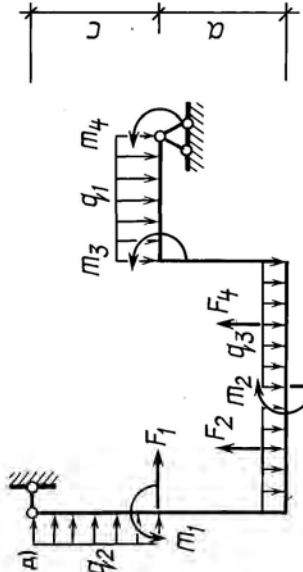
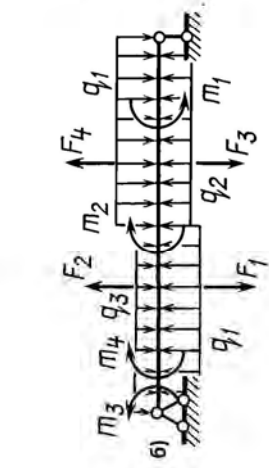
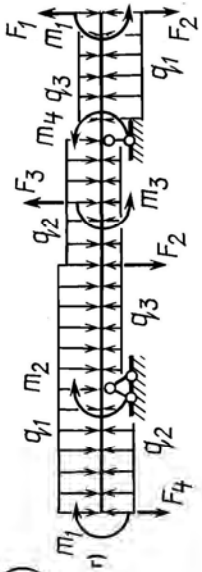
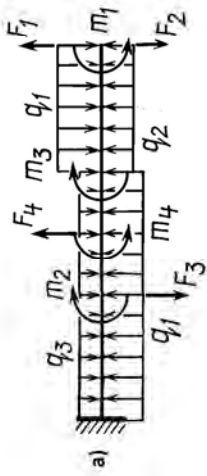
11



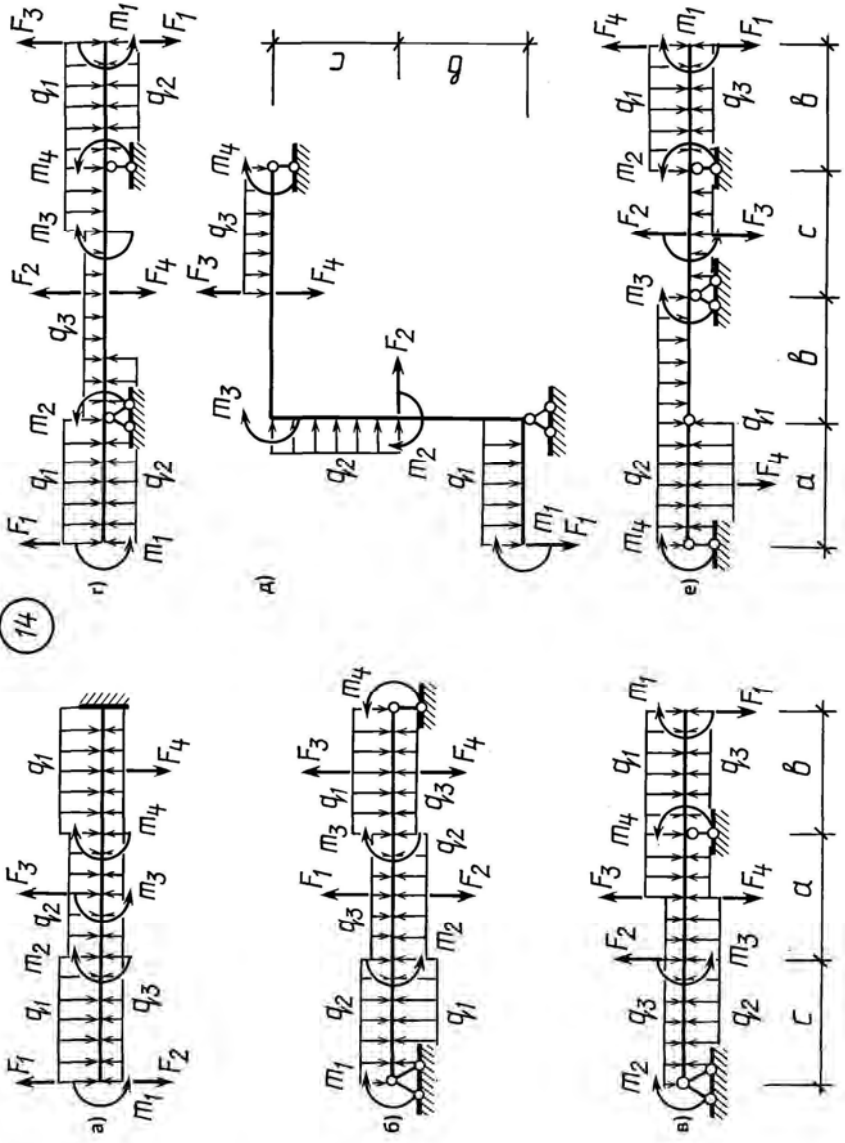
12



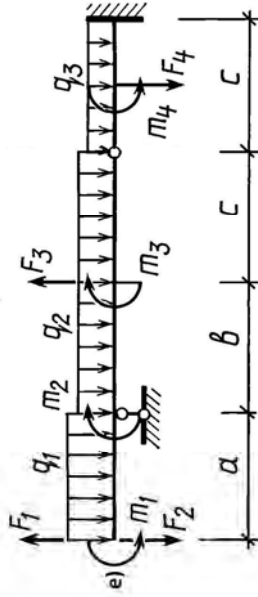
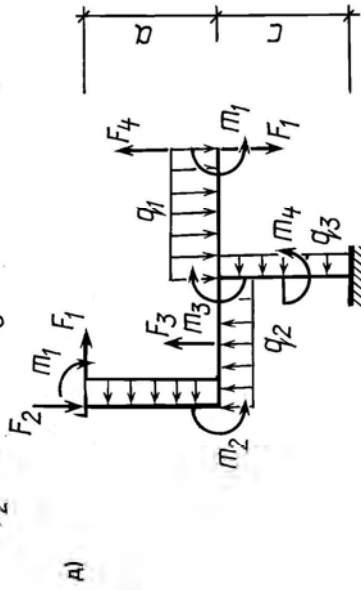
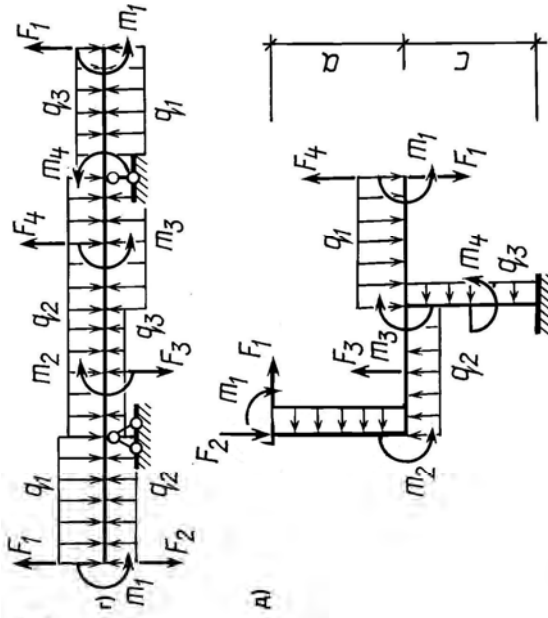
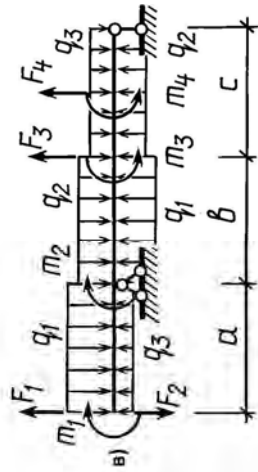
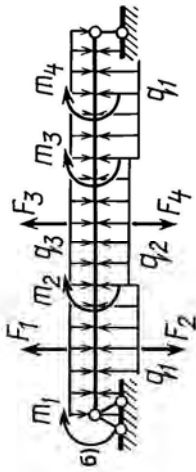
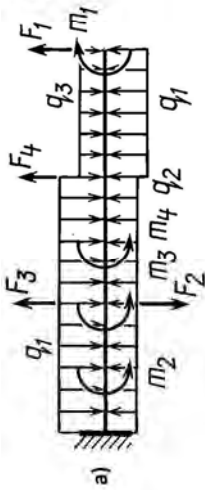
13



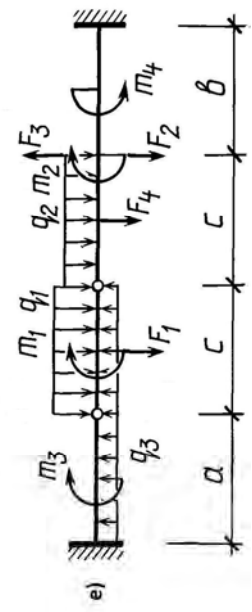
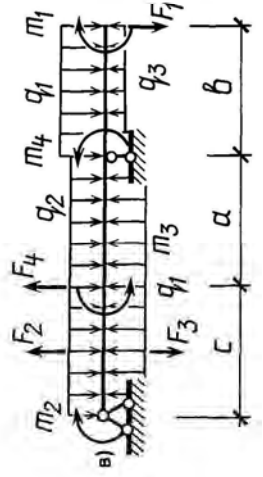
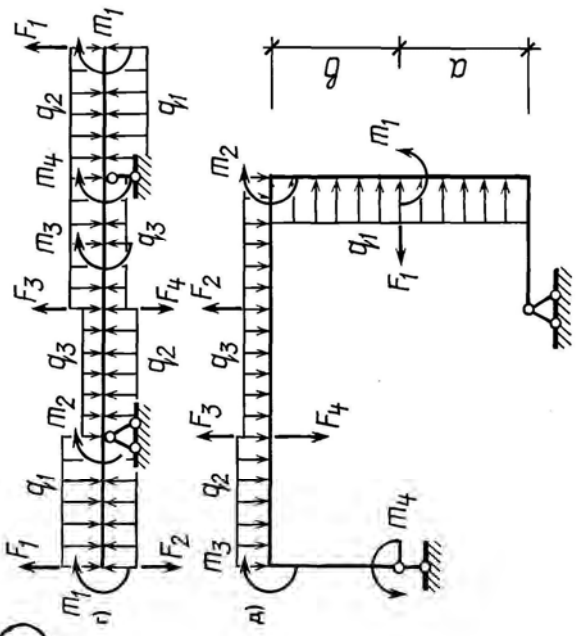
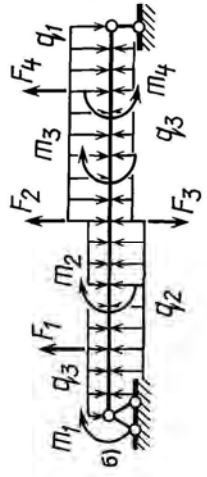
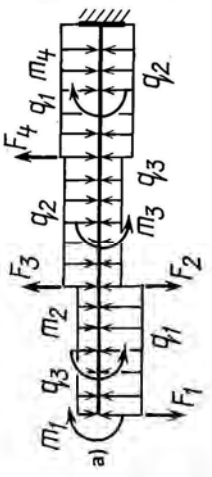
14



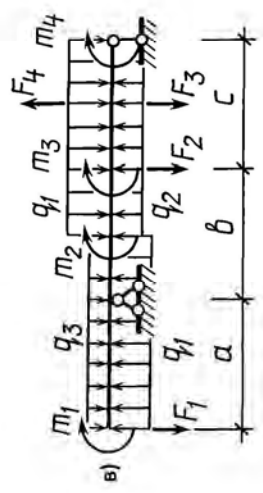
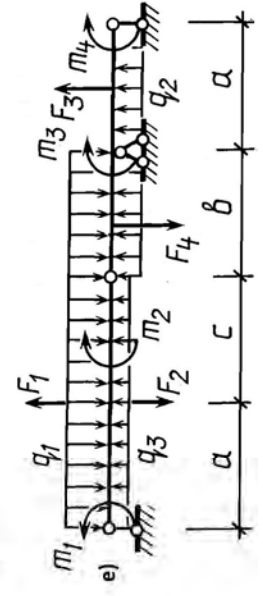
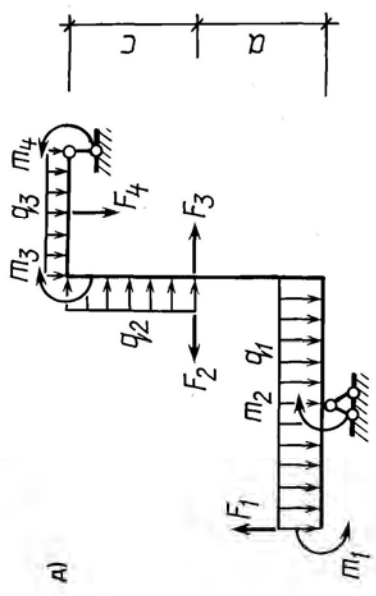
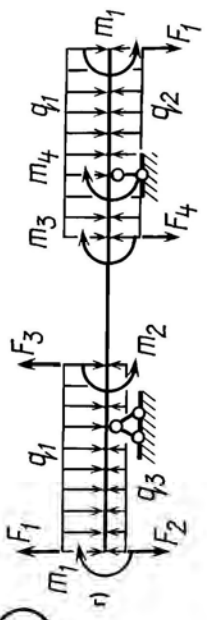
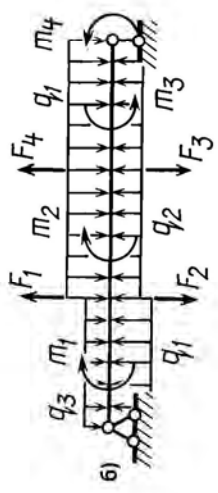
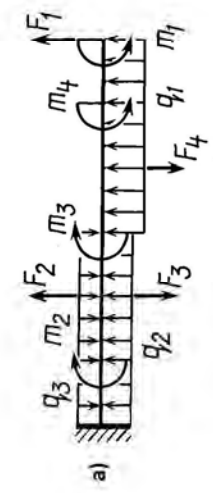
15



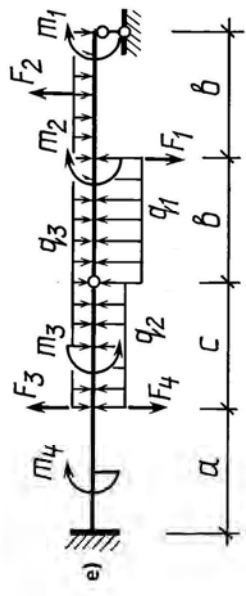
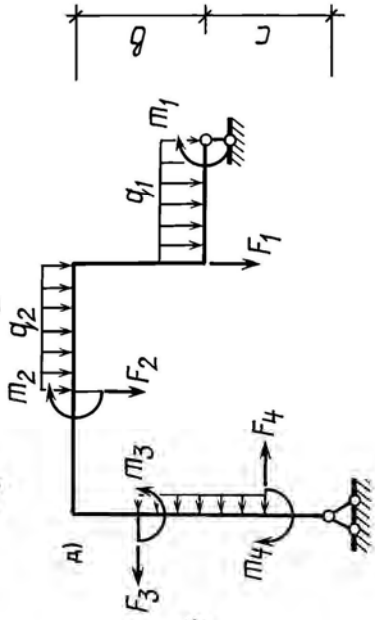
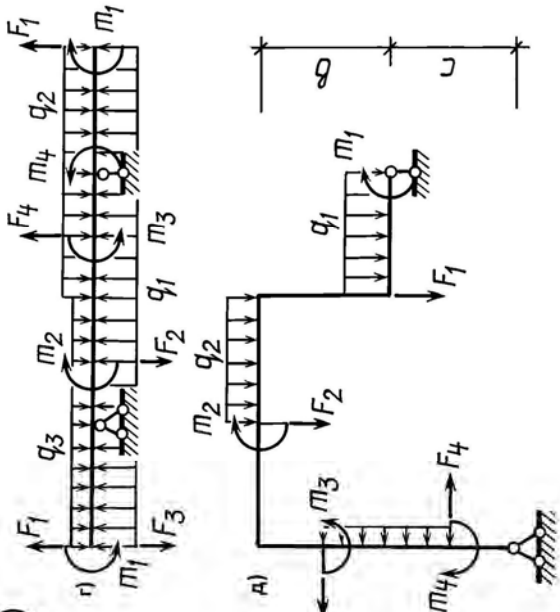
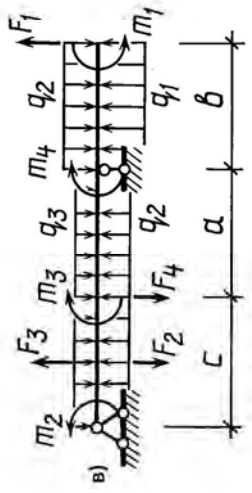
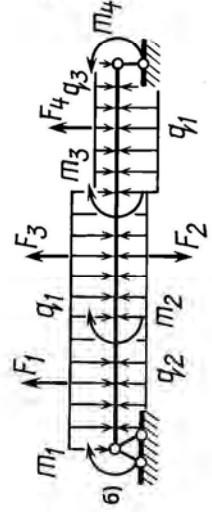
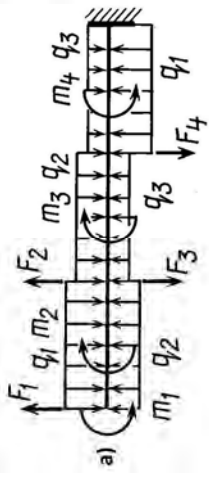
16



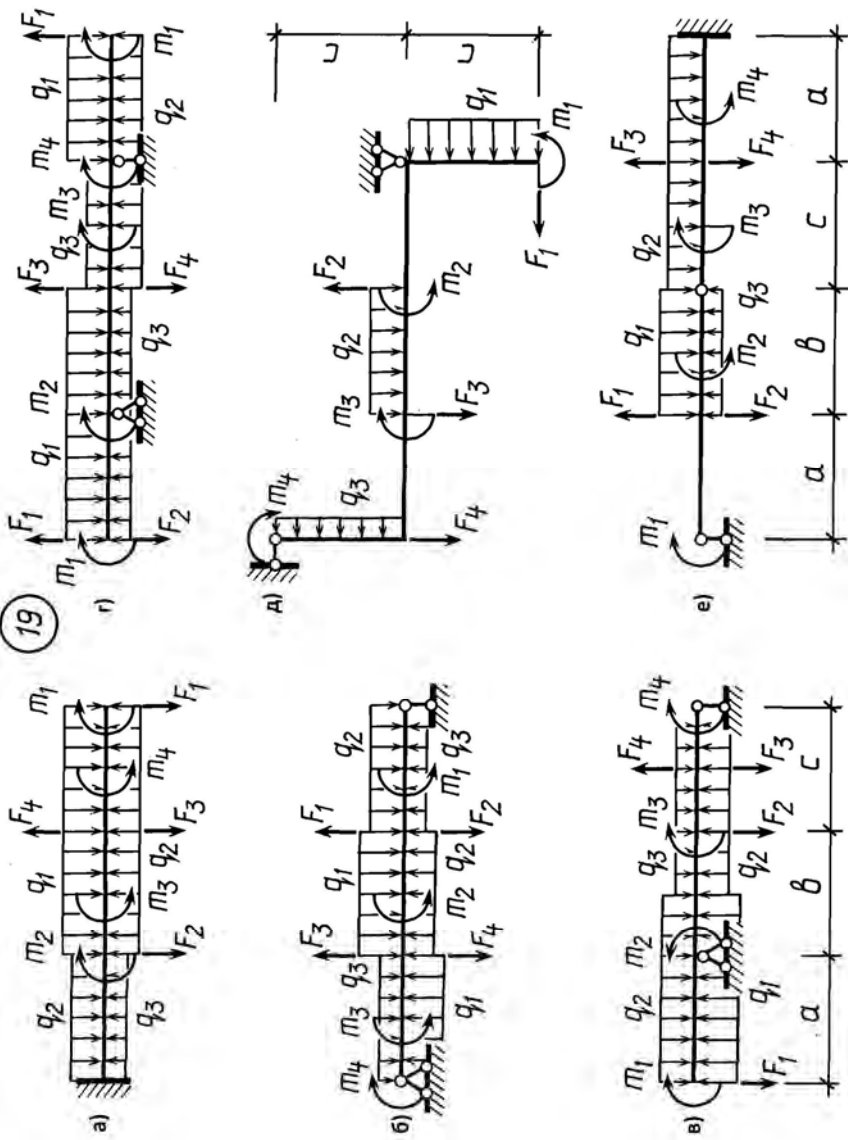
17



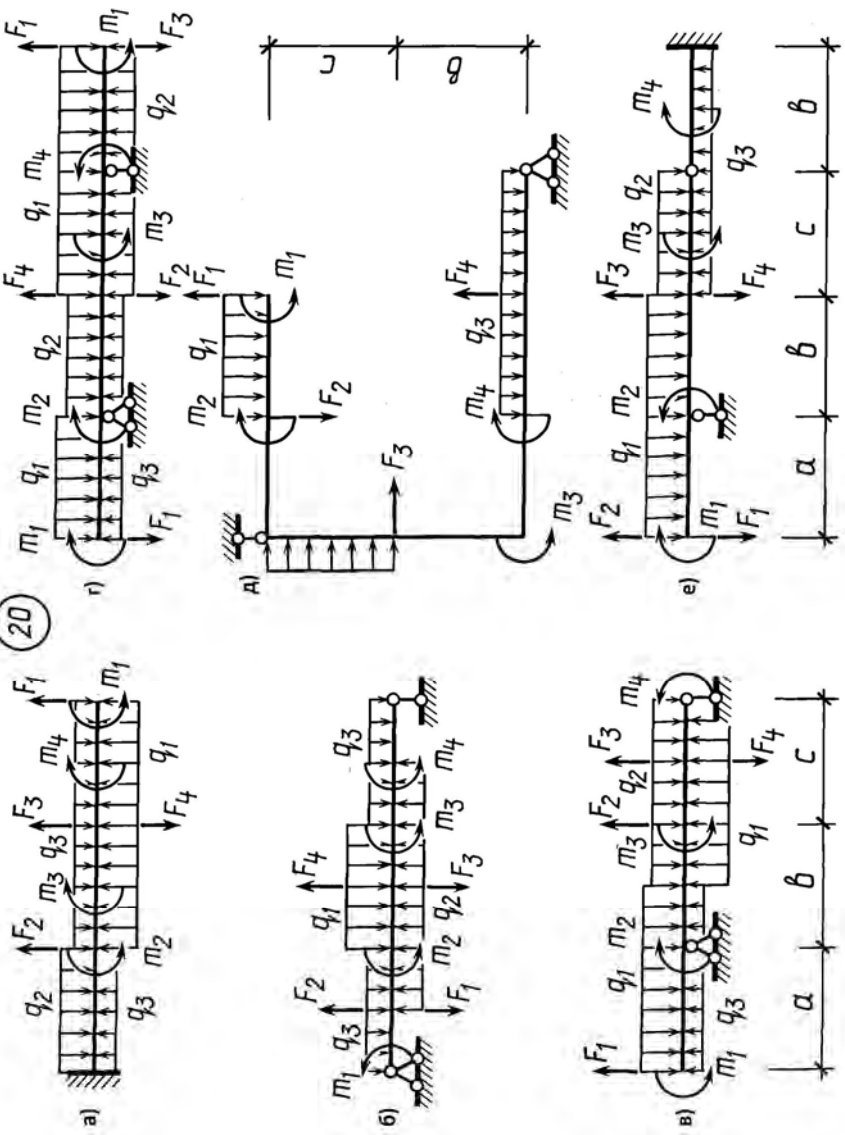
18



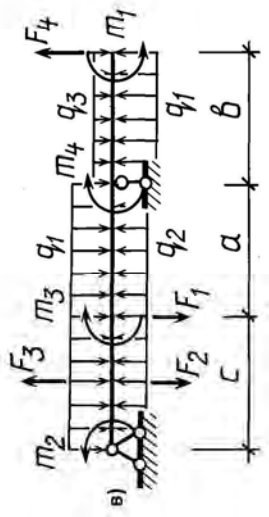
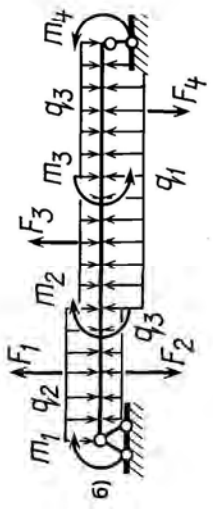
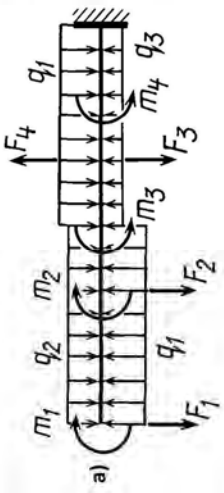
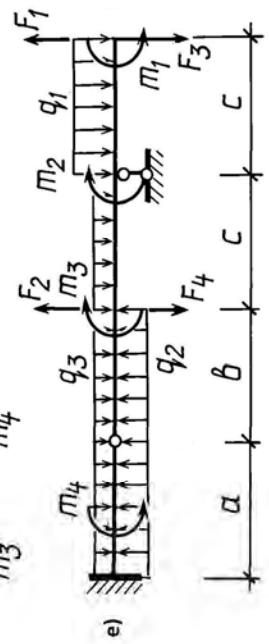
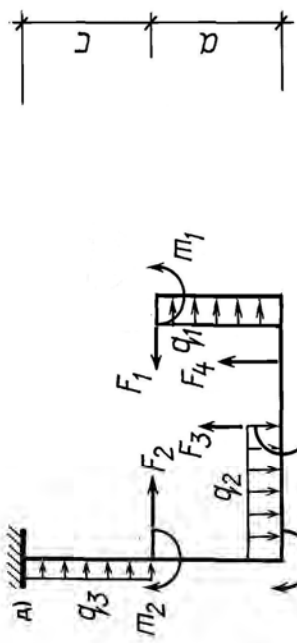
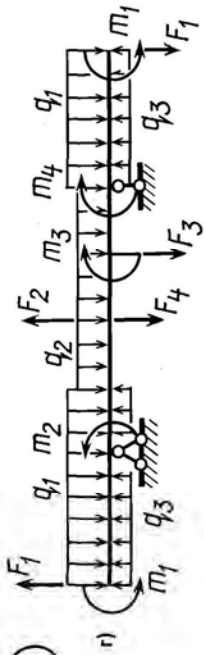
19

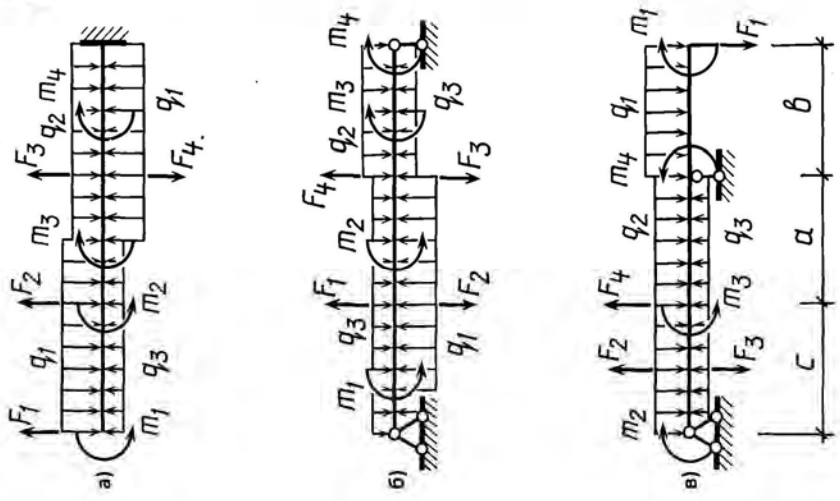
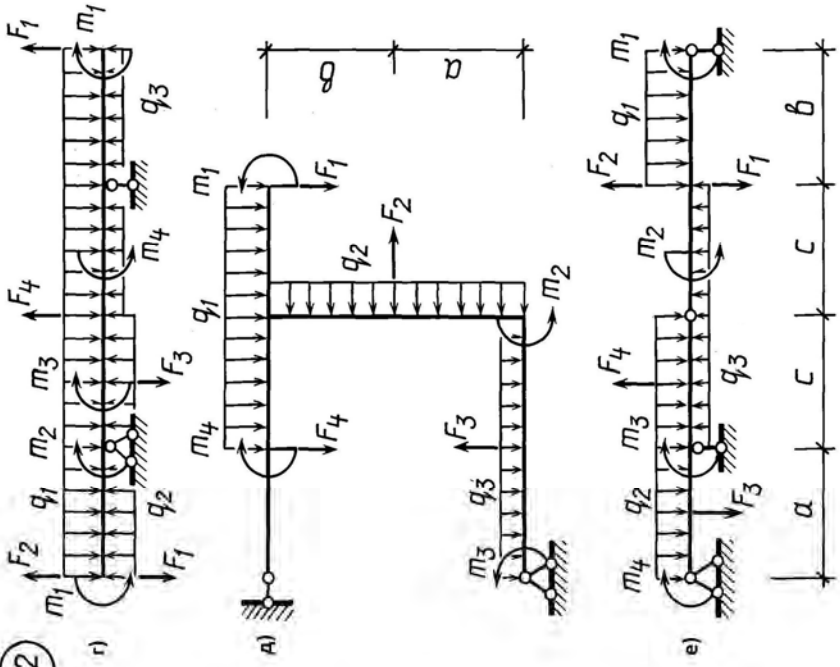


20

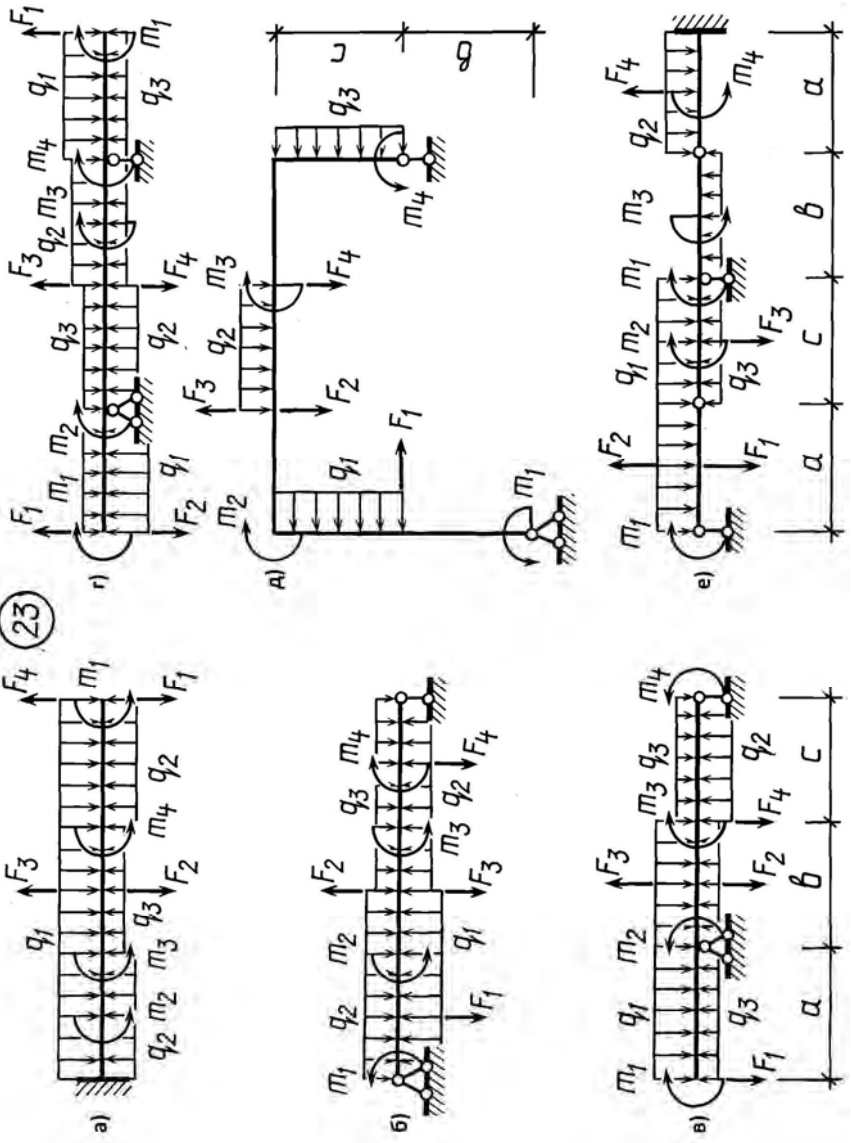


21

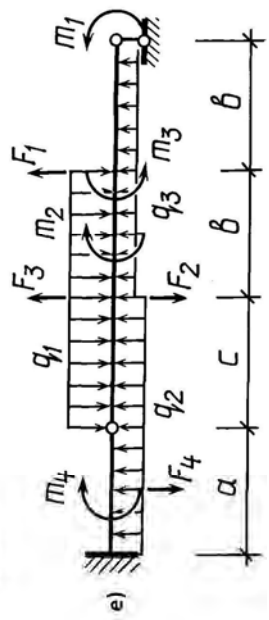
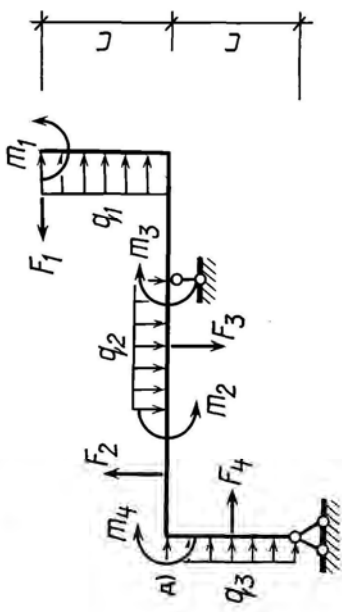
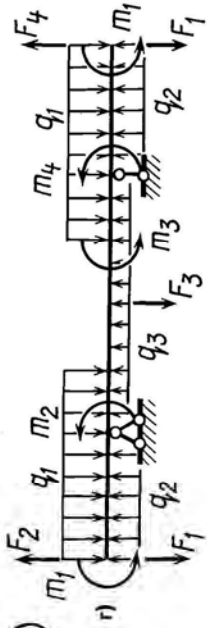
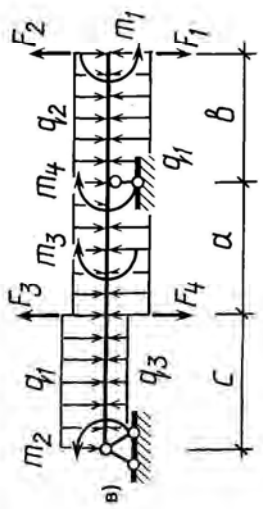
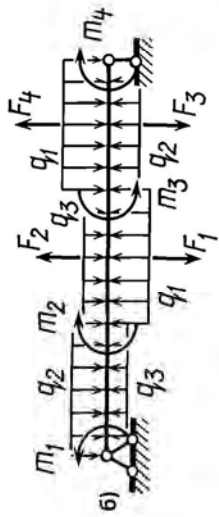
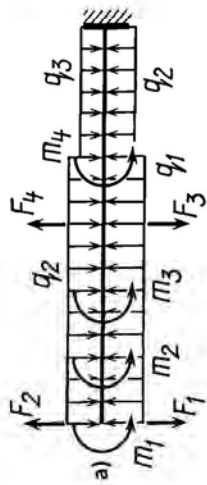




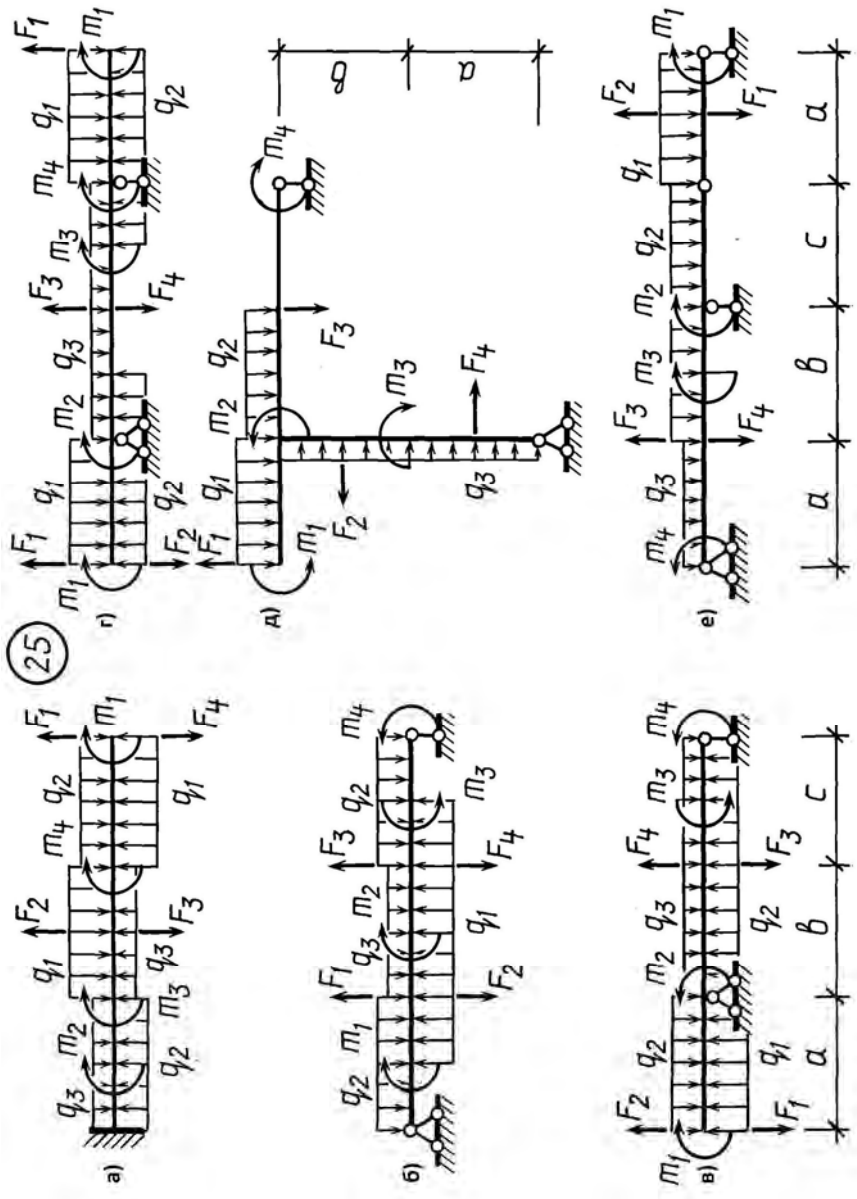
23



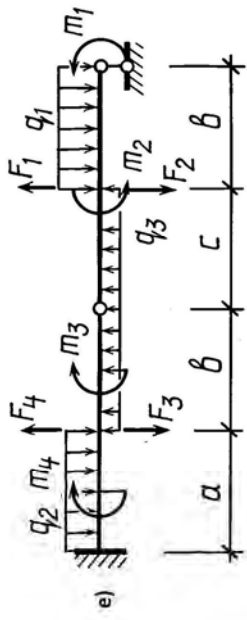
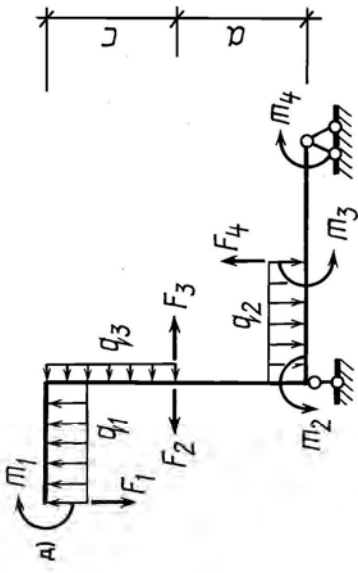
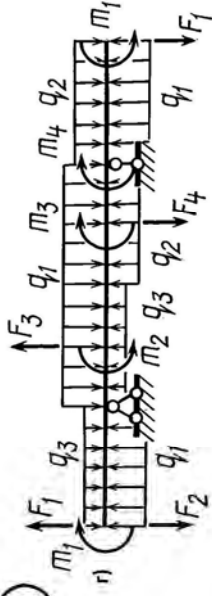
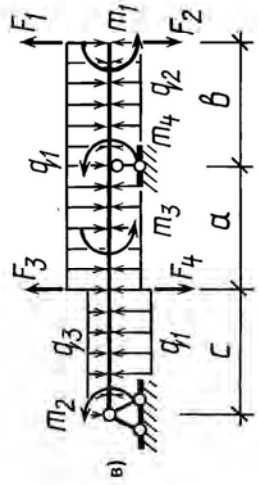
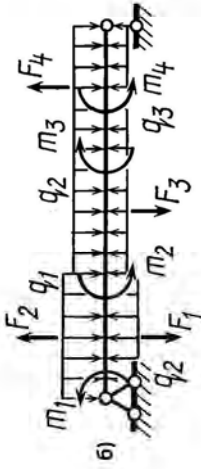
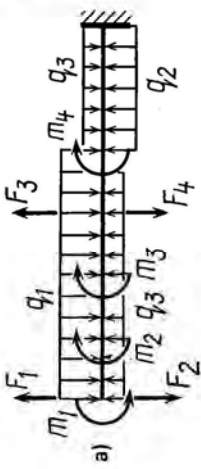
24



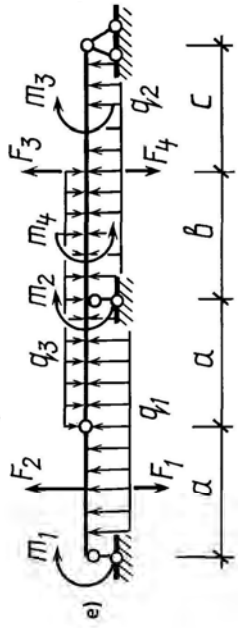
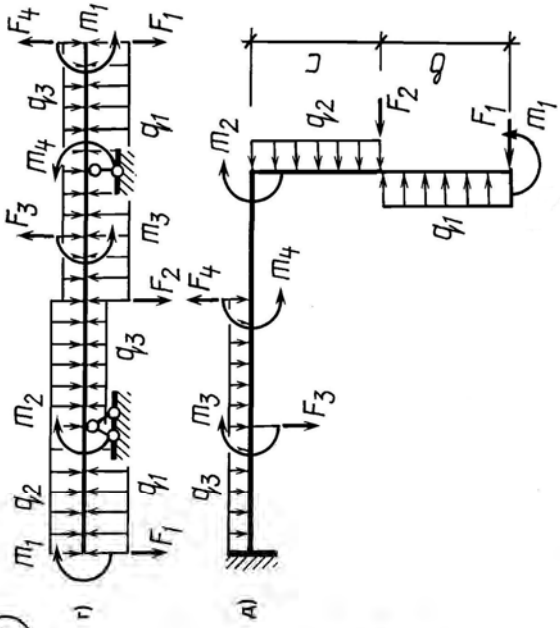
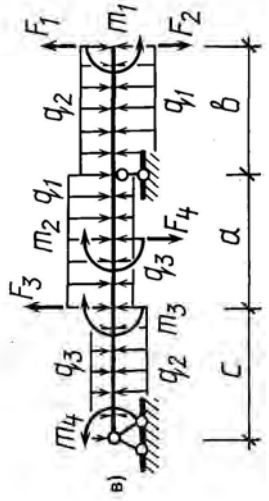
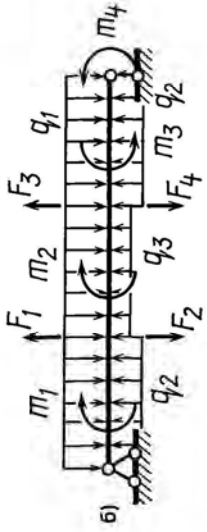
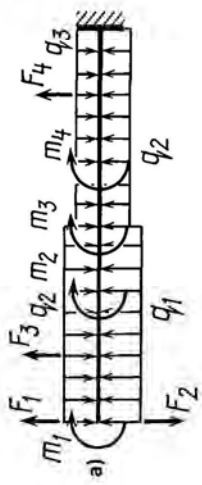
25



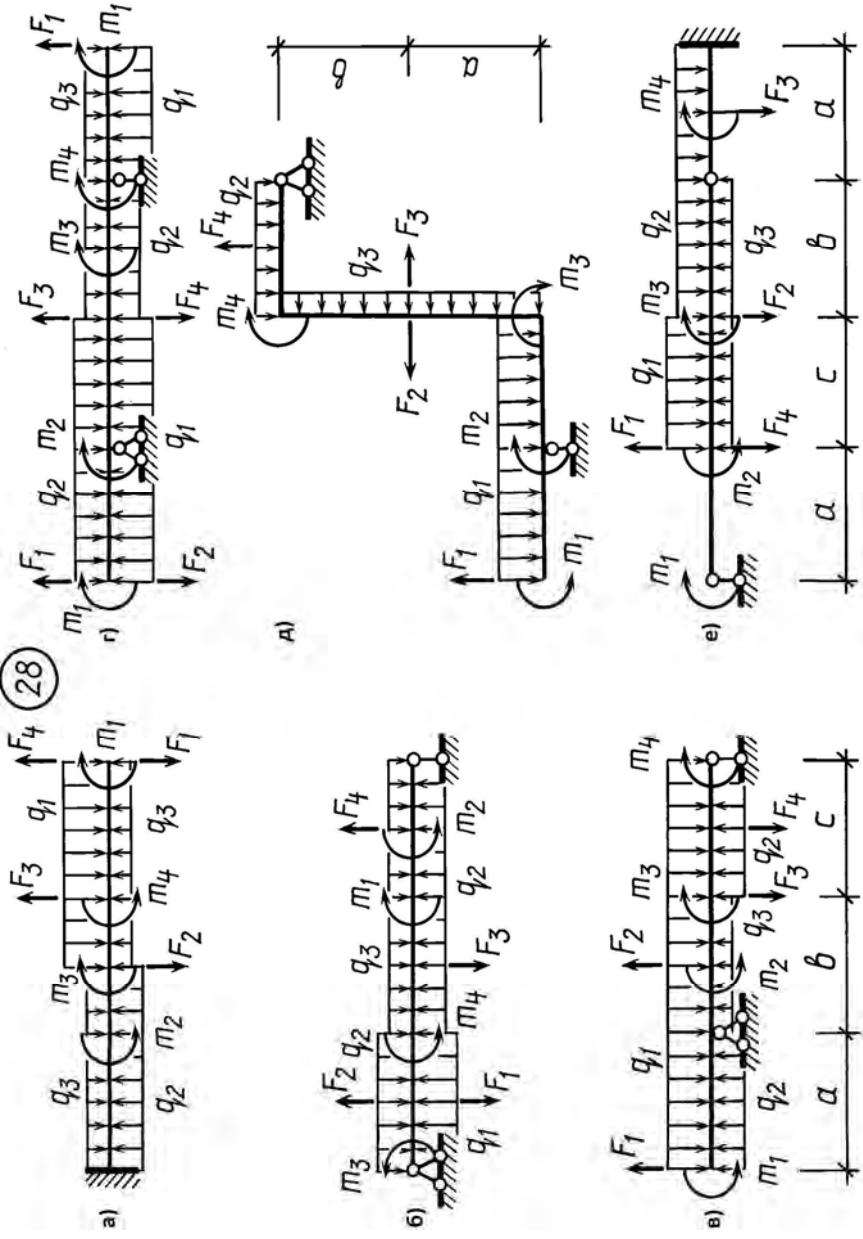
26



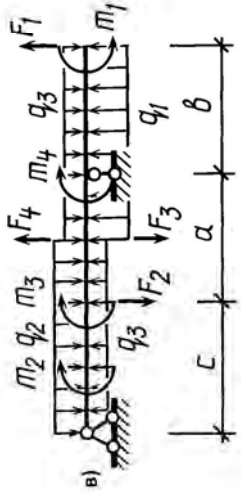
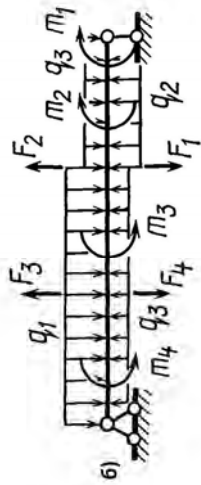
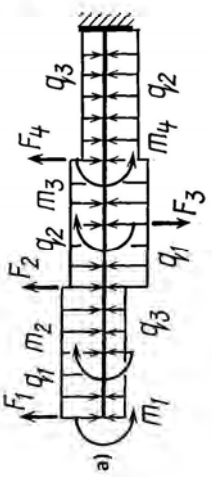
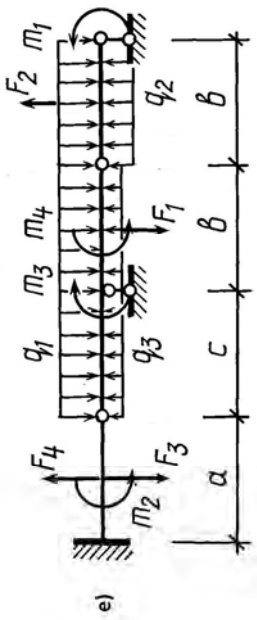
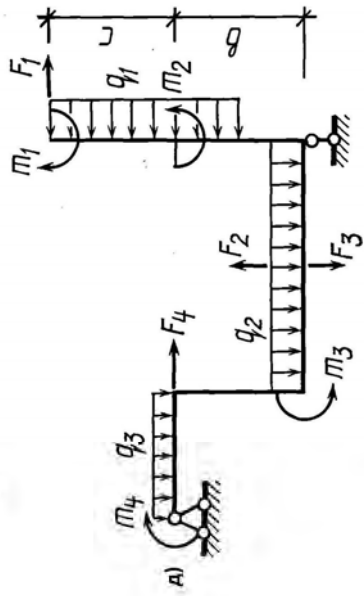
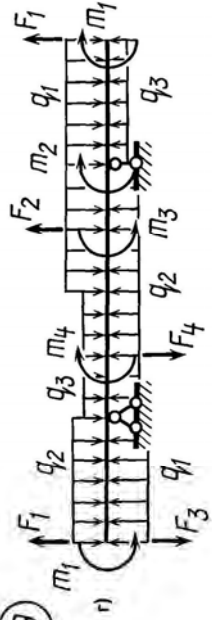
27



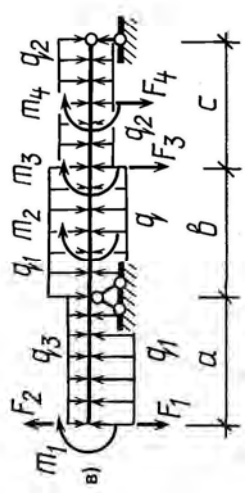
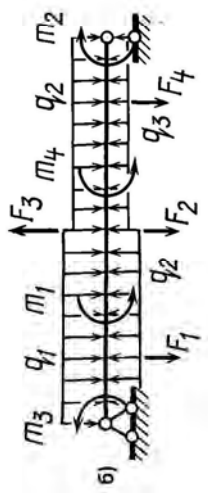
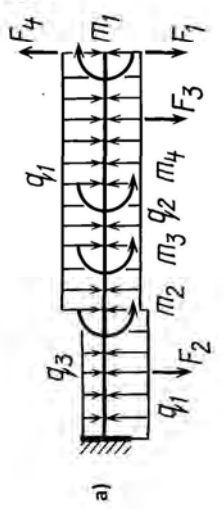
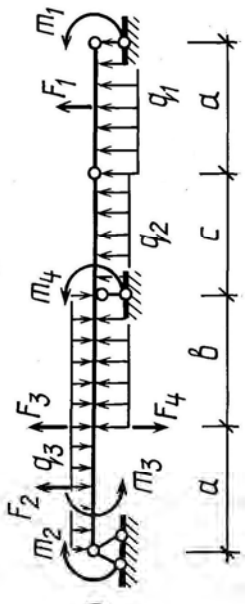
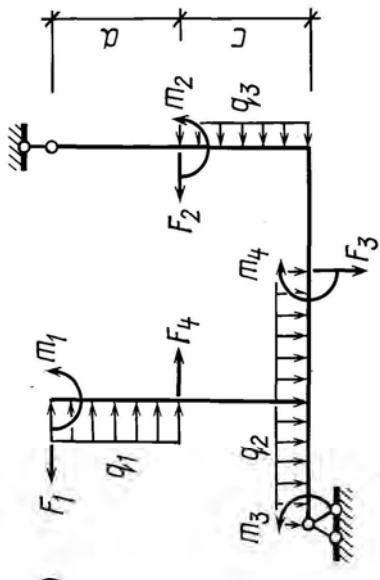
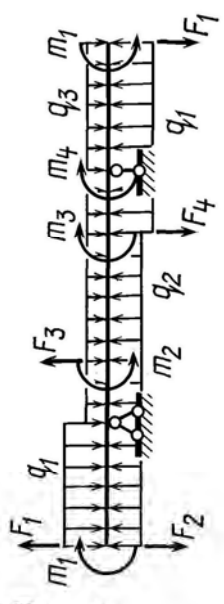
28



29



30



Примеры решения задачи 6

Пример 1. Для заданной балки (рис. 4.1) необходимо построить эпюры внутренних усилий. Подобрать двутавровое сечение из прокатного профиля, если для стали $R = 210 \text{ МПа}$, $R_c = 130 \text{ МПа}$.

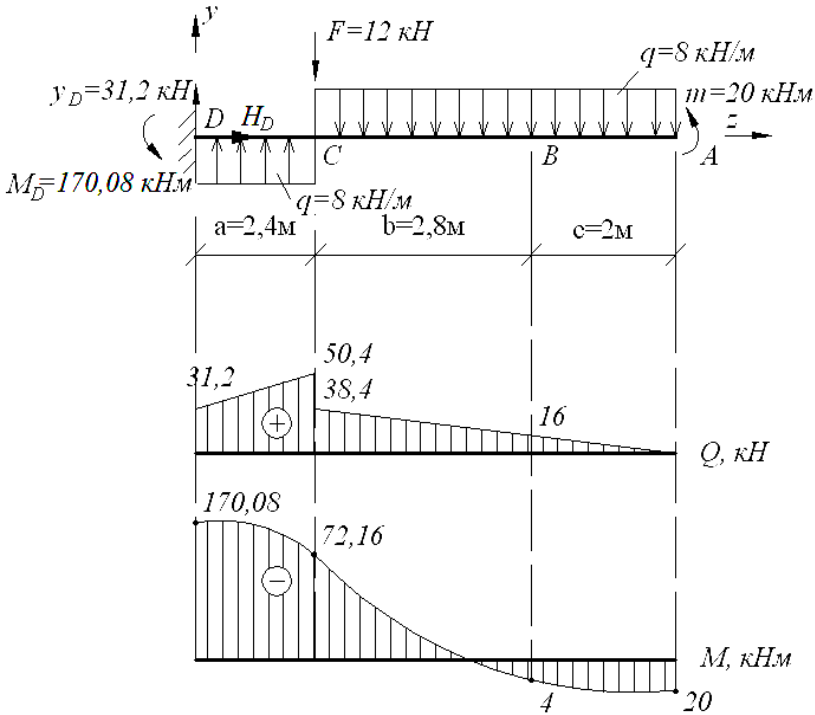


Рис. 4.1. Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Решение

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-m + q(b+c)\left(\frac{b+c}{2} + a\right) + Fa - qa\frac{a}{2} - M_D = 0;$$

$$-20 + 8 \cdot 4,8 \cdot \left(\frac{4,8}{2} + 2,4 \right) + 12 \cdot 2,4 - 8 \cdot \frac{2,4^2}{2} - M_D = 0;$$

$$M_D = 170,08 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum Y = 0, \quad Y_D + qa - F - q(b+c) = 0;$$

$$Y_D + 8 \cdot 2,4 - 12 - 8 \cdot (2,8 + 2) = 0, \quad Y_D = 31,2 \text{ кН};$$

$$\sum Z = 0, \quad H_D = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, используя метод сечений.

В точке A :

$$Q_A = 0, \quad M_A = m = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке B :

$$Q_B = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН}, \quad M_B = 20 - 8 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке C (справа):

$$Q_C = 8 \cdot 4,8 = 38,4 \text{ кН}, \quad M_C = 20 - 8 \cdot 4,8 \cdot 2,4 = -72,16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке C (слева):

$$Q_C = 38,4 + 12 = 50,4 \text{ кН}, \quad M_C = -72,16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке D :

$$Q_D = 50,4 - 8 \cdot 2,4 = 31,2 \text{ кН},$$

$$M_D = 20 - 8 \cdot 4,8 \cdot 4,8 - 12 \cdot 2,4 + 8 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = -170,08 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подберем двутавровое сечение при $R = 210 \text{ МПа}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R, \quad W_x \geq \frac{M_{\max}}{R}.$$

Максимальный изгибающий момент определим из эпюры изгибающих моментов (см. рис. 4.1): $M_{\max} = 170,08 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

$$W_x \geq \frac{170,08 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,8099 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 809,9 \text{ см}^3.$$

Пользуясь сортаментом (прил. 1), выбираем двутавр № 40 с $W_x = 953 \text{ см}^3$.

Проверим прочность по нормальным напряжениям, если $R_c = 210 \text{ МПа}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{170,08 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = 178,46 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 178,46 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Недогрузка составляет

$$\frac{210 - 178,46}{210} \cdot 100 = 15 \text{ \%}.$$

Проверим прочность по касательным напряжениям, если $R_c = 130 \text{ МПа}$:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq R_c.$$

Максимальное значение поперечной силы определяем по эпюре поперечных сил (см. рис. 4.1): $Q_{\max} = 50,4 \text{ кН}$.

Геометрические характеристики для двутавра № 40 выбираем из прил. 1:

$$S_x^{\text{отс}} = 545 \text{ см}^3; \quad I_x = 19062 \text{ см}^4; \quad d = 8,3 \text{ мм}, \quad b = d.$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{50,4 \cdot 10^3 \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 17,36 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 17,36 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Прочность двутавровой балки по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 2. Для заданной балки (рис. 4.2) построить эпюры внутренних усилий. Подобрать сечение из прокатных профилей (двух швеллеров), если $R = 210 \text{ МПа}$, $R_c = 130 \text{ МПа}$.

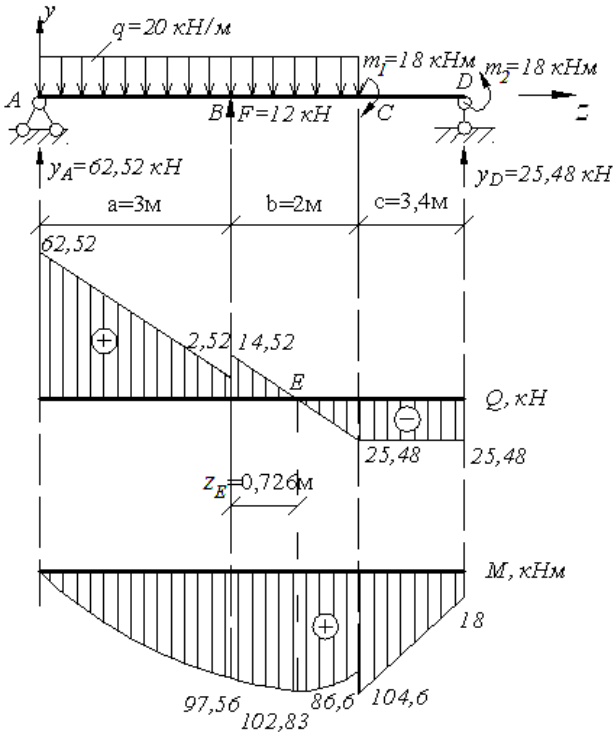


Рис. 4.2. Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Решение

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0,$$

$$-m + Y_D(a + b + c) + m_2 - q \frac{(a + b)^2}{2} + Fa = 0;$$

$$-18 + Y_D \cdot 8,4 + 18 - 20 \cdot \frac{5^2}{2} + 12 \cdot 3 = 0;$$

$$Y_D = 25,48 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = 0;$$

$$-Y_A(a+b+c) + q(a+b) \left(\frac{a+b}{2} + c \right) -$$

$$-F(b+c) - m_1 + m_2 = 0;$$

$$-Y_A \cdot 8,4 + 20 \cdot 5 \cdot 5,9 - 12 \cdot 5,4 - 18 + 18 = 0;$$

$$Y_A = 62,52 \text{ кН.}$$

Проверим правильность определения реакций:

$$\sum Y = 0,$$

$$Y_A + Y_D + F - q(a+b) = 0;$$

$$62,52 + 25,48 + 12 - 20 \cdot (3+2) = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов методом сечений (см. рис. 4.2).

В точке A :

$$Q_A = 62,52 \text{ кН}, \quad M_A = 0.$$

В точке B (левее):

$$Q_B = 62,52 - 20 \cdot 3 = 2,52 \text{ кН},$$

$$M_B = 62,52 \cdot 3 - 20 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} = 97,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке B (правее):

$$Q_B = 2,52 + 12 = 14,52 \text{ кН}, \quad M_B = 97,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке C (левее):

$$Q_C = 14,52 - 20 \cdot 2 = -25,48 \text{ кН},$$

$$M_C = 62,52 \cdot 5 - 20 \cdot 5^2 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 2 = 86,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке C (правее):

$$Q_C = -25,48 \text{ кН}, \quad M_C = 86,6 + 18 = 104,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке D (левее):

$$Q_D = -25,48 \text{ кН},$$

$$M_D = 62,52 \cdot 8,4 + 12 \cdot 5,4 - 20 \cdot 5 \cdot 5,9 + 18 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке E эпюра поперечных сил пересекает ось z . Определим расстояние z_E :

$$z_E = \frac{Q_B}{q} = \frac{14,52}{20} = 0,726 \text{ м}.$$

Определим значение изгибающего момента в точке E :

$$\begin{aligned} M_E &= 62,52 \cdot 3,726 - 20 \cdot 3,726^2 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 0,726 = \\ &= 232,95 - 138,83 + 8,712 = 102,83 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Подберем сечение в виде двух швеллеров при $R = 210 \text{ МПа}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R, \quad W_x \geq \frac{M_{\max}}{R}.$$

Максимальный изгибающий момент определим из эпюры изгибающих моментов (см. рис. 4.2): $M_{\max} = 104,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$W_x \geq \frac{104,6 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,498 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 498 \text{ см}^3.$$

Для одного швеллера:

$$\frac{W_x}{2} = \frac{498}{2} = 249 \text{ см}^3.$$

Из сортамента (прил. 2) выбираем швеллер № 24 с $W_x = 242 \text{ см}^3$.

Для двух швеллеров $W_x = 242 \cdot 2 = 484 \text{ см}^3$.

Проверим прочность по нормальным напряжениям:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{104,6 \cdot 10^3}{484 \cdot 10^{-6}} = 216 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 216 \text{ МПа} > 210 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Перегрузка составляет

$$\frac{216 - 210}{210} \cdot 100 = 2,8 \% < 5 \%, \text{ что допустимо.}$$

Проверим прочность по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq R_c.$$

$$Q_{\max} = 62,52 \text{ кН.}$$

Геометрические характеристики выбираем из прил. 2:

$$S_x^{\text{отс}} = 139 \text{ см}^3, \quad I_x = 2900 \text{ см}^4, \quad d = 5,6 \text{ мм}, \quad b = d.$$

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{62,52 \cdot 10^3 \cdot 139 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{2 \cdot 2900 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 5,6 \cdot 10^{-3}} = 26,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 26,8 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Прочность балки, состоящей из двух швеллеров, по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 3. Для заданной балки (рис. 4.3) построить эпюры внутренних усилий, выполнить расчет на прочность, подобрать прямоугольное сечение из древесины, если соотношение сторон сечения составляет $h/\epsilon = 1,4$, $R = 16$ МПа, $R_c = 2$ МПа.

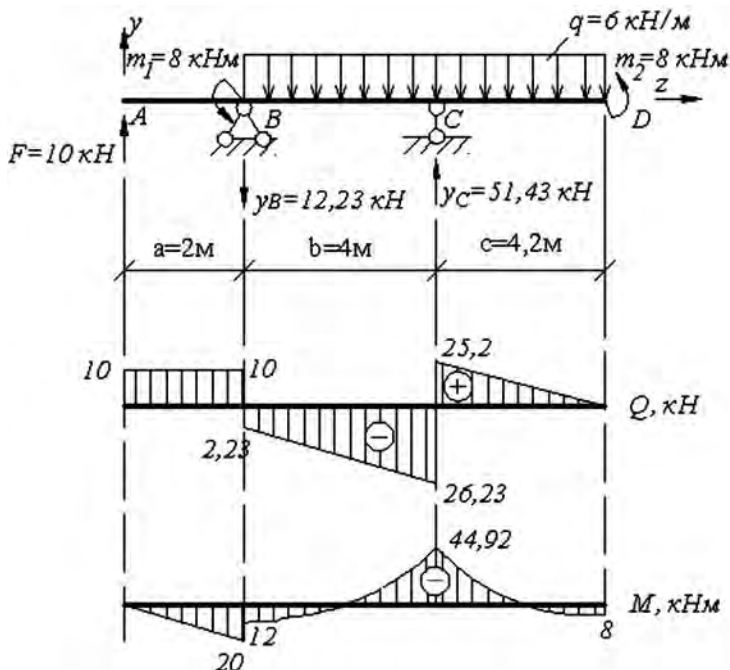


Рис. 4.3. Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Решение

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0;$$

$$m_1 - q(b+c)^2 \cdot \frac{1}{2} + Y_C b + m_2 - Fa = 0;$$

$$8 - 6 \cdot 8,2^2 \cdot \frac{1}{2} + Y_C \cdot 4 + 8 - 10 \cdot 2 = 0, \quad Y_C = 51,43 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$-F(a+b) + m_1 - Y_B b + qb^2 \cdot \frac{1}{2} - qc^2 \cdot \frac{1}{2} + m_2 = 0;$$

$$-10 \cdot 6 + 8 - Y_B \cdot 4 + 6 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 4,2^2 \cdot \frac{1}{2} + 8 = 0;$$

$$Y_B = -12,23 \text{ кН.}$$

Направление реакции меняем на противоположное.
Проверим правильность определения реакций:

$$\sum Y = 0;$$

$$F - Y_B + Y_C - q \cdot 8,2 = 10 - 12,23 + 51,43 - 6 \cdot 8,2 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (см. рис. 4.3).

В точке A :

$$Q_A = 10 \text{ кН}, \quad M_A = 0.$$

В точке B (левее):

$$Q_B = 10 \text{ кН}, \quad M_B = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке B (правее):

$$Q_B = 10 - 12,23 = -2,23 \text{ кН}, \quad M_B = 20 - 8 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке C (левее):

$$Q_C = -2,23 - 6 \cdot 4 = -26,23 \text{ кН},$$

$$M_C = 10 \cdot 6 - 12,23 \cdot 4 - 8 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = -44,92 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке C (правее):

$$Q_C = -26,23 + 51,43 = 25,2 \text{ кН},$$

$$M_C = -44,92 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке D :

$$Q_D = 10 - 12,23 - 6 \cdot 8,2 + 51,43 = 0;$$

$$M_D = 10 \cdot 10,2 - 12,23 \cdot 8,2 - 8 + 51,43 \cdot 4,2 - 6 \cdot 8,2 \cdot 4,1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подберем прямоугольное сечение $M_{\max} = 44,92 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (см. рис. 4.3):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R;$$

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{44,92 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^6} = 2,808 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2808 \text{ см}^3;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad h = 1,4b;$$

$$W_x = \frac{b(1,4b)^2}{6} = \frac{1,96b^3}{6};$$

$$6W_x = 1,96b^3, \quad b = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2808}{1,96}} = 20,48 \text{ см}.$$

Округляем: $b = 20,5 \text{ см}$. Тогда $h = 1,4 \cdot 20,5 = 28,7 \text{ см}$.

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{20,5 \cdot 28,7^2}{6} = 2814,27 \text{ см}^3;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{44,92 \cdot 10^3}{2814,27 \cdot 10^{-6}} = 15,96 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 15,96 \text{ МПа} < 16 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Недогрузка составляет

$$\frac{16 - 15,96}{16} \cdot 100 = 0,3 \text{ \%}.$$

Проверим прочность по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq R_c.$$

$$Q_{\max} = 26,23 \text{ кН (см. рис. 4.3);}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{20,5 \cdot 28,7^3}{12} = 40384,83 \text{ см}^4;$$

$$S_x^{\text{отс}} = 20,5 \cdot \frac{28,7}{2} \cdot \frac{28,7}{4} = 2110,7 \text{ см}^3;$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{26,23 \cdot 10^3 \cdot 2110,7 \cdot 10^{-6}}{40384,83 \cdot 10^{-8} \cdot 20,5 \cdot 10^{-2}} = 0,67 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 0,67 \text{ МПа} < 2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Прочность деревянной балки по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 4. Для заданной балки (рис. 4.4) построить эпюры внутренних усилий. Выполнить расчет на прочность. Подобрать диаметр круглого сечения из древесины, если $R = 16 \text{ МПа}$, $R_c = 2 \text{ МПа}$.

Решение

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0;$$

$$-Y_D(b+c) + qc\left(\frac{c}{2} + b\right) + m - qb\frac{b}{2} + Fa = 0;$$

$$-Y_D \cdot 5,4 + 10 \cdot 3,2 \cdot 3,8 + 20 - 10 \cdot \frac{2,2^2}{2} + 16 \cdot 2 = 0;$$

$$Y_D = 27,67 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = 0;$$

$$F(a+b+c) - Y_B(b+c) + qb\left(\frac{b}{2} + c\right) + m - qc\frac{c}{2} = 0;$$

$$16 \cdot 7,4 - Y_B \cdot 5,4 + 10 \cdot 2,2 \cdot 4,3 + 20 - 10 \cdot \frac{3,2^2}{2} = 0;$$

$$Y_B = 33,67 \text{ кН.}$$

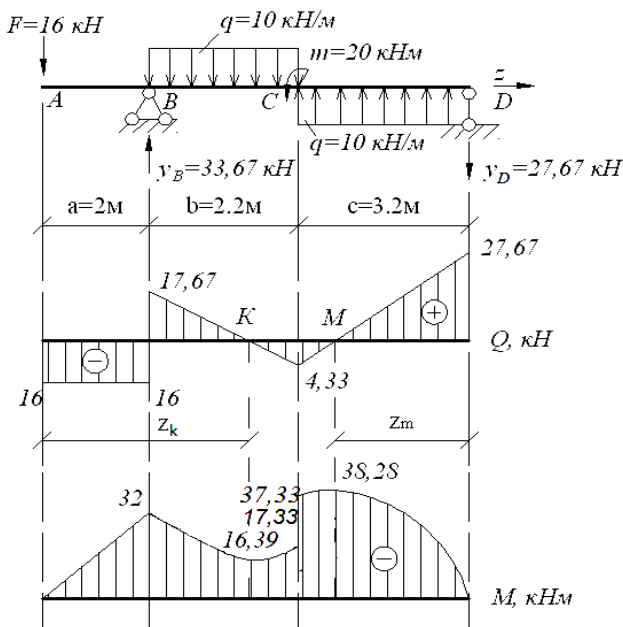


Рис. 4.4. Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Проверим правильность определения реакций:

$$\sum Y = 0;$$

$$-F - qb + qc + Y_B - Y_D = 0;$$

$$-16 - 10 \cdot 2,2 + 10 \cdot 3,2 + 33,67 - 27,67 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
В точке A :

$$Q_A = -16 \text{ кН}, \quad M_A = 0.$$

В точке B (левее):

$$Q_B = -16 \text{ кН}, \quad M_B = -16 \cdot 2 = -32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке B (правее):

$$Q_B = -16 + 33,67 = 17,67 \text{ кН}, \quad M_B = -32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке C (левее):

$$Q_C = 17,67 - 10 \cdot 2,2 = -4,33 \text{ кН},$$

$$M_C = -16 \cdot 4,2 - 10 \cdot 2,2 \cdot 1,1 + 33,67 \cdot 2,2 = -17,33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке C (правее):

$$Q_C = -4,33 \text{ кН}, \quad M_C = -17,33 - 20 = -37,33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке D :

$$Q_D = -4,33 + 10 \cdot 3,2 = 27,67 \text{ кН};$$

$$M_D = -16 \cdot 7,4 - 10 \cdot 2,2 \cdot 4,3 + 33,67 \cdot 5,4 - 20 + 10 \cdot 3,2 \cdot 1,6 = 0.$$

Определим значение изгибающих моментов в точке K и M (в этих точках эпюра поперечных сил меняет знак).

$$z_K = a + \frac{Q_B}{q} = 2 + \frac{17,67}{10} = 3,77 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_K &= -Fz_K + Y_B(z_K - a) - q(z_K - a) \frac{(z_K - a)}{2} = \\ &= -16 \cdot 3,77 + 33,67 \cdot 1,77 - 10 \cdot \frac{1,77^2}{2} = -16,39 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$z_M = \frac{Q_D}{q} = \frac{27,67}{10} = 2,77 \text{ м},$$

$$M_M = -Y_D z_M + q z_M \frac{z_M}{2} =$$

$$-27,67 \cdot 2,77 + 10 \cdot \frac{2,77^2}{2} = -38,28 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подберем круглое сечение из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R.$$

Из эпюры изгибающих моментов (см. рис. 4.4) выберем максимальный изгибающий момент: $M_{\max} = 38,28 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{38,28 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^6} = 2,393 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2393 \text{ см}^3;$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}, \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2393}{3,14}} = 28,99 \text{ см}.$$

Принимаем $d = 29 \text{ см}$, $W_x = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 29^3}{32} = 2393 \text{ см}^3$.

Определим максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{38,28 \cdot 10^3}{2393 \cdot 10^{-6}} = 16 \cdot 10^6 \text{ Па} = 16 \text{ МПа} = R.$$

Проверим прочность по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq R_c.$$

Из эпюры поперечных сил (см. рис. 4.4) выберем максимальную поперечную силу $Q_{\max} = 27,67 \text{ кН}$

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 29^4}{64} = 34700,97 \text{ см}^4;$$

$$S_x^{\text{отс}} = \frac{\pi d^2}{8} \cdot 0,212d = \frac{3,14 \cdot 29^2}{8} \cdot 0,212 \cdot 29 = 2029,41 \text{ см}^3;$$

$$b = d = 29 \text{ см};$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{27,67 \cdot 10^3 \cdot 2029,41 \cdot 10^{-6}}{34700,97 \cdot 10^{-8} \cdot 29 \cdot 10^{-2}} = 0,56 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 0,56 \text{ МПа} < 2 \text{ МПа}.$$

Прочность деревянной балки по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 5. Для заданной балки (рис. 4.5) построить эпюры внутренних усилий и проверить прочность. Поперечное сечение балки – двутавр № 30, $R = 210 \text{ МПа}$, $R_c = 130 \text{ МПа}$.

Решение

Данная шарнирная балка может рассматриваться как сочетание консольной балки DE и подвесной двухопорной балки AD , для которой правой опорой является конец консоли D первой балки.

Рассмотрим равновесие подвесной балки AD и определим ее опорные реакции:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-Y_D(a+b+c) - F(a+b) + q(b+c)\left(a + \frac{b+c}{2}\right) - m = 0;$$

$$-Y_D \cdot 8,4 - 18 \cdot 6,8 + 16 \cdot 6,2 \cdot 5,3 - 24 = 0;$$

$$Y_D = 45,16 \text{ кН}.$$

$$\sum M_D = 0;$$

$$Y_A(a + b + c) - m - q(b + c)\left(\frac{b + c}{2}\right) + Fc = 0;$$

$$Y_A \cdot 8,4 - 24 - 16 \cdot 6,2 \cdot 3,1 + 18 \cdot 1,6 = 0;$$

$$Y_A = 36,04 \text{ кН.}$$

Определим правильность определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0;$$

$$Y_A + F + Y_D - q(b + c) = 0;$$

$$36,04 + 18 + 45,16 - 16 \cdot 6,2 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

В точке *A*:

$$Q_A = 36,04 \text{ кН}, \quad M_A = 0.$$

В точке *B* (левее):

$$Q_B = 36,04 \text{ кН}, \quad M_B = 36,04 \cdot 2,2 = 79,29 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке *B* (правее):

$$Q_B = 36,04 \text{ кН}, \quad M_B = 79,29 - 24 = 55,29 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке *C* (левее):

$$Q_C = 36,04 - 16 \cdot 4,6 = -37,56 \text{ кН},$$

$$M_C = 36,04 \cdot 6,8 - 24 - 16 \cdot 4,6 \cdot 2,3 = 51,79 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке *C* (правее):

$$Q_C = -37,56 + 18 = -19,56 \text{ кН}, \quad M_C = 51,79 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке D :

$$Q_D = -19,56 - 16 \cdot 1,6 = -45,16 \text{ кН},$$

$$M_D = 36,04 \cdot 8,4 - 24 - 16 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3,1 + 18 \cdot 1,6 = 0.$$

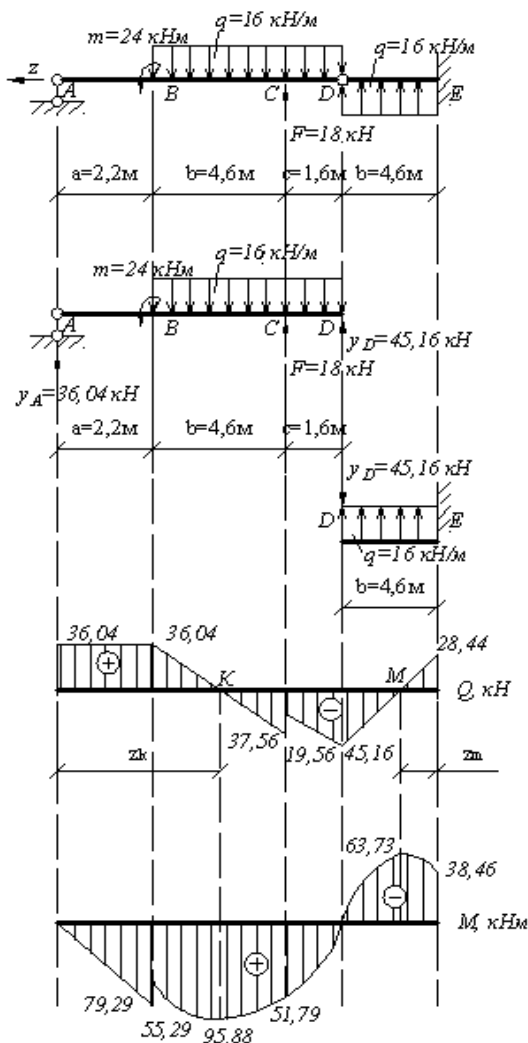


Рис. 4.5. Схема шарнирной балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Рассмотрим консольную балку DE . Реакцию Y_D прикладываем в точке D с противоположным знаком. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов с учетом Y_D .

В точке D :

$$Q_D = -45,16 \text{ кН}, \quad M_D = 0;$$

$$Q_E = -45,16 + 16 \cdot 4,6 = 28,44 \text{ кН};$$

$$M_E = -45,16 \cdot 4,6 + 16 \cdot 4,6 \cdot 2,3 = -38,46 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим величину изгибающих моментов в точках K и M (в данных точках эпюра поперечных сил меняет знак, см. рис. 4.5):

$$z_K = a + \frac{Q_B}{q} = 2,2 + \frac{36,04}{16} = 4,45 \text{ м};$$

$$M_K = 36,04 \cdot 4,45 - 24 - 16 \cdot \frac{2,25^2}{2} = 95,88 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_M = \frac{Q_E}{q} = \frac{28,44}{16} = 1,78 \text{ м};$$

$$M_M = -45,16 \cdot (4,6 - 1,78) + 16 \cdot \frac{(4,6 - 1,78)^2}{2} = -63,73 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверим прочность балки по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R.$$

Для двутавра № 30 из сортамента (прил. 1) выпишем значение момента сопротивления $W_x = 472 \text{ см}^3$.

Из эпюры изгибающих моментов $M_{\max} = 95,88 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{95,88 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} = 203,13 \cdot 10^6 \text{ Па} = 203,13 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет:

$$\frac{210 - 203,13}{210} \cdot 100 = 3,3 \%$$

Проверим прочность балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq R_c, \quad Q_{\max} = 45,16 \text{ кН.}$$

Геометрические характеристики для двутавра № 30 выбираем из прил. 1: $I_x = 7080 \text{ см}^4$, $S_x^{\text{отс}} = 268 \text{ см}^3$, $d = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $b = d$.

$$\tau_{\max} = \frac{45,16 \cdot 10^3 \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} = 26,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 26,3 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа.}$$

Прочность двутавровой балки по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 6. Для заданной балки (рис. 4.6) построить эпюры внутренних усилий и проверить прочность. Поперечное сечение балки – двутавр № 24, $R = 210 \text{ МПа}$, $R_c = 130 \text{ МПа}$.

Решение

Данная шарнирная балка может рассматриваться как сочетание балки AD , лежащей на двух опорах и подвесной двухопорной балки DE . Рассмотрим равновесие подвесной балки DE . Определим реакции опор:

$$\sum M_D = 0;$$

$$-Y_E a + qa \frac{a}{2} + m = 0;$$

$$-Y_E \cdot 4,2 + 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} + 10 = 0, \quad Y_E = 27,58 \text{ кН.}$$

$$\sum M_E = 0;$$

$$Y_D a - qa \frac{a}{2} + m = 0;$$

$$Y_D \cdot 4,2 - 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} + 10 = 0, \quad Y_D = 22,82 \text{ кН.}$$

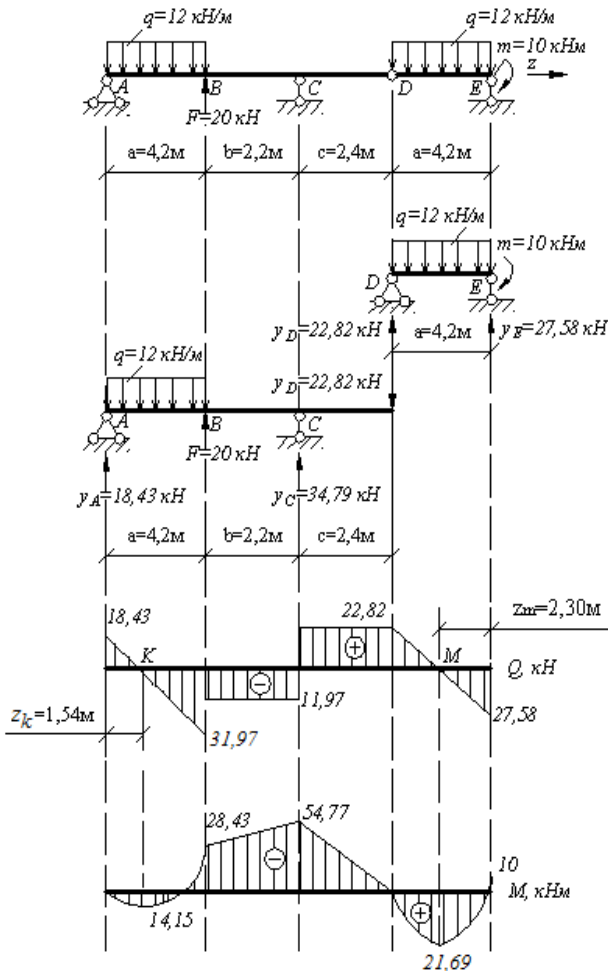


Рис. 4.6. Схема шарнирной балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Проверяем правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = 0;$$

$$Y_D + Y_E - qa = 0;$$

$$22,82 + 27,58 - 12 \cdot 4,2 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участке DE шарнирной балки.

В точке E :

$$Q_E = -27,58 \text{ кН}, \quad M_E = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке D :

$$Q_D = -27,58 + 12 \cdot 4,2 = 22,82 \text{ кН};$$

$$M_D = -m + Y_E a - qa \frac{a}{2} = -10 + 27,58 \cdot 4,2 - 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} = 0.$$

Определим реакции опор балки AD , приложив в точке D реакцию Y_D , взятую с обратным знаком

$$\sum M_A = 0,$$

$$-Y_C(a+b) - Fa + qa \frac{a}{2} + Y_D(a+b+c) = 0;$$

$$-Y_C \cdot 6,4 - 20 \cdot 4,2 + 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} + 22,82 \cdot 8,8 = 0;$$

$$Y_C = 34,79 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0,$$

$$Y_A(a+b) - qa \left(\frac{a}{2} + b\right) + Fb + Y_D c = 0;$$

$$Y_A \cdot 6,4 - 12 \cdot 4,2 \cdot 4,3 + 20 \cdot 2,2 + 22,82 \cdot 2,4 = 0;$$

$$Y_A = 18,43 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = 0, \quad \sum Y = Y_A + F + Y_C - qa - Y_D = 0;$$

$$18,43 + 20 + 34,79 - 12 \cdot 4,2 - 22,82 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участке AD шарнирной балки.

В точке D :

$$Q_D = 22,82 \text{ кН}, \quad M_D = 0.$$

В точке C (справа):

$$Q_C = 22,82 \text{ кН}, \quad M_C = -22,82 \cdot 2,4 = -54,77 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке C (слева):

$$Q_C = 22,82 - 34,79 = -11,97 \text{ кН}, \quad M_C = -54,77 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке B (справа):

$$Q_B = -11,97 \text{ кН},$$

$$M_B = -22,82 \cdot 4,6 + 34,79 \cdot 2,2 = -28,43 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке B (слева):

$$Q_B = -11,97 - 20 = -31,97 \text{ кН}, \quad M_B = -28,43 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке A :

$$Q_A = -31,97 + 12 \cdot 4,2 = 18,43 \text{ кН}, \quad M_A = 0.$$

Определим координаты точек K и M :

$$z_K = \frac{Q_A}{q} = \frac{18,43}{12} = 1,54 \text{ м}, \quad z_M = \frac{Q_E}{q} = \frac{27,58}{12} = 2,30 \text{ м}.$$

Вычислим значение изгибающих моментов в точках K и M :

$$M_K = Y_A z_K - q \frac{z_K^2}{2} = 18,43 \cdot 1,54 - 12 \frac{1,54^2}{2} = 14,15 \text{ кН},$$

$$M_M = Y_E z_M - q \frac{z_M^2}{2} - m = 27,58 \cdot 2,3 - 12 \frac{2,3^2}{2} - 10 = 21,69 \text{ кН}.$$

Проверим несущую способность балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R.$$

Для двутавра № 24 из сортамента (прил. 1) выпишем значение момента сопротивления $W_x = 289 \text{ см}^3$. Из эпюры изгибающих моментов $M_{\max} = 54,77 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$$\sigma_{\max} = \frac{54,77 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 189,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 189,5 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена.

Проверим прочность балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq R_c.$$

Для двутавра № 24 из сортамента (прил. 1) выпишем:

$I_x = 3460 \text{ см}^4$, $S_x^{\text{отс}} = 163 \text{ см}^3$, $d = 5,6 \text{ мм}$. Из эпюры поперечных сил $Q_{\max} = 27,58 \text{ кН}$, $b = d$.

$$\tau_{\max} = \frac{31,97 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 10^{-8} \cdot 5,6 \cdot 10^{-3}} = 26,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 26,9 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по касательным напряжениям обеспечена.

Пример 7. Для заданной шарнирной балки (рис. 4.7) построить эпюры внутренних усилий и проверить прочность. Поперечное сечение балки – двутавр № 24, $R = 210 \text{ МПа}$, $R_c = 130 \text{ МПа}$.

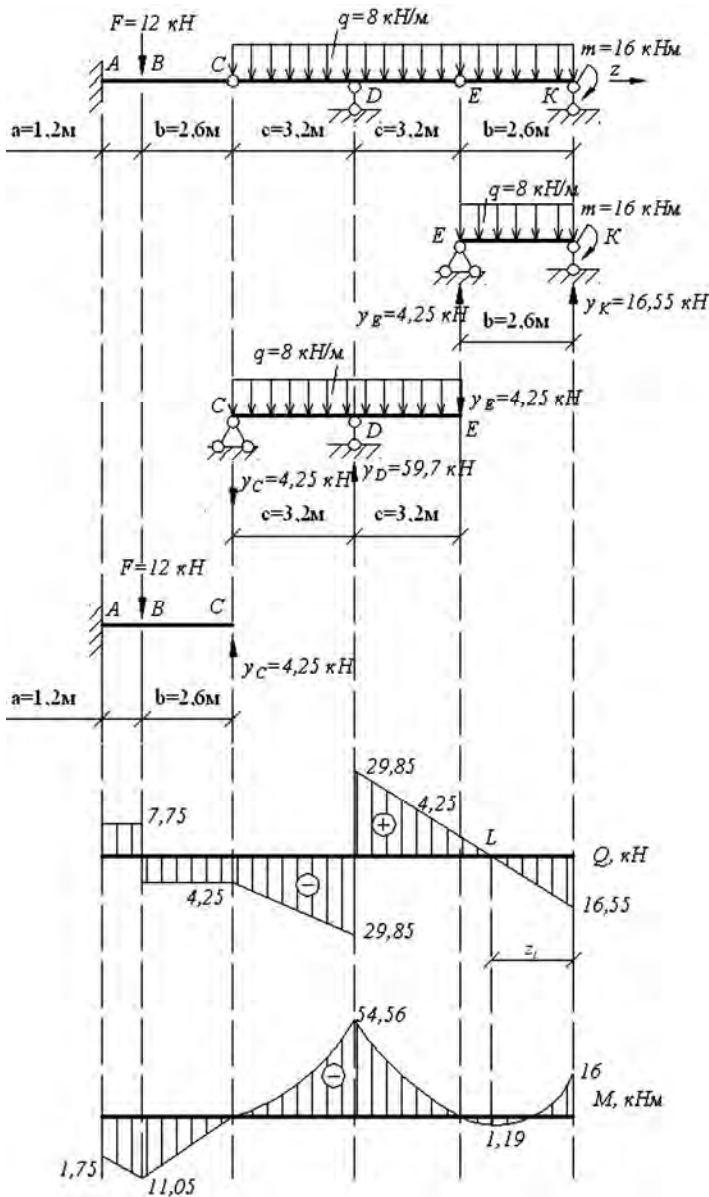


Рис. 4.7. Схема шарнирной балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Решение

Данная балка может рассматриваться как сочетание балок EK , CE , последовательно лежащих на консоли AC . Рассмотрим равновесие подвесной балки EK . Определим реакции опор:

$$\sum M_E = 0;$$

$$-Y_K b + qb \frac{b}{2} + m = 0;$$

$$-Y_K \cdot 2,6 + 8 \cdot \frac{2,6^2}{2} + 16 = 0, \quad Y_K = 16,55 \text{ кН.}$$

$$\sum M_K = 0;$$

$$Y_E b - qb \frac{b}{2} + m = 0;$$

$$Y_E \cdot 2,6 - 8 \cdot \frac{2,6^2}{2} + 16 = 0, \quad Y_E = 4,25 \text{ кН.}$$

Проверим правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = 0;$$

$$16,55 + 4,25 - 8 \cdot 2,6 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участке EK шарнирной балки (см. рис. 4.7).

В точке K :

$$Q_K = -16,55 \text{ кН}, \quad M_K = -16 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

В точке E :

$$Q_E = -16,55 + 8 \cdot 2,6 = 4,25 \text{ кН};$$

$$M_E = 16,55 \cdot 2,6 - 8 \cdot 2,6 \cdot \frac{2,6}{2} - 16 = 0.$$

Рассмотрим равновесие подвешенной балки CE . Определим реакции опор. Реакцию Y_E прикладываем к балке с обратным знаком.

$$\sum M_C = 0;$$

$$Y_E \cdot 2c + q \cdot 2c \cdot \frac{2c}{2} - Y_D \cdot c = 0;$$

$$4,25 \cdot 6,4 + 8 \cdot \frac{6,4^2}{2} - Y_D \cdot 3,2 = 0, \quad Y_D = 59,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0;$$

$$-Y_C \cdot c + Y_E \cdot c = 0, \quad Y_C = Y_E = 4,25 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = 0;$$

$$Y_D - q \cdot 2c - Y_C - Y_E = 0;$$

$$59,7 - 8 \cdot 6,4 - 4,25 - 4,25 = 0.$$

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участке CE шарнирной балки:

В точке E :

$$Q_E = 4,25 \text{ кН}, \quad M_E = 0.$$

В точке D (справа):

$$Q_D = 4,25 + 8 \cdot 3,2 = 29,85 \text{ кН};$$

$$M_D = -4,25 \cdot 3,2 - 8 \cdot \frac{3,2^2}{2} = -54,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке D (слева):

$$Q_D = 29,85 - 59,7 = -29,85 \text{ кН}, \quad M_D = -54,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке C :

$$Q_C = -29,85 + 8 \cdot 3,2 = -4,25 \text{ кН};$$

$$M_C = -4,25 \cdot 6,4 - 8 \cdot \frac{6,4^2}{2} + 59,7 \cdot 3,2 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на консольной балке AC (реакцию Y_C прикладываем с обратным знаком):

В точке C :

$$Q_C = -4,25 \text{ кН}, \quad M_C = 0.$$

В точке B (справа):

$$Q_B = -4,25 \text{ кН}, \quad M_B = 4,25 \cdot 2,6 = 11,05 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке B (слева):

$$Q_B = -4,25 + 12 = 7,75 \text{ кН}, \quad M_B = 11,05 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке A :

$$Q_A = 7,75 \text{ кН}, \quad M_A = 4,25 \cdot 3,8 - 12 \cdot 1,2 = 1,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим момент в точке L (эпюра поперечных сил меняет знак):

$$z_L = \frac{Q_K}{q} = \frac{16,55}{8} = 2,07 \text{ м};$$

$$M_L = Y_K z_L - m - q \frac{z_L^2}{2} = 16,55 \cdot 2,07 - 16 - 8 \cdot \frac{2,07^2}{2} = 1,19 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверим несущую способность балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R.$$

Из эпюры изгибающих моментов (см. рис. 4.7) $M_{\max} = 54,56 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Из прил. 1 $W_x = 289 \text{ см}^3$.

$$\sigma_{\max} = \frac{54,56 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 188,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 188,8 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена.
Проверим прочность балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq R_c.$$

Из эпюры поперечных сил: $Q_{\max} = 29,85 \text{ кН}$. Для двутавра № 24 из сортамента (прил. 1): $I_x = 3460 \text{ см}^4$, $S_x^{\text{отс}} = 163 \text{ см}^3$, $d = 5,6 \text{ мм}$, $b = d$.

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{29,85 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 10^{-8} \cdot 5,6 \cdot 10^{-3}} = 25,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 25,1 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Прочность балки по касательным напряжениям обеспечена.

Пример 8. Для заданной рамы (рис. 4.8) построить эпюры внутренних усилий.

Решение

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum X = 0;$$

$$X_A - F - F = 0, \quad X_A = 2F = 20 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$-Y_K(a+b+c) - Fc - F(a+c) + m - m + q \frac{(a+b)^2}{2} = 0;$$

$$-Y_K \cdot 6,6 - 10 \cdot 2,4 - 10 \cdot 4,6 + 20 - 20 + 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} = 0;$$

$$Y_K = 5,43 \text{ кН.}$$

$$\sum M_K = 0;$$

$$-X_A(a+c) + Y_A(a+b+c) - q(a+b)\left(\frac{a+b}{2} + c\right) + m - m + Fa = 0;$$

$$-20 \cdot 4,6 + Y_A \cdot 6,6 - 12 \cdot 4,2 \cdot 4,5 + 20 - 20 + 10 \cdot 2,2 = 0;$$

$$Y_A = 44,97 \text{ кН.}$$

Проверим правильность определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0;$$

$$-q(a+b) + Y_A + Y_K = -12 \cdot 4,2 + 44,97 + 5,43 = 0.$$

Построим эпюру продольных сил (см. рис. 4.8).

Участок AB :

$$N_{AB} = -20 \text{ кН (сжатие).}$$

Участок BD :

$$N_{BD} = -20 + 10 = -10 \text{ кН (сжатие).}$$

Участок KD :

$$N_{KD} = 5,43 \text{ кН (растяжение).}$$

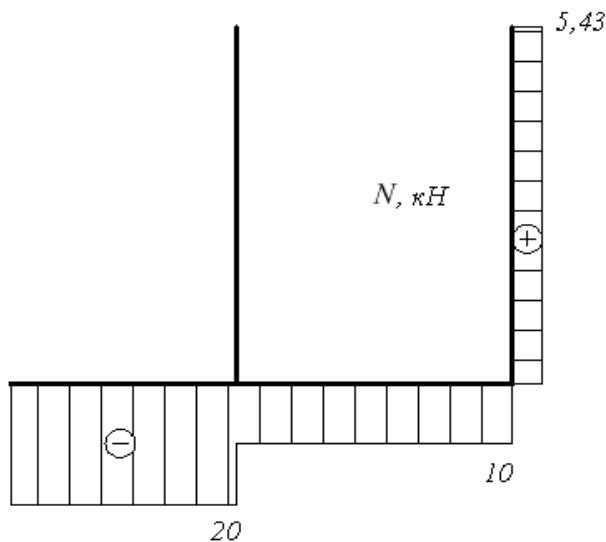
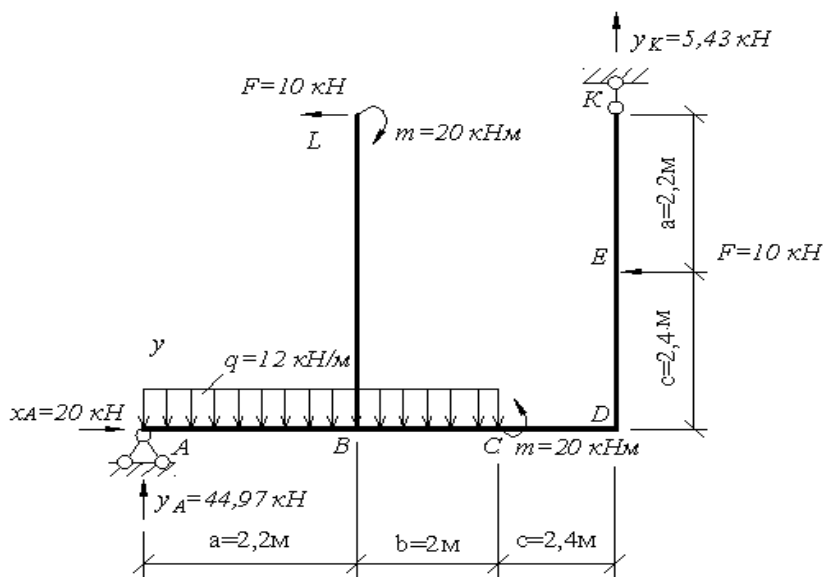


Рис. 4.8. Схема рамы и эпюра продольных сил

Построим эпюры поперечных сил (рис. 4.9).

Участок AB :

$$Q_A = 44,97 \text{ кН};$$

$$Q_B = 44,97 - 12 \cdot 2,2 = 18,57 \text{ кН}.$$

Участок BD :

$$Q_C = 18,57 - 12 \cdot 2 = -5,43 \text{ кН};$$

$$Q_D = -5,43 \text{ кН}.$$

Участок ED :

$$Q_E = -10 \text{ кН};$$

$$Q_D = Q_E = -10 \text{ кН}.$$

Участок LB :

$$Q_L = -10 \text{ кН};$$

$$Q_B = -10 \text{ кН}.$$

Построим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 4.9).

Участок AB :

$$M_A = 0, \quad M_B = 44,97 \cdot 2,2 - 12 \cdot 2,2 \cdot \frac{2,2}{2} =$$

$$= 98,934 - 29,04 = 69,894 \text{ кН} \cdot \text{м (растянутые волокна снизу)}.$$

Участок LB :

$$M_L = 20 \text{ кН} \cdot \text{м (растянутые волокна слева)};$$

$$M_B = 20 - 10 \cdot 4,6 = -26 \text{ кН} \cdot \text{м (растянутые волокна справа)}.$$

Участок BC :

$$M_B = 69,894 - 26 = 43,894 \text{ кН} \cdot \text{м (растянутые волокна снизу)}.$$

Участок KD :

$$\sum M_K = 0;$$

$M_E = 0$, $M_D = 10 \cdot 2,4 = 24$ кН·м (растянутые волокна справа).

Участок DC :

$M_D = 24$ кН·м (растянутые волокна снизу);

M_C (правее) = $24 + 5,43 \cdot 2,4 = 37,032$ кН·м;

M_C (левее) = $37,032 + 20 = 57,032$ кН·м (растянутые волокна снизу).

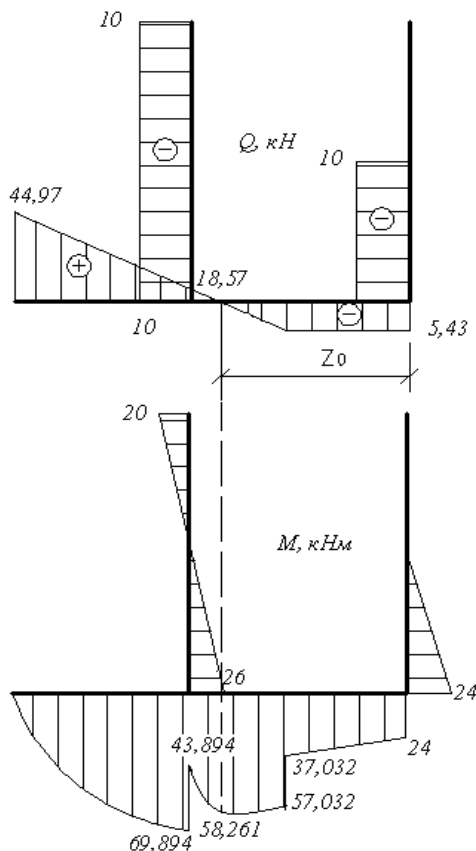


Рис. 4.9. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Найдем значение экстремального значения момента:

$$z_0 = c + \frac{Q_C}{q} = 2,4 + \frac{5,43}{12} = 2,85 \text{ м};$$

$$M_0 = 10 \cdot 2,4 + 20 + 5,43 \cdot 2,85 - 12 \cdot \frac{0,45^2}{2} = 44 + 15,49 - 1,23 = \\ = 58,261 \text{ кНм (растянутые волокна снизу)}.$$

Проверим равновесие узлов (рис. 4.10).

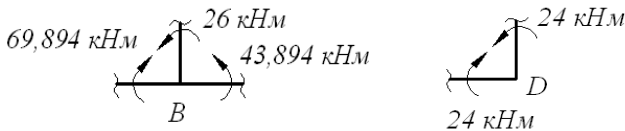


Рис. 4.10. Схемы узлов рамы

Равновесие узлов выполняется.

Пример 9. Для заданной рамы (рис. 4.11) построить эпюры внутренних усилий.

Решение

Определим реакции опор:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-M_A + qa \frac{a}{2} - Fa + m - m + qb \left(\frac{b}{2} + a \right) + Fc = 0;$$

$$M_A = 10 \cdot 4 \cdot 2 - 20 \cdot 4 + 16 - 16 + 10 \cdot 2 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 220 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\sum Y = 0;$$

$$Y_A - qa + F - qb = 0;$$

$$10 \cdot 4 - 20 + 10 \cdot 2 = 40 \text{ кН}.$$

$$\sum X = 0;$$

$$X_A - F = 0, \quad X_A = F = 20 \text{ кН}.$$

Построим эпюру продольных сил (см. рис. 4.11).

Участок ED :

$$N_E = N_D = 0.$$

Участок DC :

$$N_D = N_C = qb = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН (растяжение)}.$$

Участок AC :

$$N_A = N_B = N_C = -X_A = -20 \text{ кН (сжатие)}.$$

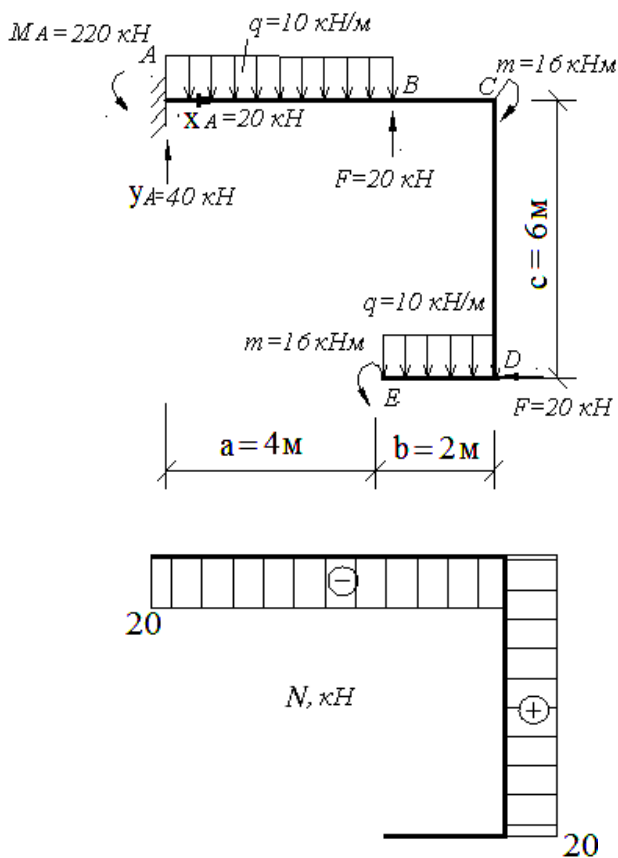


Рис. 4.11. Схема рамы и эпюра продольных сил

Построим эпюру поперечных сил (рис. 4.12).

Участок ED :

$$Q_E = 0, \quad Q_D = -qb = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН.}$$

Участок DC :

$$Q_D = Q_C = F = 20 \text{ кН.}$$

Участок AC :

$$Q_A = Y_A = 40 \text{ кН}, \quad Q_B^I = Y_A - qa = 40 - 10 \cdot 4 = 0;$$

$$Q_B^{II} = Y_A - qa + F = 20 \text{ кН}, \quad Q_C = Y_A - qa + F = 20 \text{ кН.}$$

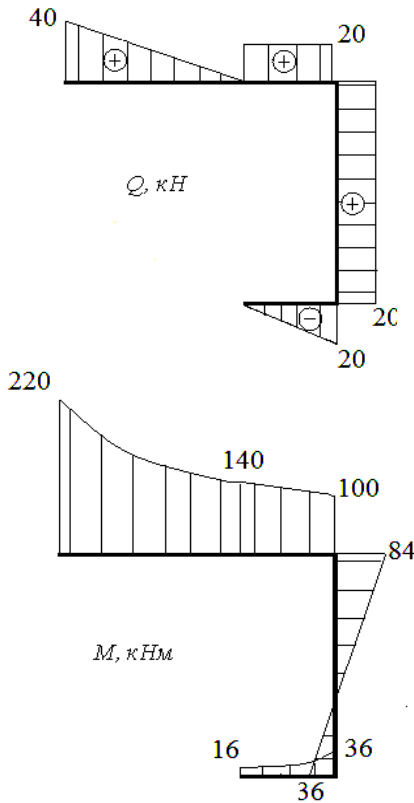


Рис. 4.12. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Построим эпюру изгибающих моментов (рис. 4.12).
Участок ED :

$$M_E = -m = -16 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = -m - q \cdot \frac{b^2}{2} = -16 - 10 \cdot \frac{2^2}{2} = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DC :

$$M_D = m + q \cdot \frac{b^2}{2} = 16 + 10 \cdot \frac{2^2}{2} = 36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = m + q \cdot \frac{b^2}{2} - Fc = 16 + 10 \cdot \frac{2^2}{2} - 20 \cdot 6 = -84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок AC :

$$M_A = -M_A = -220 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = -M_A + Y_A a - q \cdot \frac{a^2}{2} = -220 + 40 \cdot 4 - 10 \cdot \frac{4^2}{2} = -140 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\begin{aligned} M_C &= -M_A + Y_A (a + b) - qa \left(\frac{a}{2} + b \right) + Fb = \\ &= -220 + 40 \cdot 6 - 10 \cdot 4 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = -100 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Проверим равновесие узлов. Равновесие узлов выполняется (рис. 4.13).

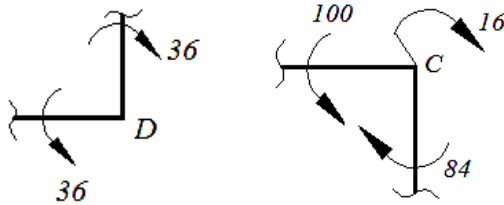


Рис. 4.13. Схемы узлов рамы

4.2. Определение линейных и угловых перемещений в однопролетной балке

Задача 7

Балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетными сопротивлениями $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа.

Требуется подобрать сечение балки двутаврового профиля и проверить прочность с учетом собственного веса.

В одном из сечений балки, имеющем одновременно большие значения поперечной силы Q и изгибающего момента M , определить напряжения σ и τ на уровне примыкания полки к стенке; проверить прочность, используя энергетическую теорию прочности; для сравнения выполнить проверку прочности по третьей теории прочности; выделить вокруг указанной точки элемент балки и показать на схеме нормальные, касательные и главные напряжения.

С использованием уравнений метода начальных параметров определить углы поворота сечений над опорами, прогибы посередине пролета и на конце консоли, построить эпюру прогибов балки.

Проверить жесткость балки при допустимом относительном прогибе

$$\frac{v_{\max}}{l} = \frac{1}{200}.$$

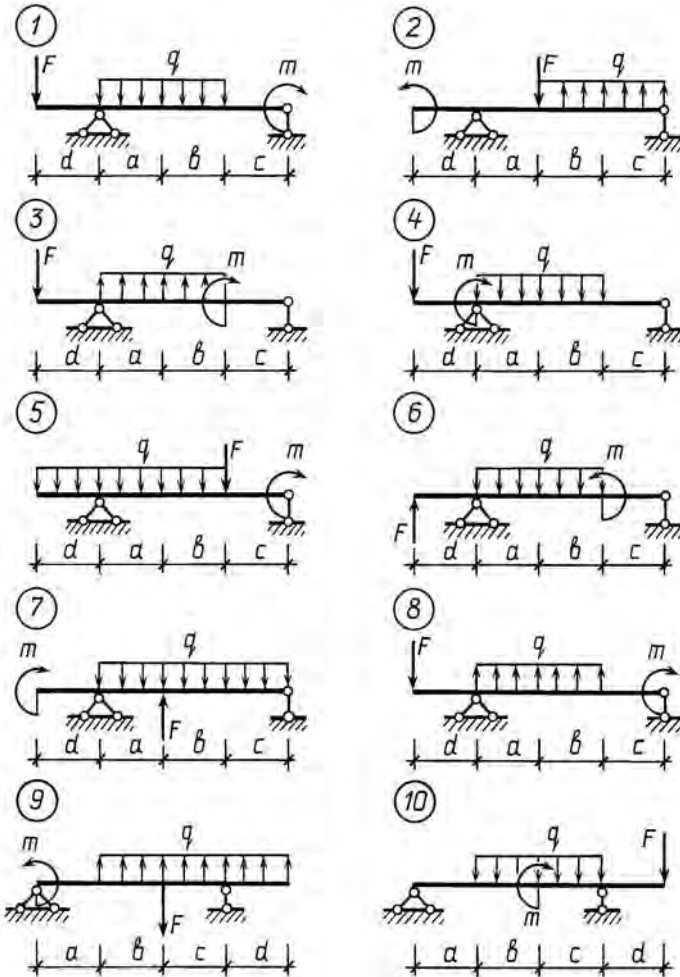
Исходные данные к задаче 7 представлены в табл. 4.2.

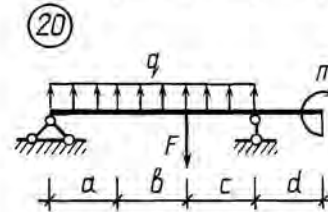
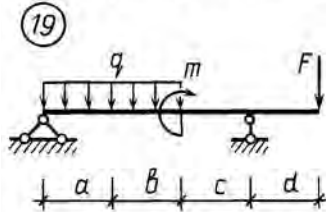
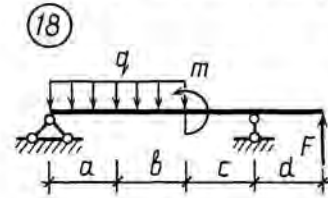
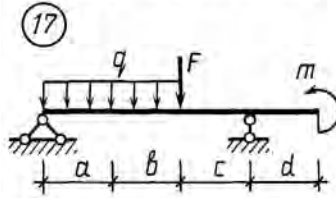
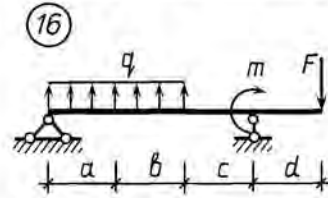
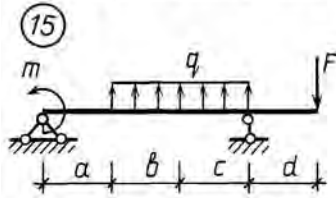
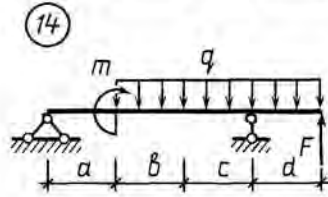
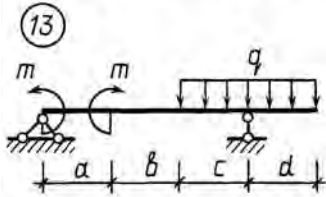
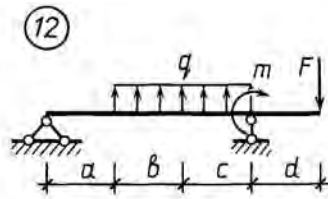
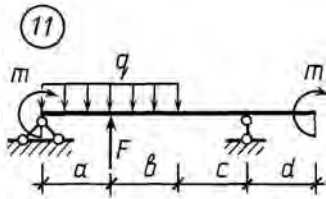
Таблица 4.2

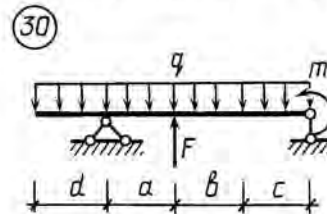
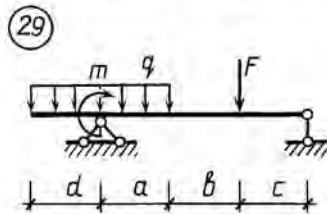
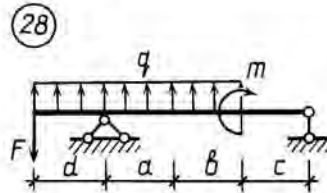
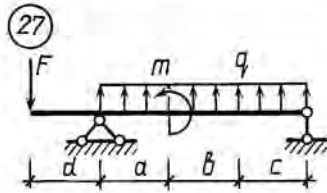
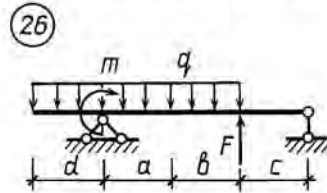
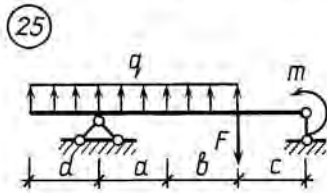
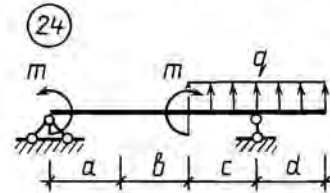
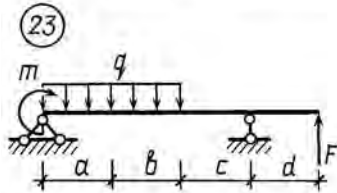
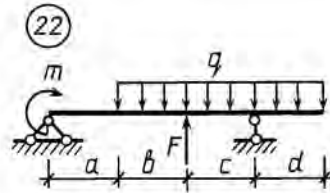
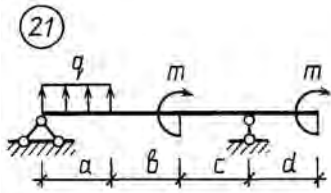
Исходные данные к задаче 7

№ варианта	Размеры, м				Нагрузки		
	a	b	c	d	F , кН	q , кН/м	m , кН·м
1	2,0	1,0	4,0	1,0	10	16	34
2	2,0	3,0	2,0	2,0	24	12	16
3	2,0	4,0	3,0	2,0	10	22	20
4	4,0	3,0	2,0	2,0	20	20	26
5	2,0	3,0	2,0	2,0	22	18	20
6	4,0	2,0	3,0	1,0	24	10	20

№ варианта	Размеры, м				Нагрузки		
	a	b	c	d	F , кН	q , кН/м	m , кН·м
7	2,0	3,0	4,0	2,0	18	20	10
8	4,0	3,0	3,0	2,0	16	18	22
9	3,0	2,0	4,0	2,0	28	18	10
10	3,0	4,0	2,0	2,0	12	14	16







Пример решения задачи 7

Балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетными сопротивлениями $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа (рис. 4.14).

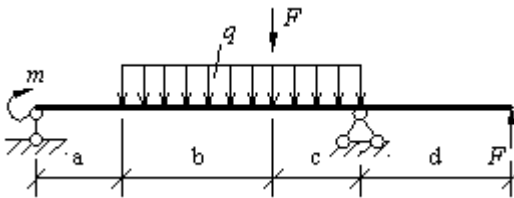
Требуется подобрать сечение балки двутаврового профиля и проверить прочность с учетом собственного веса.

В одном из сечений балки, имеющем одновременно большие значения поперечной силы Q и изгибающего момента M , определить напряжения σ и τ на уровне примыкания полки к стенке; проверить прочность, используя энергетическую теорию прочности; для сравнения выполнить проверку прочности по третьей теории прочности; выделить вокруг указанной точки элемент балки и показать на схеме нормальные, касательные и главные напряжения.

С использованием уравнений метода начальных параметров определить углы поворота сечений над опорами, прогибы посередине пролета и на конце консоли, построить эпюру прогибов балки.

Проверить жесткость балки при допустимом относительном прогибе:

$$\frac{v_{\max}}{l} = \frac{1}{200}.$$



$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ м;} \\ b &= 3 \text{ м;} \\ c &= 2 \text{ м;} \\ d &= 4 \text{ м;} \\ F &= 20 \text{ кН;} \\ M &= 10 \text{ кН}\cdot\text{м;} \\ q &= 12 \text{ кН/м.} \end{aligned}$$

Рис. 4.14. Схема балки

Определим опорные реакции в балке и построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Составим уравнение равновесия:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= -F(a + \vartheta + c + d) - Y_D(a + \vartheta + c) + \\ &+ F(a + \vartheta) + q(\vartheta + c)\left(\frac{\vartheta + c}{2} + a\right) + m = 0; \\ -20 \cdot 11 - Y_D \cdot 7 + 20 \cdot 5 + 12 \cdot 5 \cdot 4,5 + 10 &= 0;\end{aligned}$$

$$Y_D = \frac{160}{7} = 22,857 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_D = 0;$$

$$\Sigma M_D = Y_A(a + \vartheta + c) + m - q\frac{(\vartheta + c)^2}{2} - Fc - Fd = 0;$$

$$Y_A = \frac{260}{7} = 37,143 \text{ кН.}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$\Sigma Y = Y_A + Y_D - q(\vartheta + c) - F + F = 22,857 + 37,143 - 12 \cdot 5 - 20 + 20 = 0.$$

Строим эпюру поперечных сил (рис. 4.16):

$$Q_A = Y_A = 37,143 \text{ кН}; \quad Q_B = Q_A = 37,143 \text{ кН};$$

$$Q_{C(\text{левее})} = Q_A - qb = 37,143 - 36 = 1,143 \text{ кН};$$

$$Q_{C(\text{правее})} = Q_{C(\text{левее})} - F = 1,143 - 20 = -18,857 \text{ кН};$$

$$Q_{D(\text{левее})} = Q_{C(\text{правее})} - qc = -18,857 - 12 \cdot 2 = -42,857 \text{ кН};$$

$$Q_{D(\text{правее})} = Q_{D(\text{левее})} + Y_D = -42,857 + 22,857 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_K = -20 \text{ кН.}$$

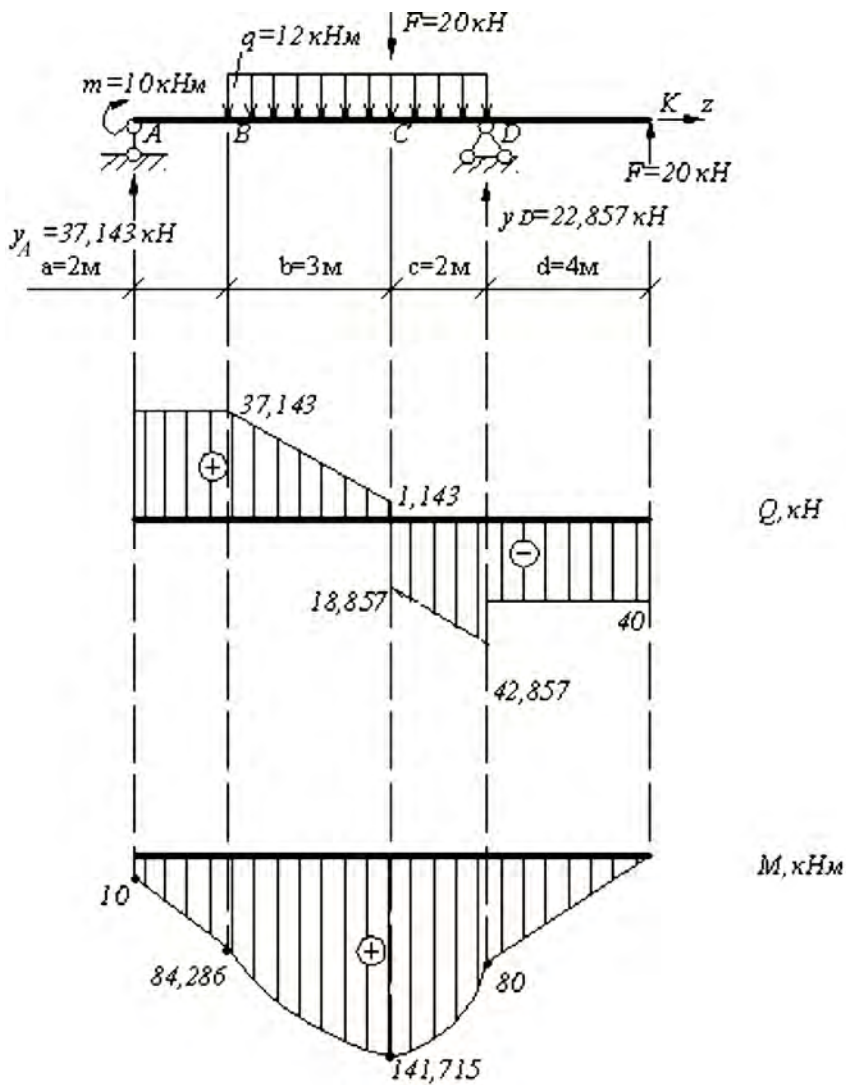


Рис. 4.15. Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 4.16):

$$M_A = m = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = m + Y_A a = 10 + 37,143 \cdot 2 = 84,286 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = m + Y_A(a + \vartheta) - q \frac{b^2}{2} = 10 + 37,143 \cdot 5 - 12 \cdot \frac{3^2}{2} = 141,715 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = m + Y_A(a + b + c) - q \frac{(b + c)^2}{2} - Fc =$$

$$= 10 + 37,143 \cdot 7 - \frac{12 \cdot 5^2}{2} - 20 \cdot 2 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_K = 0.$$

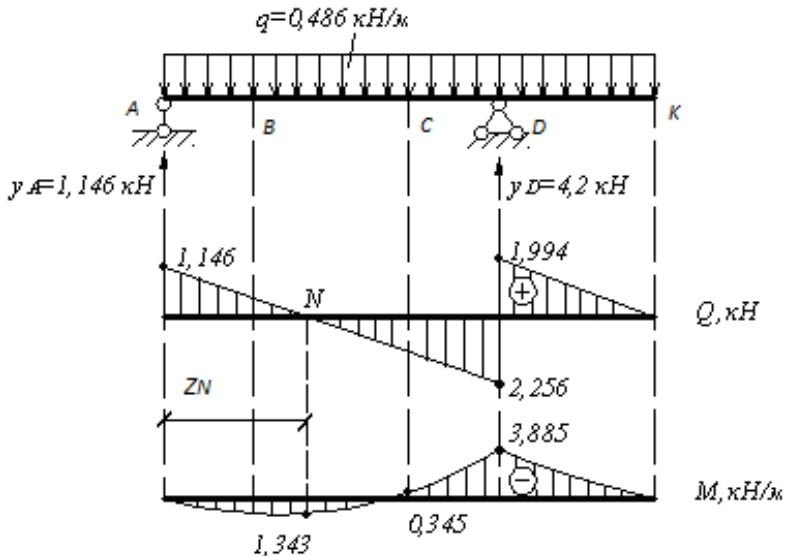


Рис. 4.16. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от собственного веса балки

Подберем сечение балки в виде двутавра, используя следующее условие прочности: $\sigma = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq R$, откуда требуемый момент сопротивления

$$W_X \geq \frac{M_{\max}}{R} = \frac{141,715 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,675 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 675 \text{ см}^3;$$

$M_{\max} = 141,715 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (согласно эпюре изгибающих моментов).

Пользуясь сортаментом (прил. 1), выбираем двутавр № 36:

$$W_X = 743 \text{ см}^3, \quad I_X = 13\,380 \text{ см}^4, \quad S_x^{\text{отс}} = 423 \text{ см}^3;$$

$$q = 486 \text{ Н/м (собственный вес балки);}$$

$$d = 7,5 \text{ мм}, \quad b = 145 \text{ мм}, \quad t = 12,3 \text{ мм}, \quad A = 61,9 \text{ см}^2.$$

Проверим прочность балки с учетом собственного веса.

Определим опорные реакции от действия собственного веса балки ($q = 0,486 \text{ кН/м}$).

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\Sigma M_A = -Y_D(a + b + c) + q \frac{(a + b + c + d)^2}{2} = 0;$$

$$-Y_D \cdot 7 + 0,486 \frac{11^2}{2} = 0, \quad Y_D = \frac{29,403}{7} = 4,200 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_D = 0;$$

$$\Sigma M_D = Y_A(a + b + c) - q \frac{(a + b + c)^2}{2} + q \frac{d^2}{2} = 0;$$

$$Y_A \cdot 7 - \frac{0,486 \cdot 7^2}{2} + \frac{0,486 \cdot 4^2}{2} = 0; \quad Y_A = \frac{8,019}{7} = 1,146 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = q(a + b + c + d) - Y_A - Y_D = 0,486 \cdot 11 - 4,2 - 1,146 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

$$Q_A = Y_A = 1,146 \text{ кН};$$

$$Q_{D(\text{левее})} = Y_A - q(a + b + c) = 1,146 - 0,486 \cdot 7 = -2,256 \text{ кН};$$

$$Q_{D(\text{правее})} = -2,256 + Y_D = -2,256 + 4,2 = 1,944 \text{ кН};$$

$$Q_K = 0.$$

$$M_A = 0.$$

$$M_D = Y_A(a + b + c) - \frac{q(a + b + c)^2}{2} = 1,146 \cdot 7 - \frac{0,486 \cdot 7^2}{2} = 3,885 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_K = 0.$$

$$Z_N = \frac{Q_A}{q} = \frac{1,146}{0,486} = 2,358 \text{ м};$$

$$M_N = Y_A Z_N - \frac{qZ_N^2}{2} = 1,146 \cdot 2,358 - \frac{0,486 \cdot 2,358^2}{2} = 1,351 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = Y_A(a + b) - \frac{q(a + b)^2}{2} = 1,146 \cdot 5 - \frac{0,486 \cdot 5^2}{2} = -0,345 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Усилия в балке с учетом собственного веса:

$$Q_{\max} = 42,867 + 2,256 = 45,123 \text{ кН};$$

$$M_{\max} = 141,715 - 0,345 = 141,370 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Прочность балки с учетом собственного веса:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} = \frac{141,370 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 190,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 190,2 \text{ МПа} < R;$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y,\max} S_x^{\text{отс}}}{bI_X} = \frac{45,123 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 19,02 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 19,02 \text{ МПа} < R_c, \text{ где } b = d.$$

Прочность балки с учетом собственного веса обеспечена.
В сечении D проведем исследование напряженного состояния:

$$M_D = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad Q_D = -42,857 \text{ кН}.$$

Проведем анализ сечения (рис. 4.17).

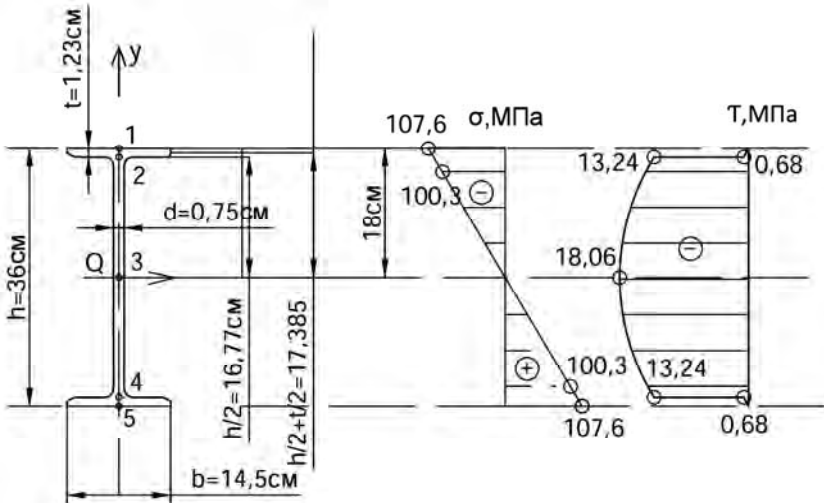


Рис. 4.17. Сечение балки. Эпюры нормальных и касательных напряжений

Нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y;$$

$$\sigma_1 = -\frac{M_D}{I_x} y_1 = -\frac{80 \cdot 10^3}{13380 \cdot 10^{-8}} \cdot 18 \cdot 10^{-2} = -107,6 \text{ МПа (сжатие);}$$

$$\sigma_2 = -\frac{M_D}{I_x} y_2 = -\frac{80 \cdot 10^3}{13380 \cdot 10^{-8}} \cdot 16,77 \cdot 10^{-2} = -100,3 \text{ МПа (сжатие);}$$

$$\sigma_3 = 0;$$

$$\sigma_4 = -\sigma_2 = 100,3 \text{ МПа (растяжение);}$$

$$\sigma_5 = -\sigma_1 = 107,6 \text{ МПа (растяжение).}$$

Касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b};$$

$$\tau_1 = 0;$$

$$\tau_2 = -\frac{42,857 \cdot 10^3 \cdot 310,06 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 14,5 \cdot 10^{-2}} = -0,68 \text{ МПа;}$$

$$\tau'_2 = -\frac{42,857 \cdot 10^3 \cdot 310,06 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-2}} = -13,24 \text{ МПа;}$$

$$S_x^{\text{отс}} \text{ (для точки 2)} = tb \left(\frac{h}{2} + \frac{t}{2} \right) = 14,5 \cdot 1,23 \cdot 17,385 = 310,06 \text{ см}^3;$$

$$\tau_3 = -\frac{42,857 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-2}} = -18,06 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \tau_4;$$

$$\tau'_2 = \tau'_4;$$

$$\tau_5 = 0.$$

Определим главные напряжения и положение главных осей в точке 2 сечения и проиллюстрируем (рис. 4.18, 4.19)

$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} = \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = -\frac{100,3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100,3}{2}\right)^2 + 13,24^2} = \\ &= -50,15 \pm 51,87, \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = -50,15 + 51,87 = 1,72 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -50,15 - 51,87 = -102,02 \text{ МПа};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1} = \frac{-13,24}{1,72} = -7,69, \quad \alpha_1 = -82,6^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau}{\sigma_2} = \frac{-13,24}{-102,02} = 0,13, \quad \alpha_2 = 7,4^\circ.$$

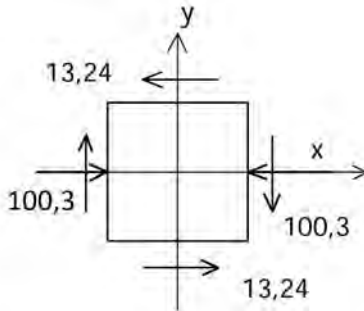


Рис. 4.18. Нормальные и касательные напряжения в точке 2

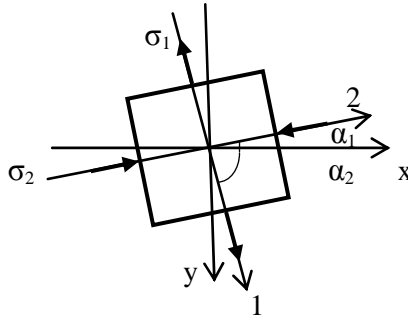


Рис. 4.19. Положение главных напряжений и главных осей

Проверим прочность балки по четвертой теории прочности:

$$\begin{aligned}\sigma_0^{\text{IV}} &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1,72^2 + (1,72 + 102,02)^2 + 102,02^2)} = 102,89 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Проверим прочность балки, используя третью теорию прочности:

$$\sigma_0^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 1,72 + 102,02 = 103,74 \text{ МПа.}$$

Построим упругую линию балки, используя метод начальных параметров. Обобщенное уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$EI_X \theta = EI_X \theta_0 + \sum m(z-a) + \sum \frac{F(z-b)^2}{2} + \sum \frac{q(z-c)^3}{6};$$

$$EI_X v = EI_X v_0 + EI_X \theta_0 z + \sum \frac{m(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24},$$

где a , b и c – координаты соответствующих нагрузок.

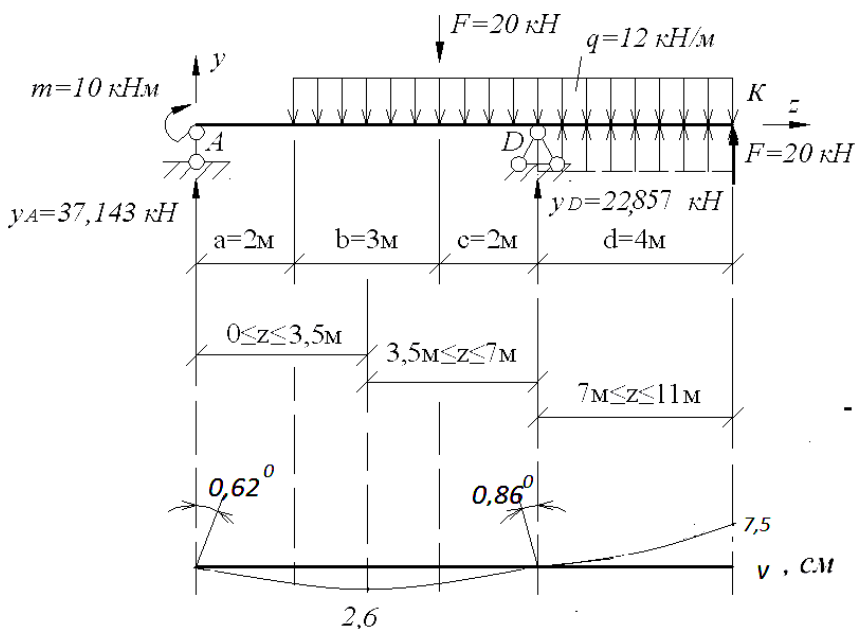


Рис. 4.20. Упругая линия балки

Для определения начальных параметров v_0 и θ_0 зададимся условием, что прогиб на опоре D равен 0. Запишем уравнение прогибов для сечения $Z = 7 \text{ м}$:

$$EI_X v_{(z=7\text{м})} = EI_X \theta_0 \cdot 7 + \frac{y_A (7-0)^3}{6} + \frac{m(7-0)^2}{2} -$$

$$- \frac{F(7-5)^3}{6} - \frac{q(7-2)^4}{24} = 0;$$

$$EI_X \theta_0 \cdot 7 + \frac{37,143(7-0)^3}{6} + \frac{10(7-0)^2}{2} - \frac{20(7-5)^3}{6} - \frac{12(7-2)^4}{24} = 0;$$

$$EI_X \theta_0 = -289,88.$$

Определим прогиб в середине пролета при $Z = 3,5$ м:

$$\begin{aligned} EI_X v_{(Z=3,5\text{ м})} &= EI_X \theta_0 \cdot 3,5 + \frac{Y_A(3,5-0)^3}{6} + \frac{m(3,5-0)^2}{2} - \frac{q(3,5-2)^4}{24} = \\ &= -289,88 \cdot 3,5 + \frac{37,143(3,5-0)^3}{6} + \frac{10(3,5-0)^2}{2} - \\ &\quad - \frac{12(3,5-2)^4}{24} = -690,44. \end{aligned}$$

$$v_{(Z=3,5\text{ м})} = -\frac{690,44 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0,026 \text{ м} = -2,6 \text{ см.}$$

Определим прогиб в конце пролета при $Z = 11$ м:

$$\begin{aligned} EI_X v_{(Z=11\text{ м})} &= EI_X \theta_0 \cdot 11 + \frac{Y_A(11-0)^3}{6} + \frac{m(11-0)^2}{2} - \frac{q(11-2)^4}{24} + \\ &\quad + \frac{q(11-7)^4}{24} - \frac{F(11-5)^3}{6} + \frac{y_D(11-7)^3}{6} = \\ &= -289,88 \cdot 11 + \frac{37,143(11-0)^3}{6} + \frac{10(11-0)^2}{2} - \frac{12(11-2)^4}{24} + \\ &\quad + \frac{12(11-7)^4}{24} - \frac{20(11-5)^3}{6} + \frac{22,857(11-7)^3}{6} = 2027,19. \end{aligned}$$

Так как распределенная нагрузка q действует не до конца балки, то продляем ее до точки K , приложив на участке DK q с обратным знаком

$$v_{(Z=11\text{ м})} = \frac{2027,19 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,075 \text{ м} = 7,5 \text{ см.}$$

Определим углы поворота на опорах:

$$\theta_{(Z=0)} = \frac{-289,88 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0,0108 \text{ рад.}$$

Переведем в градусы, умножив на $\frac{180}{\pi}$:

$$\theta_{(Z=0)} = \frac{-0,0108 \cdot 180}{3,14} = -0,62^\circ.$$

$$\begin{aligned} EI_X \theta_{(Z=7)} &= EI\theta_0 + m(7-0) + \frac{y_A(7-0)^2}{2} - \frac{F(7-5)^2}{2} - \frac{q(7-2)^3}{6} = \\ &= -289,88 + 10(7-0) + \frac{37,143(7-0)^2}{2} - \frac{20(7-5)^2}{2} - \\ &\quad - \frac{12(7-2)^3}{6} = 400,12. \end{aligned}$$

$$\theta_{(Z=7)} = \frac{400,12 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,015 \text{ рад};$$

$$\theta_{(Z=7)} = \frac{0,015 \cdot 180}{3,14} = 0,86^\circ.$$

Определим максимальный относительный прогиб в пролете балки:

$$\frac{v_{\max}}{l} = \frac{2,6}{700} = \frac{1}{269} < \frac{1}{200}.$$

Условие жесткости выполняется.

5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

5.1. Расчет балки с одной степенью статической неопределенности

Задача 8

Неразрезная балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетными сопротивлениями $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа.

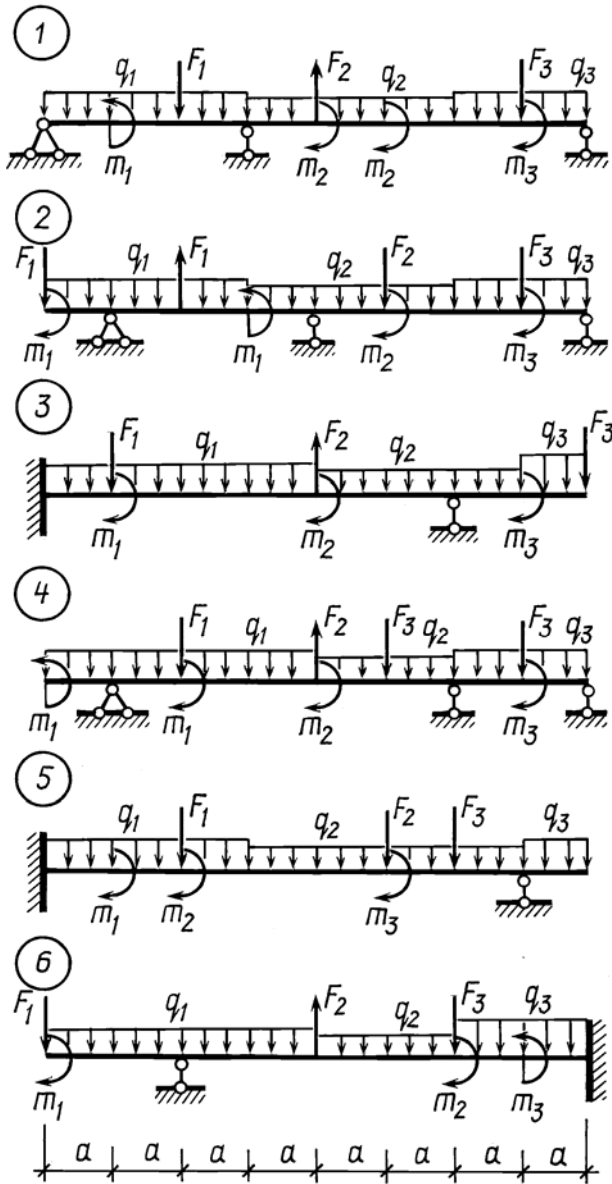
Требуется построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов; подобрать сечение из прокатного двутавра; определить прогибы на концах и посередине каждого пролета балки и показать очертание ее изогнутой оси (использовать любой из известных методов определения прогибов).

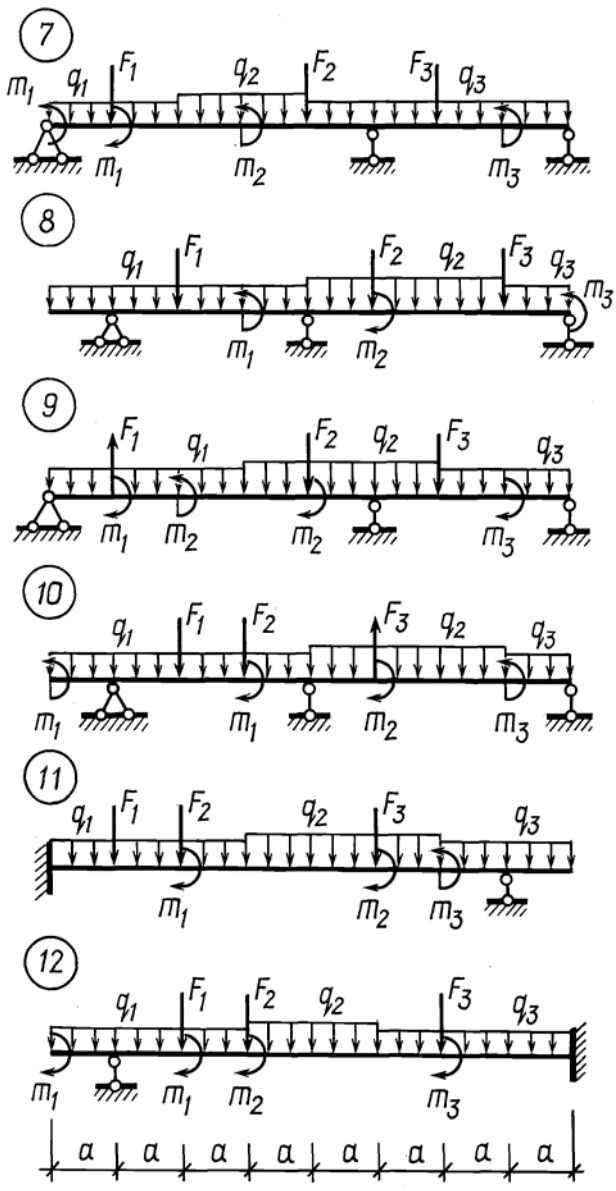
Исходные данные к задаче 8 представлены в табл. 5.1.

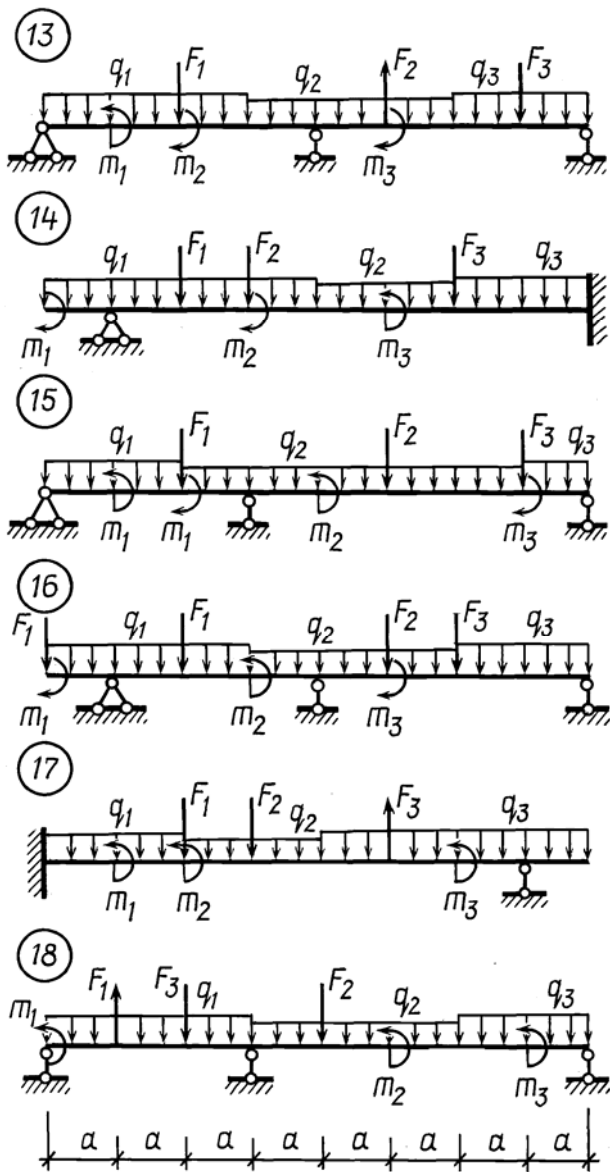
Таблица 5.1

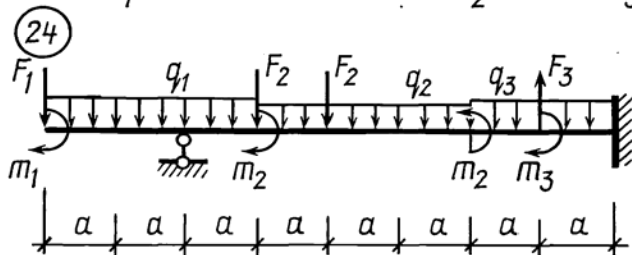
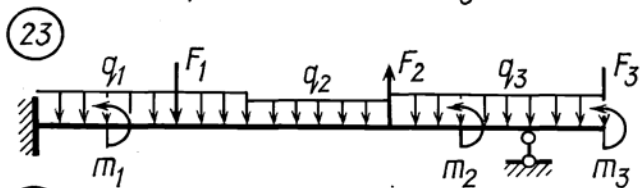
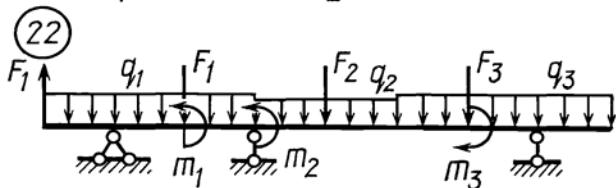
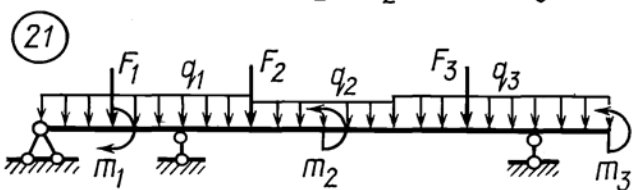
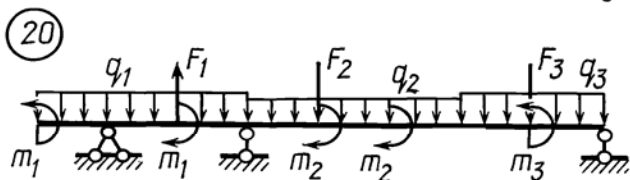
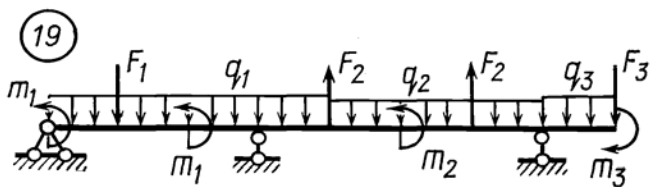
Исходные данные к задаче 8

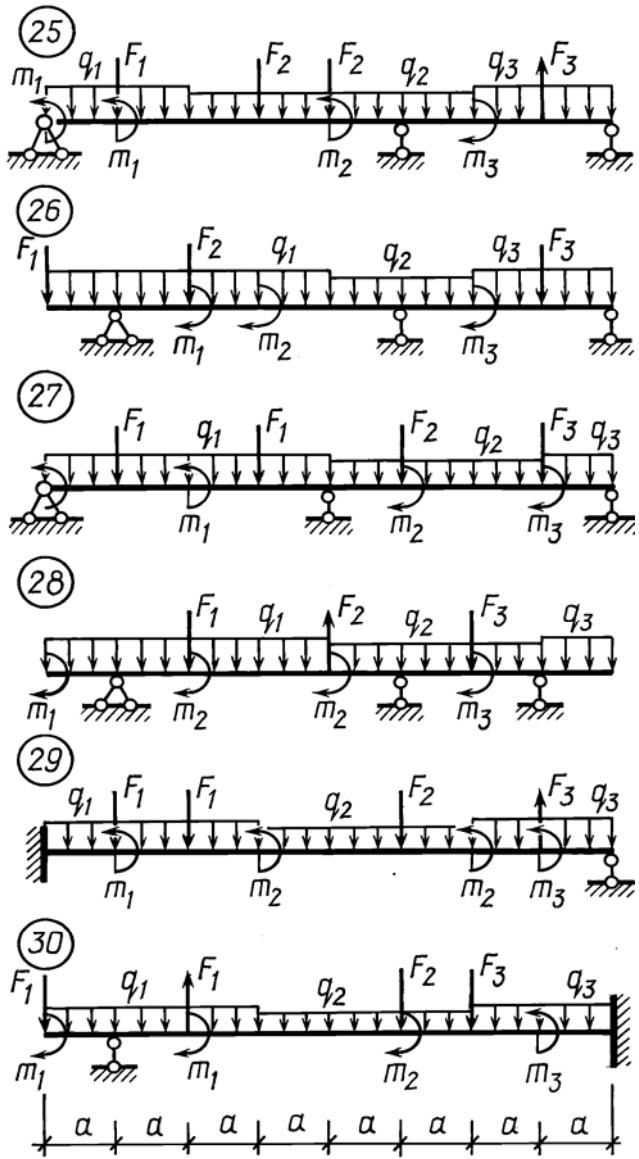
№ варианта	Размеры	Нагрузки			Индекс нагрузки		
	a	q	F	m	q	F	m
	м	кН/м	кН	кН·м			
1	1,0	10	30	26	1	2	3,1
2	1,4	12	48	28	2	3	1
3	1,2	22	16	26	3	2	1
4	1,8	16	40	34	1,3	3,2	2
5	1,6	24	30	28	2	1,2	3
6	2,0	18	42	34	1,2	2	3
7	1,2	16	28	26	3	1	1,2
8	1,0	24	40	36	2	3,1	2
9	1,6	16	48	40	3	1,2	3
10	1,4	20	36	28	1	3	2,1











Примеры решения задачи 8

Пример 1. Неразрезная балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетными сопротивлениями $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа, модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа, $F = 4$ кН, $q = 3$ кН/м, $a = 2$ м.

Требуется построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать сечение из прокатного двутавра, определить прогибы на концах и посередине каждого пролета балки и показать очертание ее изогнутой оси (использовать любой из известных методов определения прогибов).

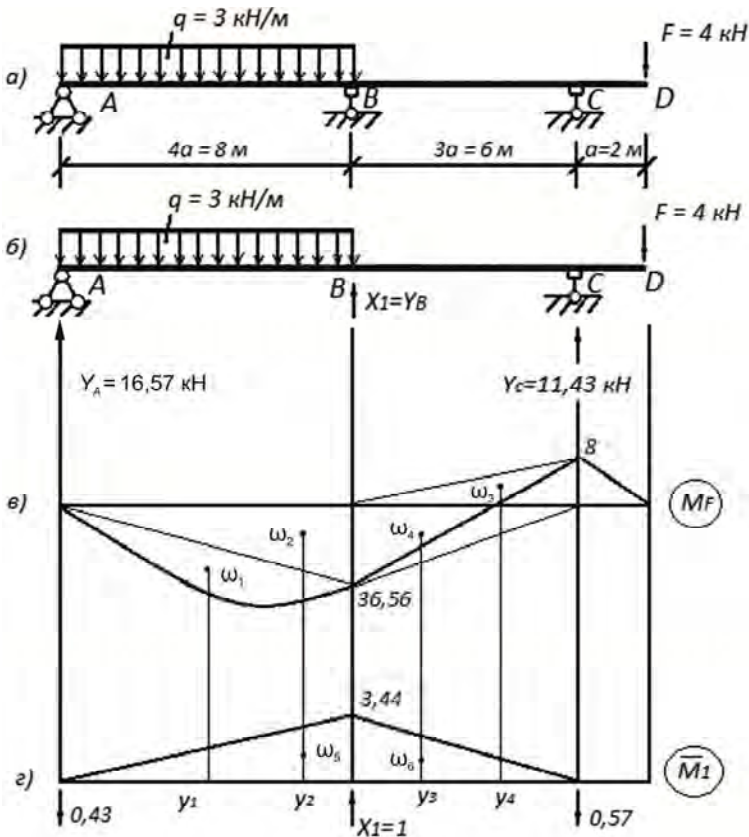


Рис. 5.1. Схема балки, основная система, грузовая и единичная эпюры

Решение

Данная схема имеет одну избыточную связь, то есть балка один раз статически неопределима. Для образования основной системы отбросим шарнирную опору B и приложим в этом сечении неизвестную силу $X_1 = Y_B$ (рис. 5.1, б).

Построим эпюру изгибающих моментов (M_F) в основной системе (рис. 5.1, в), определив опорные реакции:

$$\sum M_A = 0;$$

$$F \cdot 8a - Y_C \cdot 7a + q \cdot 4a2a = 0;$$

$$4 \cdot 16 - Y_C \cdot 14 + 3 \cdot 8 \cdot 4 = 0, \quad Y_C = 11,43 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$Y_A \cdot 7a - q \cdot 4a5a + Fa = 0;$$

$$Y_A \cdot 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 0, \quad Y_A = 16,57 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0;$$

$$Y_A + Y_C - F - q \cdot 4a = 0; \quad 16,57 + 11,43 - 4 - 3 \cdot 8 = 0.$$

$$M_A = 0;$$

$$M_B = Y_A \cdot 4a - q \cdot 4a2a = 16,57 \cdot 8 - 3 \cdot 8 \cdot 4 = 36,56 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_C = Y_A \cdot 7a - q \cdot 4a5a = 16,57 \cdot 14 - 3 \cdot 8 \cdot 10 = -8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Приложим в точке B вместо отброшенной связи силу $X_1 = 1$ и построим единичную эпюру (M_1) (рис. 5.1, г).

Определим повторно опорные реакции от единичной нагрузки:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-Y_C \cdot 7a - 1 \cdot 4a = 0, \quad -Y_C \cdot 14 - 8 = 0, \quad Y_C = 0,57 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$Y_A \cdot 7a + 1 \cdot 3a = 0, \quad Y_A \cdot 14 + 6 = 0, \quad Y_A = 0,43 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; \quad -0,57 - 0,43 + 1 = 0;$$

$$M_A = 0, \quad M_B = -0,43 \cdot 8 = -3,44 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_C = 0.$$

Запишем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Для определения коэффициента и грузовой составляющей уравнения перемножаем грузовую (M_F) и единичную (\overline{M}_1) эпюры с использованием правила Верещагина. Предварительно разделим грузовую эпюру на простые фрагменты (рис. 5.1, в).

Рассчитаем глубину параболы:

$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{3 \cdot 8^2}{8} = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Площадь параболы считаем по формуле $\omega = \frac{2}{3} fl$.

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} (\omega_5 y_2 + \omega_6 y_3) =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{3,44 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 + \frac{3,44 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 \right) = \frac{55,23}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \int_0^l \frac{M_F \overline{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} (-\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 + \omega_3 y_4 - \omega_4 y_3) =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,44 - \frac{36,56 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 - \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,44 - \right.$$

$$\left. - \frac{36,56 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 \right) = -\frac{779,55}{EI}.$$

Решаем каноническое уравнение и определяем величину момента X_1 :

$$\frac{55,23}{EI} X_1 - \frac{779,55}{EI} = 0, \quad X_1 = 14,11 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Выполняем расчет основной системы с учетом нагрузки и найденной силы X_1 (рис. 5.2).

Определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0;$$

$$F \cdot 8a - Y_C \cdot 7a + q \cdot 4a2a - Y_B \cdot 4a = 0;$$

$$4 \cdot 16 - Y_C \cdot 14 + 3 \cdot 8 \cdot 4 - 14,11 \cdot 8 = 0, \quad Y_C = 3,37 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$Y_A \cdot 7a - q \cdot 4a5a + Y_B \cdot 3a + Fa = 0;$$

$$Y_A \cdot 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 + 14,11 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 0, \quad Y_A = 10,52 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0;$$

$$Y_A + Y_C + Y_B - F - q \cdot 4a = 0;$$

$$10,52 + 3,37 + 14,11 - 3 \cdot 8 - 4 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.2, б и 5.2, в):

$$Q_A = 10,52 \text{ кН}, \quad Q_{B(n)} = 10,52 - 3 \cdot 8 = -13,48 \text{ кН};$$

$$Q_{B(n)} = -13,48 + 14,11 = 0,63 \text{ кН}, \quad Q_{C(n)} = 0,63 \text{ кН};$$

$$Q_{C(n)} = 0,63 + 3,37 = 4 \text{ кН};$$

$$M_A = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_B = 10,52 \cdot 8 - 3 \cdot 8 \cdot 4 = 11,48 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_C = 10,52 \cdot 14 - 3 \cdot 8 \cdot 10 + 14,11 \cdot 6 = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_D = 0;$$

$$Z_k = \frac{10,52}{3} = 3,5 \text{ м}, \quad M_k = 10,52 \cdot 3,5 - 3 \cdot 3,5 \cdot \frac{3,5}{3} = 18,45 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

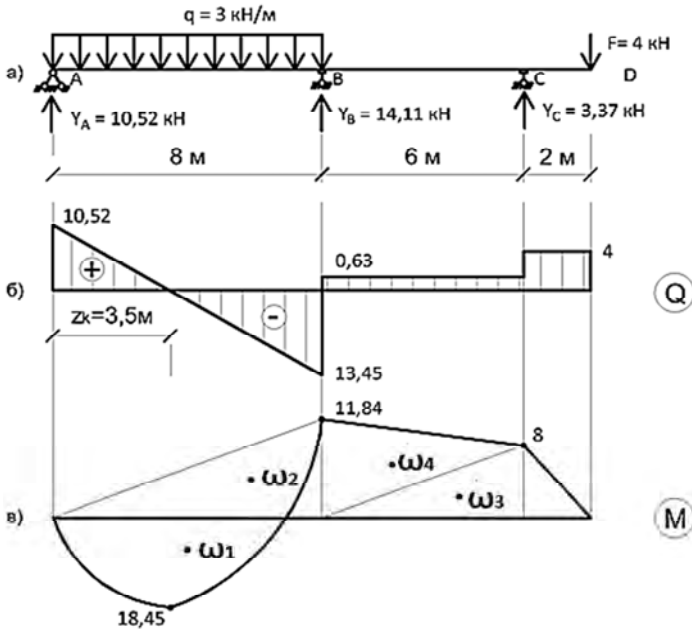


Рис. 5.2. Эпюра поперечных сил и изгибающих моментов в исходной схеме балки

Выполним кинематическую проверку правильности решения. Для этого перемножаем конечную эпюру M на единичную \bar{M}_1 .

$$\begin{aligned}
 v_B &= \frac{1}{EI} (-\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_4 + \omega_4 y_3) = \\
 &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,44 + \frac{11,84 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 + \frac{11,84 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,44 \right) = -\frac{2,5}{EI}.
 \end{aligned}$$

Ошибка: $\left| \frac{2,5}{220,16} \cdot 100 \right| = 1,1\% , \text{ что допустимо.}$

Прогиб в сечении B равен нулю, что соответствует условию ее деформации. Подберем сечение балки из условия:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R, \quad W_x = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{18,45 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 87,9 \text{ см}^3.$$

Из прил. 1 выбираем двутавр № 16 с $W_x = 109 \text{ см}^3$, $I_x = 873 \text{ см}^4$.

Определим прогибы в сечениях балки и построим упругую линию. Приложим единичные силы посреди пролетов и на конце балки, построим единичные эпюры изгибающих моментов на каждом из участков, рассматривая их отдельно (рис. 5.3).

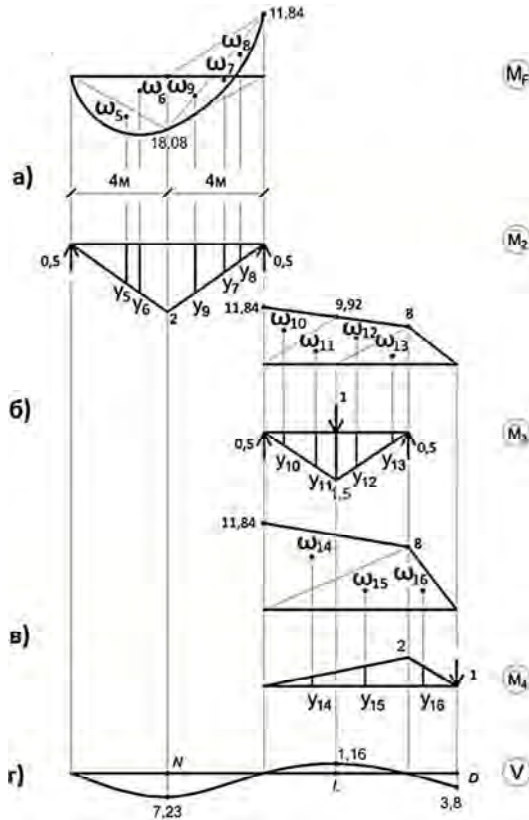


Рис. 5.3. Грузовые и единичные эпюры на участках AB , BC и BD .
Эпюра прогибов балки

Участок AB (рис. 5.3, a). Предварительно разделим грузовую эпюру на простые фрагменты. Определим значения изгибающего момента посередине пролета ($z = 4$ м):

$$M_{(z=4)} = Y_A \cdot 2a - q \cdot 2aa = 10,52 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 18,08 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассчитаем глубину параболы:

$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{3 \cdot 4}{8} = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Перемножим грузовую и единичную эпюры:

$$\begin{aligned} v_N &= \frac{1}{EI} (\omega_5 y_5 + \omega_6 y_6 + \omega_7 y_7 + \omega_9 y_9 - \omega_8 y_8) = \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{18,08 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{18,08 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{11,84 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{112,63}{EI}. \end{aligned}$$

Участок BC (рис. 5.3, b):

Определим изгибающий момент посередине пролета:

$$M_{(z=3)} = \frac{11,84 + 8}{2} = 9,92 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

(на участке AB эпюра изгибающих моментов линейная).

Перемножим грузовую и единичную эпюры:

$$\begin{aligned} v_L &= \frac{1}{EI} (-\omega_{10} y_{10} - \omega_{11} y_{11} - \omega_{12} y_{12} - \omega_{13} y_{13}) = \\ &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{11,84 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 + \frac{9,92 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{9,92 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) = -\frac{20,32}{EI}. \end{aligned}$$

Знак «минус» показывает, что направление прогиба обратно действию единичной силы.

Участок CD (рис. 5.3, в). Приложим единичную силу в точке D и построим единичную эпюру моментов. Перемножим грузовую и единичную эпюры:

$$v_D = \frac{1}{EI} (\omega_{14} y_{14} + \omega_{15} y_{15} + \omega_{16} y_{16}) =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{11,84 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{8 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{66,34}{EI}.$$

Построим эпюру прогибов балки (рис. 5.3, з):

$$v_N = \frac{112,63 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 7,23 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,23 \text{ мм};$$

$$v_L = -\frac{20,32 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = -1,16 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -1,16 \text{ мм};$$

$$v_D = \frac{66,34 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,8 \text{ мм}.$$

Пример 2. Балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа, модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа, $q = 12$ кН/м, $m = 6$ кН·м, $a = 1$ м.

Требуется построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать сечение из прокатного двутавра, определить прогибы на концах и посередине каждого пролета балки и показать очертание ее изогнутой оси (использовать любой из известных методов определения прогибов).

Решение

Данная схема имеет одну избыточную связь, то есть балка один раз статически неопределима (рис. 5.4, а). Для образования основной системы левую опору заменим на шарнирную и приложим неизвестный момент $X_1 = M_A$ (рис. 5.4, б).

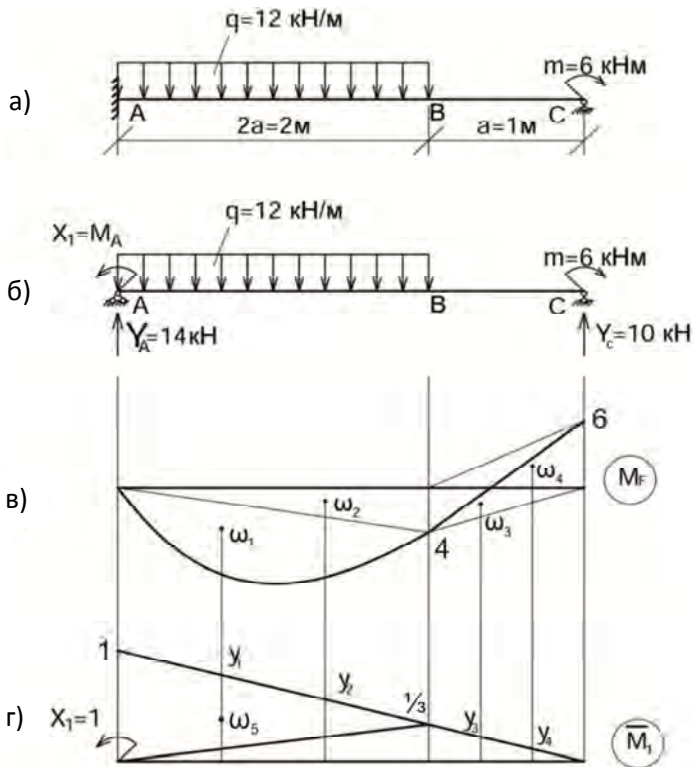


Рис. 5.4. Схема балки, основная система, грузовая и единичная эпюры

Построим эпюру изгибающих моментов (M_F) в основной системе (рис. 5.4, б), определив опорные реакции:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-Y_C \cdot 3a + m + q \cdot 2aa = 0;$$

$$-Y_C \cdot 3 + 6 + 12 \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad Y_C = 10 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$Y_A \cdot 3a + m - q \cdot 2a2a = 0;$$

$$Y_A \cdot 3 + 6 - 12 \cdot 2 \cdot 2 = 0; \quad Y_A = 14 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0;$$

$$Y_A + Y_C - q \cdot 2a = 0, 10 + 14 - 12 \cdot 2 = 0.$$

$$M_A = 0;$$

$$M_B = Y_A \cdot 2a - q \cdot 2aa = 14 \cdot 2 - 12 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_C = Y_A \cdot 3a - q \cdot 2a2a = 14 \cdot 3 - 12 \cdot 2 \cdot 2 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В точке A приложим единичный момент $X_1 = 1$ и построим единичную эпюру (\bar{M}_1) (рис. 5.4, z).

Запишем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Для определения коэффициента и грузовой составляющей уравнения перемножаем грузовую (M_F) и единичную (\bar{M}_1) эпюры с использованием правила Верещагина. Рассчитаем глубину параболы:

$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{12 \cdot 2^2}{8} = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} (\omega_5 y_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \int_0^l \frac{M_F \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} (-\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 - \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4) = \\ &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) - \frac{4 \cdot 2}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) - \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{7,67}{EI}. \end{aligned}$$

Решаем каноническое уравнение и определяем величину момента X_1 :

$$\frac{1}{EI} X_1 - \frac{7,67}{EI} = 0, \quad X_1 = 7,67 \text{ кНм.}$$

Выполняем расчет основной системы с учетом нагрузки и найденного момента $X_1 = M_A$ (рис. 5.5).

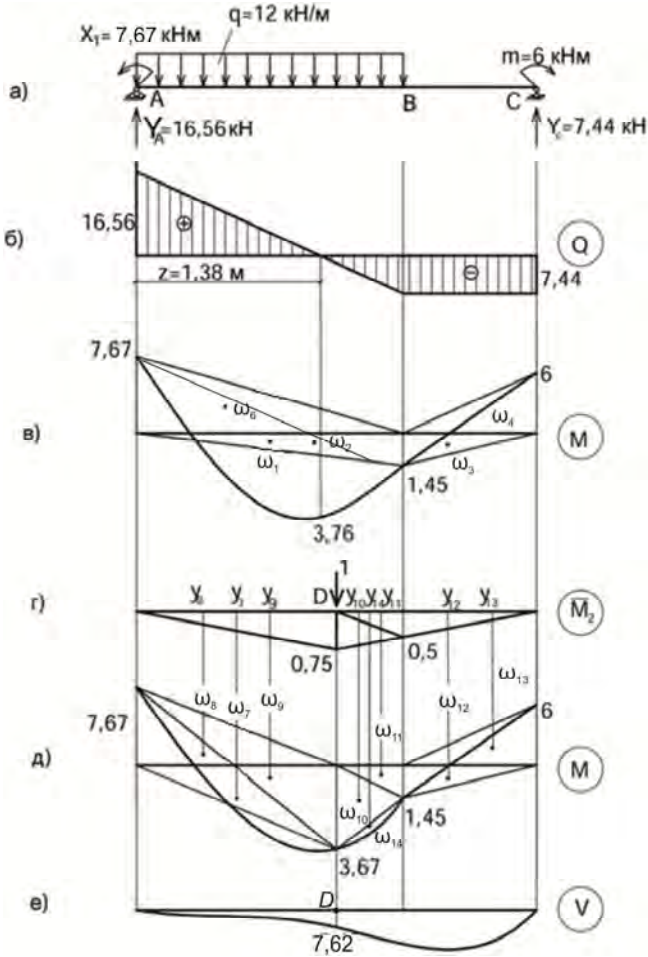


Рис. 5.5. Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, единичная эпюра моментов.
Эпюра прогибов балки

Определим повторно опорные реакции:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-Y_C \cdot 3a + m + q \cdot 2aa - M_A = 0;$$

$$-Y_C \cdot 3 + 6 + 12 \cdot 2 \cdot 1 - 7,67 = 0, \quad Y_C = 7,44 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$Y_A \cdot 3a + m - q \cdot 2a2a - M_A = 0;$$

$$Y_A \cdot 3 + 6 - 12 \cdot 2 \cdot 2 - 7,67 = 0, \quad Y_A = 16,56 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0;$$

$$Y_A + Y_C - 12 \cdot 2a = 0, \quad 7,44 + 16,56 - 12 \cdot 2 = 0;$$

$$Q_A = 16,56 \text{ кН}, \quad Q_B = 16,56 - 12 \cdot 2 = -7,44 \text{ кН}, \quad Q_C = -7,44 \text{ кН};$$

$$M_A = -7,67 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_C = -7,67 - 12 \cdot 2 \cdot 1 + 16,56 \cdot 2 = 1,45 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Z_K = \frac{16,56}{12} = 1,38 \text{ м};$$

$$M_B = 16,56 \cdot 1,38 - 7,67 - 12 \cdot 1,38 \cdot \frac{1,38}{2} = 3,76 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Выполним кинематическую проверку правильности решения. Для этого умножаем конечную эпюру M_F на единичную \bar{M}_1

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{1}{EI} (-\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 + \omega_6 y_6 + \omega_4 y_4 - \omega_3 y_3) = \\ &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) - \frac{1,45 \cdot 2}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{7,67 \cdot 2}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1,45}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{0,03}{EI}. \end{aligned}$$

$$\text{Ошибка: } \left| \frac{0,03}{6,29} \cdot 100 \right| = 0,5 \%, \text{ что допустимо.}$$

Прогиб в сечении A равен нулю, что соответствует условию ее деформации.

Подберем сечение балки из условия

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R, \quad W_x = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{7,67 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 36,5 \text{ см}^3.$$

Из прил. 1 выбираем двутавр № 10 с $W_x = 39,7 \text{ см}^3$, $I_x = 198 \text{ см}^4$.

Определим прогиб посередине пролета, приложив там единичную силу, и построим единичную эпюру изгибающих моментов (рис. 5.5, ε). Эпюру изгибающих моментов разделим для перемножения иначе (рис. 5.5, δ). Дополнительно определим значение изгибающего момента в точке D :

$$M_D = 16,56 \cdot 1,5 - 7,67 - 12 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 3,67 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\begin{aligned} v_D &= \frac{1}{EI} (\omega_7 y_7 - \omega_8 y_8 + \omega_9 y_9 + \omega_{10} y_{10} + \omega_{11} y_{11} + \\ &+ \omega_{12} y_{12} - \omega_{13} y_{13} + \omega_{14} y_{14}) = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 - \right. \\ &- \frac{7,67 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,75 + \frac{3,67 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{3,67 \cdot 0,5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \\ &+ \frac{1,45 \cdot 0,5}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 0,75 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + \frac{1,45 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 + \\ &\left. + \frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 0,5^2}{8} \cdot 0,5 \left(0,25 + \frac{0,75}{2} \right) \right) = \frac{3,02}{EI}. \end{aligned}$$

Построим упругую линию балки (рис. 5.5, e), определив прогиб в точке D :

$$v_D = \frac{3,02 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 7,62 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,62 \text{ мм}.$$

5.2. Расчет балки с двумя степенями статической неопределимости

Задача 9

Многопролетная (неразрезная) балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетными сопротивлениями $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа.

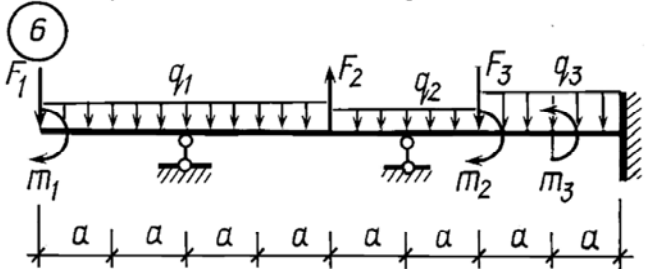
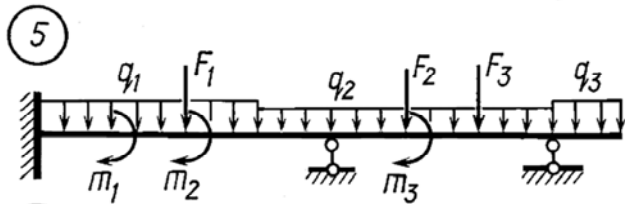
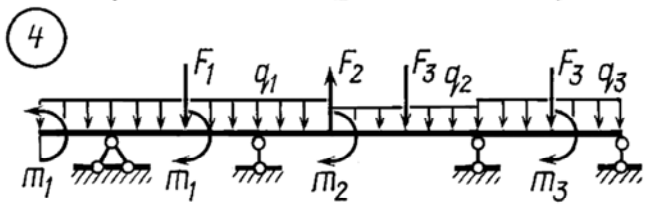
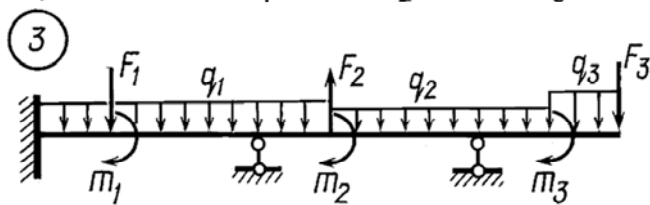
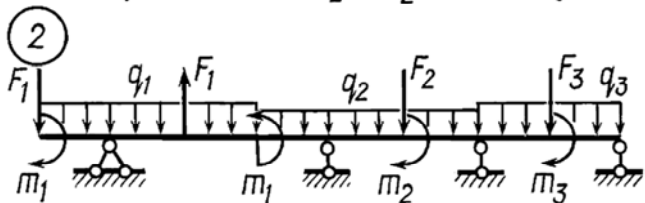
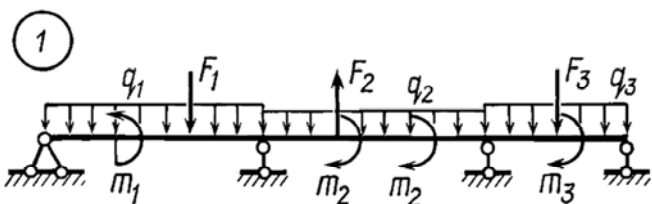
Требуется построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать сечение из прокатного двутавра, определить прогибы на концах и посередине каждого пролета балки и показать очертание ее изогнутой оси (использовать любой из известных методов определения прогибов).

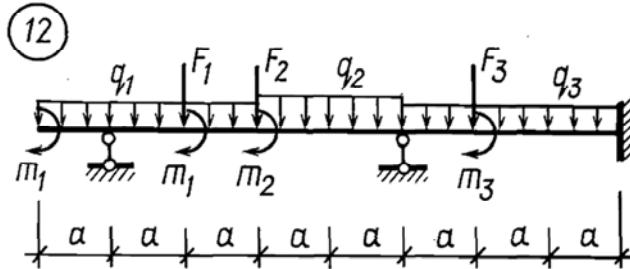
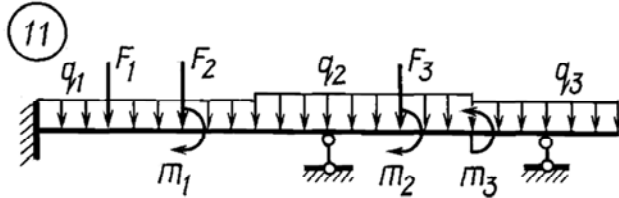
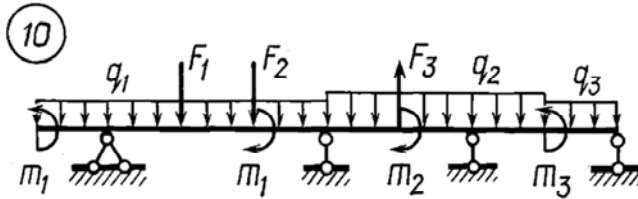
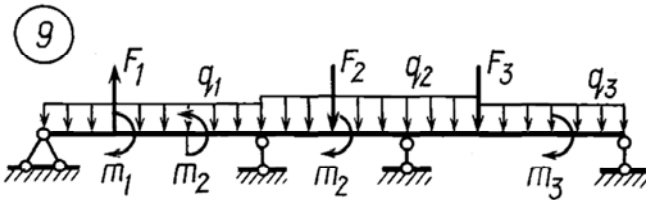
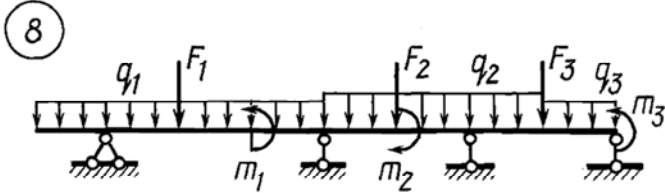
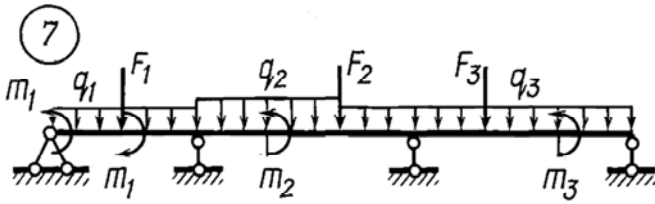
Исходные данные к задаче 9 приведены в табл. 5.2.

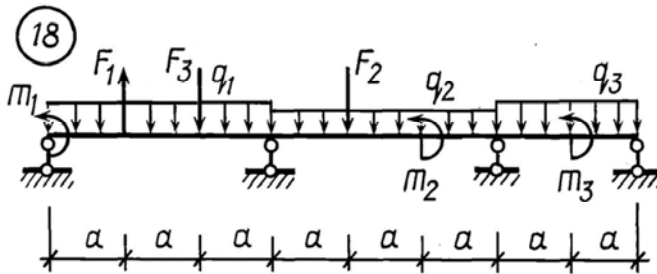
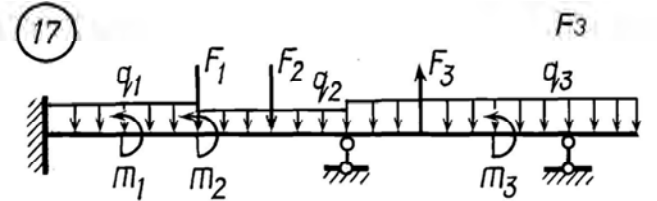
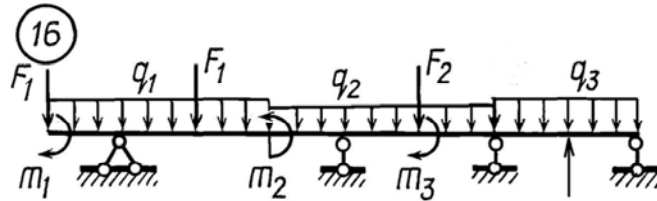
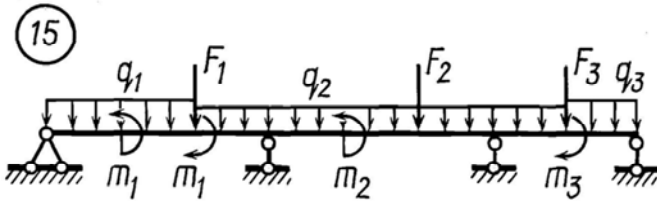
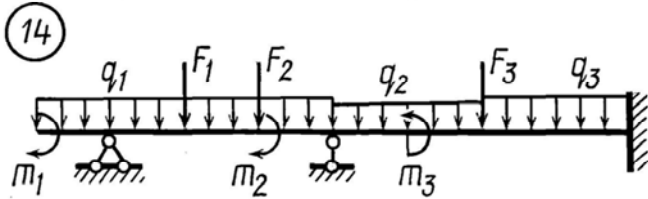
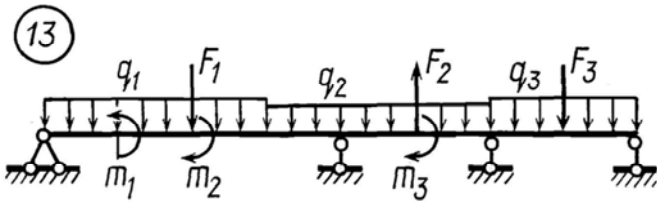
Таблица 5.2

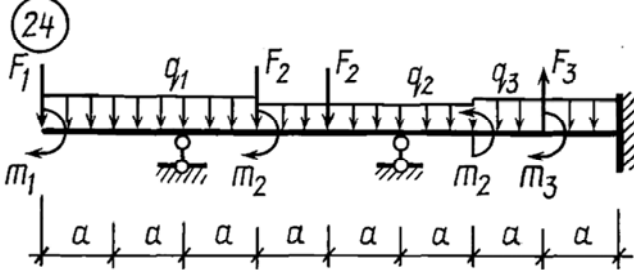
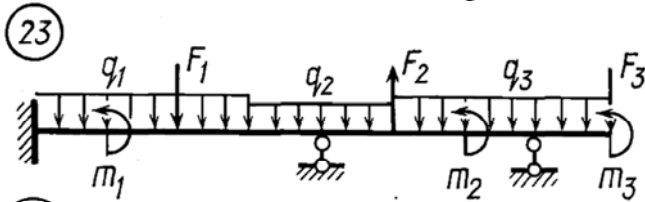
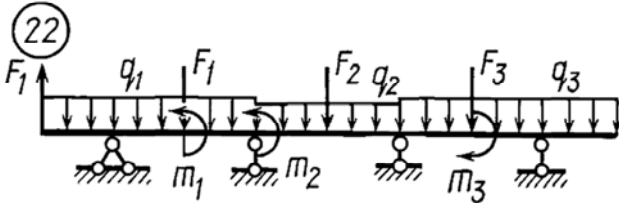
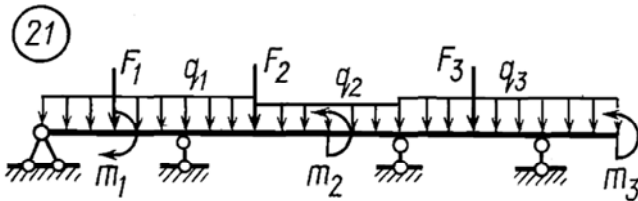
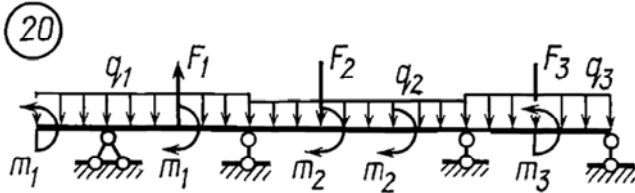
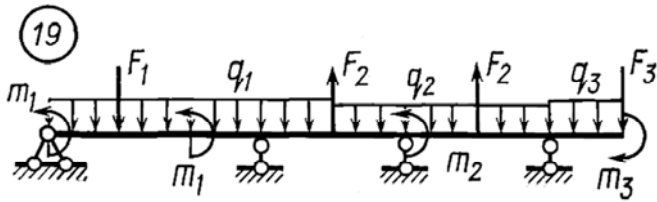
Исходные данные к задаче 9

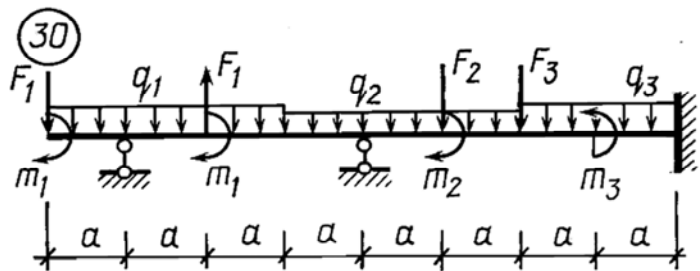
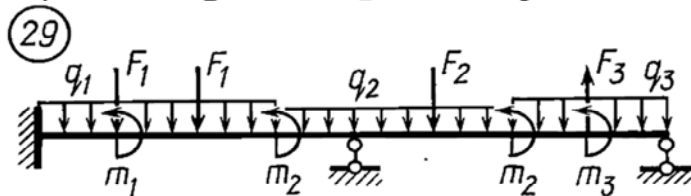
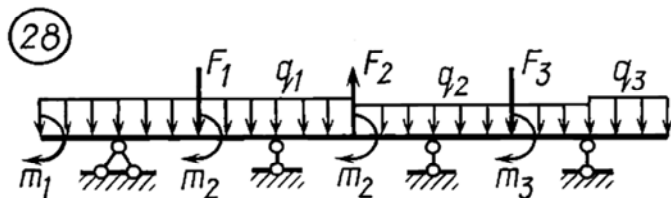
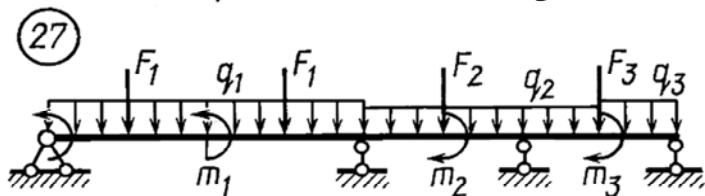
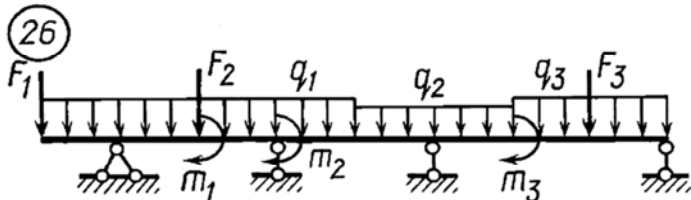
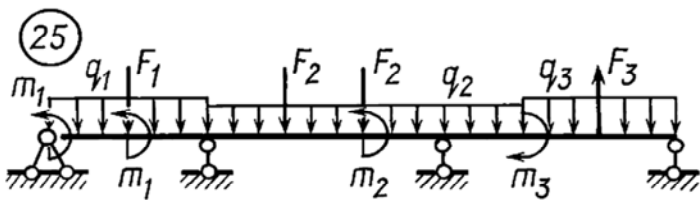
№ вари- анта	Размеры	Нагрузки			Индекс нагрузки		
	a	q	F	m	q	F	m
	м	кН/м	кН	кН·м			
1	1,0	10	30	24	1,3	2	3,1
2	1,4	12	40	28	2	3	1
3	1,2	22	18	26	3	2	1
4	1,8	16	40	34	1	3	1,2
5	1,6	24	32	28	2,3	1,2	3
6	2,0	18	42	34	1,2	2	3
7	1,2	16	28	24	3	1	1,2
8	1,0	24	40	36	2	3,1	2,3
9	1,6	16	48	40	3	1,2	3
10	1,4	20	30	28	1,2	3	2,1











Примеры решения задачи 9

Пример 1. Многопролетная (неразрезная) балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетными сопротивлениями $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа, модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа, $m = 12$ кН·м, $q = 8$ кН/м, $F = 10$ кН, $a = 1$ м.

Требуется построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать сечение из прокатного двутавра, определить прогибы на концах и посередине каждого пролета балки и показать очертание ее изогнутой оси (использовать любой из известных методов определения прогибов).

Решение

При расчете неразрезных балок удобно в качестве основной принимать систему, получаемую из заданной врезанием на промежуточных опорах шарниров. При таком выборе основной системы неразрезная балка распадается на отдельные однопролетные балки, имеющие по одной общей опоре. Лишними неизвестными являются изгибающие моменты в опорах сечения, которые определяются из условий отсутствия взаимных углов поворота сечений над шарнирами. Эпюры моментов от заданных нагрузок и опорных единичных моментов в каждом пролете строятся, как для свободной двухопорной балки.

Находим степень статистической неопределимости системы. Балка имеет две избыточные связи. В качестве основной принимаем систему с врезанными на опорах C и D шарнирами (рис. 5.6).

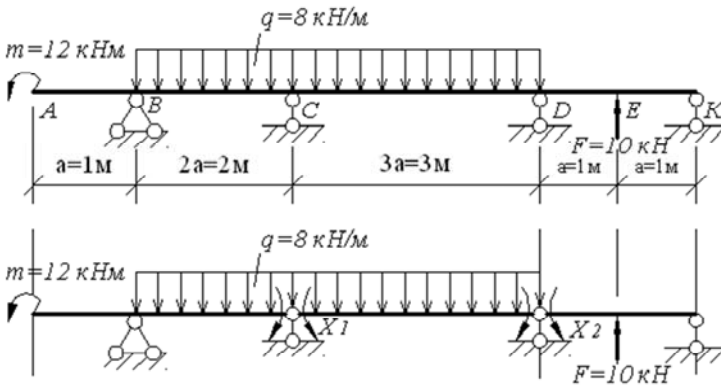


Рис. 5.6. Схема неразрезной балки. Основная система

Строим эпюры изгибающих моментов от заданных нагрузок для каждого из участков балки (рис. 5.7).

Участок AC :

$$\sum M_B = 0;$$

$$-Y_C \cdot 2a + q \cdot 2aa - m = 0,$$

$$-Y_C \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 1 - 12 = 0, \quad Y_C = \frac{4}{2} = 2 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$Y_B \cdot 2a - q \cdot 2aa - m = 0,$$

$$Y_B \cdot 2 - 8 \cdot 2 \cdot 1 - 12 = 0, \quad Y_B = \frac{28}{2} = 14 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 14 + 2 - 8 \cdot 2 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 5.7):

$$M_A = -12 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_B = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_C = 0.$$

Участок CD :

$$Y_C = Y_D = \frac{q \cdot 3a}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ кН.}$$

Строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 5.7):

$$M_C = M_D = 0.$$

Определим момент посередине пролета ($z_2 = 1,5 \text{ м}$):

$$M_{z_2} = \frac{q(3a)^2}{8} = \frac{8 \cdot 3^2}{8} = 9 \text{ кН}\cdot\text{м} = f_2.$$

Участок DK :

$$Y_D = Y_K = \frac{F}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кН.}$$

Строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 5.7):

$$M_D = M_K = 0,$$

$$M_E = -Y_D a = -5 \cdot 1 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

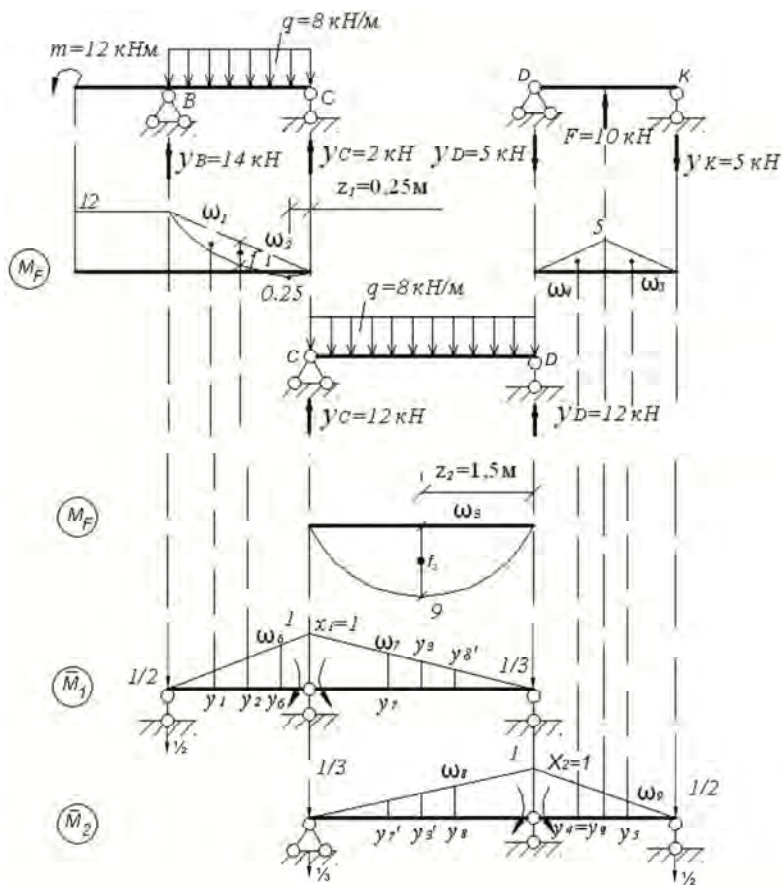


Рис. 5.7. Грузовые и единичные эпюры, построенные в основной системе

Построим единичные эпюры от опорных единичных моментов (см. рис. 5.2):

$$X_1 = X_2 = 1.$$

Канонические уравнения метода сил будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Вычислим площади грузовых и единичных эпюр:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, & f_1 &= \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 2^2}{8} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ \omega_2 &= \frac{2}{3} f_1 l = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = 5,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, & \omega_3 &= \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \\ \omega_4 &= \omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \\ \omega_6 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \text{ м}, & \omega_7 &= \omega_8 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1,5 \text{ м}; \\ \omega_9 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$

Определим значение ординат единичных эпюр, расположенных под центрами тяжести соответствующих им грузовых эпюр:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}, & y_2 &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, & y_3 &= y_3' = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, & y_4 &= y_9 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}; \\ y_5 &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}, & y_6 &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, & y_7 &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, & y_7' &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}; \\ y_8 &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, & y_8' &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Применяя правило Верещагина, определим коэффициенты канонического уравнения метода сил:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_X} (\omega_6 y_6 + \omega_7 y_7) = \frac{1}{EI_X} \left(1 \cdot \frac{2}{3} + 1,5 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1,67}{EI_X};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_X} (\omega_7 y_7') = \frac{1}{EI_X} \left(1,5 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{0,5}{EI_X};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_X} (\omega_8 y_8 + \omega_9 y_9) = \frac{1}{EI_X} \left(1,5 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1,67}{EI_X};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_X} (\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 - \omega_3 y_3) = \frac{1}{EI_X} \left(12 \cdot \frac{1}{3} - 5,33 \cdot \frac{1}{2} - 18 \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{7,66}{EI_X};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI_X} (-\omega_3 y_3' + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5) = \frac{1}{EI_X} \left(-18 \cdot \frac{1}{2} + 2,5 \cdot \frac{2}{3} + 2,5 \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{6,5}{EI_X}.$$

Если грузовая и единичная эпюры имеют разные знаки, то перед произведением площади эпюры на ординату ставится знак «минус».

Решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1,67}{EI_X} X_1 + \frac{0,5}{EI_X} X_2 - \frac{7,66}{EI_X} = 0; \\ \frac{0,5}{EI_X} X_1 + \frac{1,67}{EI_X} X_2 - \frac{6,5}{EI_X} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,67 X_1 + 0,5 X_2 - 7,66 = 0; \\ 0,5 X_1 + 1,67 X_2 - 6,5 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = 3,76 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad X_2 = 2,77 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для построения эпюры поперечных сил определим реакции опор. Рассмотрим равновесие всех пролетов отдельно, прикладывая к ним, кроме заданной нагрузки, найденные опорные моменты (рис. 5.8).

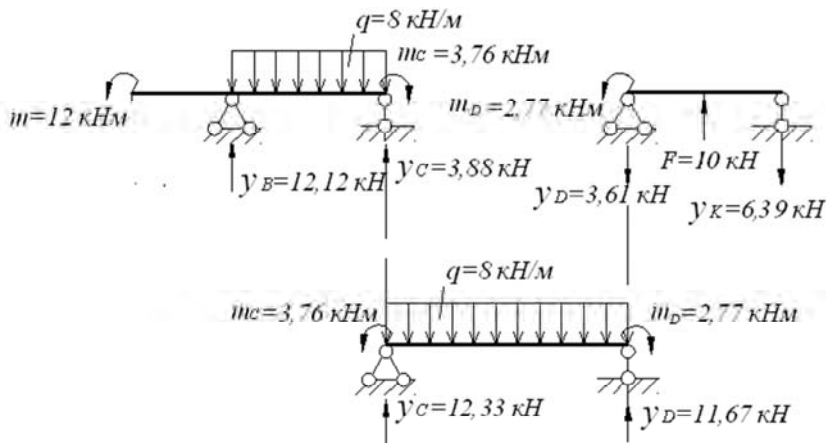


Рис. 5.8. Схема элементов балки с рассчитанными неизвестными моментами

Участок AC:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0; \\ -Y_C \cdot 2a - m + q \cdot 2aa + m_C &= 0; \\ -Y_C \cdot 2 - 12 + 8 \cdot 2 \cdot 1 + 3,76 &= 0, \quad Y_C = \frac{7,76}{2} = 3,88 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0; \\ Y_B \cdot 2a - m - q \cdot 2aa + m_C &= 0; \\ Y_B \cdot 2 - 12 - 8 \cdot 2 \cdot 1 + 3,76 &= 0, Y_B = \frac{24,24}{2} = 12,12 \text{ кН}. \\ \sum Y &= 3,88 + 12,12 - 8 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Участок CD :

$$\sum M_C = 0;$$

$$-Y_D \cdot 3a + q \cdot 3a \cdot 1,5a + m_D - m_C = 0;$$

$$-Y_D \cdot 3 + 8 \cdot 3 \cdot 1,5 - 3,76 + 2,77 = 0, \quad Y_D = \frac{35,01}{3} = 11,67 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = 0;$$

$$Y_C \cdot 3a - m_C - q \cdot 3a \cdot 1,5a + m_D = 0;$$

$$Y_C \cdot 3 - 3,76 - 8 \cdot 3 \cdot 1,5 + 2,77 = 0, \quad Y_C = \frac{36,99}{3} = 12,33 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 11,67 + 12,33 - 8 \cdot 3 = 0.$$

Участок DK :

$$\sum M_D = 0;$$

$$Y_K \cdot 2a - Fa - m_D = 0;$$

$$Y_K \cdot 2 - 10 \cdot 1 - 2,77 = 0, \quad Y_K = \frac{12,77}{2} = 6,39 \text{ кН.}$$

$$\sum M_K = 0;$$

$$-Y_D \cdot 2a + Fa - m_D = 0;$$

$$-Y_D \cdot 2 + 10 \cdot 1 - 2,77 = 0, \quad Y_D = \frac{7,23}{2} = 3,61 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 6,39 + 3,61 - 10 = 0.$$

Заменяя опоры реакциями, строим эпюру поперечных сил. На опорах C и D суммируем реакции (рис. 5.9).

$$Q_B = 12,12 \text{ кН;}$$

$$Q_C (\text{левее}) = 12,12 - 8 \cdot 2 = -3,88 \text{ кН;}$$

$$Q_C (\text{правее}) = -3,88 + 16,21 = 12,33 \text{ кН;}$$

$$Q_D (\text{левее}) = 12,33 - 8 \cdot 3 = -11,67 \text{ кН;}$$

$$Q_D (\text{правее}) = -11,67 + 8,06 = -3,61 \text{ кН;}$$

$$Q_E (\text{левее}) = -3,61 + 10 = 6,39 \text{ кН.}$$

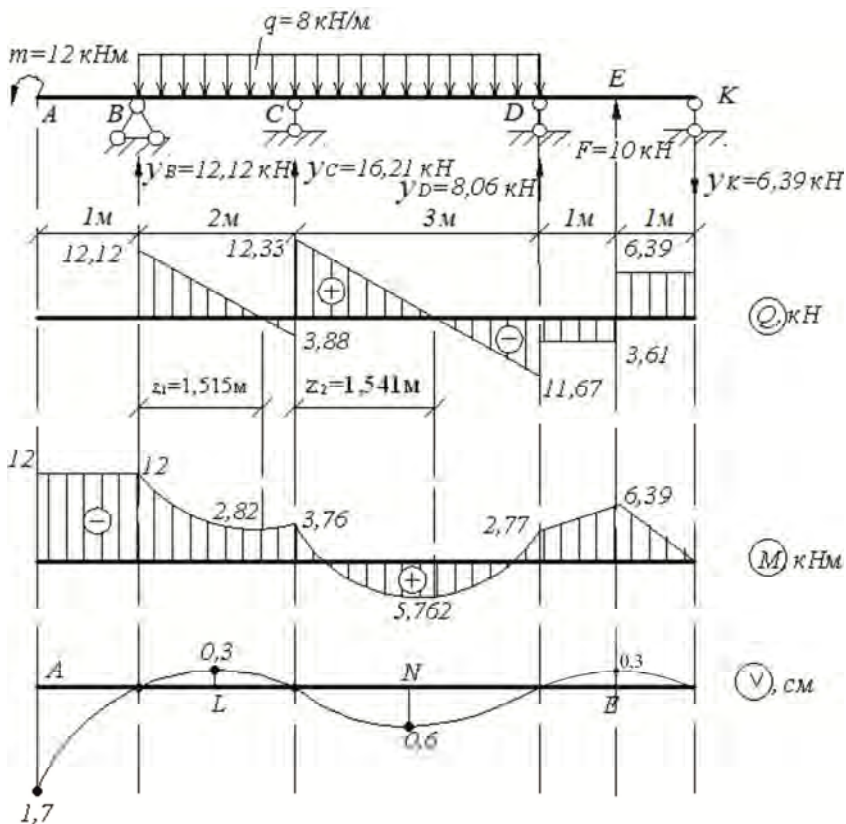


Рис. 5.9. Схема балки. Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов прогибов балки

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 5.9):

$$M_A = -12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = -12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = -12 + 12,12 \cdot 2 - 8 \cdot 2 \cdot 1 = -3,76 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = -12 + 12,12 \cdot 5 - 8 \cdot 5 \cdot 2,5 + 16,21 \cdot 3 = -2,77 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = -12 + 12,12 \cdot 6 - 8 \cdot 5 \cdot 3,5 + 8,06 \cdot 1 + 16,21 \cdot 4 = -6,39 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_K = -12 + 12,12 \cdot 7 - 8 \cdot 5 \cdot 4,5 + 8,06 \cdot 2 + 10 + 16,21 \cdot 5 = 0.$$

Определим значение изгибающих моментов в сечениях z_1 и z_2 :

$$z_1 = \frac{Q_B}{q} = \frac{12,12}{8} = 1,515 \text{ м};$$

$$M_{z_1} = -12 + 12,12 \cdot 1,515 - \frac{8 \cdot 1,515^2}{2} = -2,82 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$z_2 = \frac{Q_C}{q} = \frac{12,33}{8} = 1,541 \text{ м};$$

$$M_{z_2} = -12 + 12,12 \cdot 3,541 - 8 \cdot \frac{3,541^2}{2} + 16,21 \cdot 1,541 = 5,762 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверим правильность расчетов. Перемножаем окончательную эпюру изгибающих моментов на единичные (рис. 5.10).

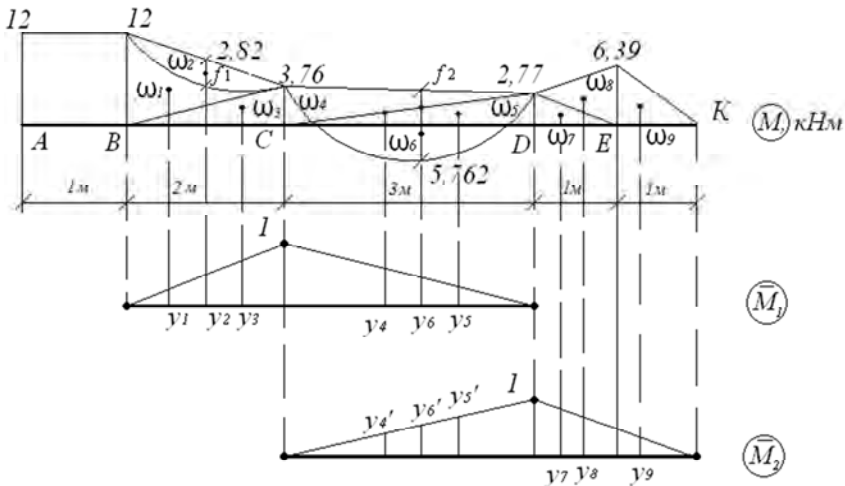


Рис. 5.10. Эпюра изгибающих моментов и единичные эпюры

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad f_1 = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 2^2}{8} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = 5,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 3,76 \cdot 2 = 3,76 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 3,76 \cdot 3 = 5,64 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 2,77 \cdot 3 = 4,155 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$f_2 = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 3^2}{8} = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad \omega_6 = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_7 = \frac{1}{2} \cdot 2,77 \cdot 1 = 1,385 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \omega_8 = \omega_9 = \frac{1}{2} \cdot 6,38 \cdot 1 = 3,19 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$y_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}; \quad y_2 = \frac{1}{2}; \quad y_3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}; \quad y_4 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}; \quad y_5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3};$$

$$y_6 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}; \quad y_4^1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}; \quad y_5^1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}; \quad y_6^1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$y_7 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{5}{6}; \quad y_8 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}; \quad y_9 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EI_X} (\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 - \omega_6 y_6) = \\ &= \frac{1}{EI_X} \left(12 \cdot \frac{1}{3} + 3,76 \cdot \frac{2}{3} - 5,33 \cdot \frac{1}{2} + 5,64 \cdot \frac{2}{3} + 4,155 \cdot \frac{1}{3} - 18 \cdot \frac{1}{2} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \frac{1}{EI_X} (\omega_4 y_4^1 + \omega_5 y_5^1 - \omega_6 y_6^1 + \omega_7 y_7 + \omega_8 y_8 + \omega_9 y_9) = \\ &= \frac{1}{EI_X} \left(5,64 \cdot \frac{1}{3} + 4,155 \cdot \frac{2}{3} - 18 \cdot \frac{1}{2} + 1,385 \cdot \frac{5}{6} + 3,19 \cdot \frac{2}{3} + 3,19 \cdot \frac{1}{3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Подберем сечение в виде двутавра $\sigma = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq R$

$$W_X = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{12 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,057 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 57 \text{ см}^3.$$

Используя сортамент (прил. 1), выбираем двутавр № 12, $W_x = 58,4 \text{ см}^3$

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{12 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 205,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 205,5 \text{ МПа}.$$

Недогрузка балки составляет $\frac{210 - 205,5}{210} \cdot 100\% = 2,15\%$. Проверим балку по касательным напряжениям:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{Q_{Y\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{12,33 \cdot 10^3 \cdot 33,7 \cdot 10^{-6}}{350 \cdot 10^{-8} \cdot 0,48 \cdot 10^{-2}} = \\ &= 24,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,7 \text{ МПа} < R_c,\end{aligned}$$

где $S_x^{\text{отс}} = 33,7 \text{ см}^3$, $I_x = 350 \text{ см}^4$, $d = 0,48 \text{ см}$.

Определим прогибы посередине каждого пролета балки. Для этого в основной системе в каждом пролете приложим единичную силу и построим единичные эпюры (рис. 5.11, 5.12, 5.13, 5.14). Умножим грузовую эпюру на единичную. Рассмотрим каждый участок балки.

Участок AC (рис. 5.11). Определим площади элементов эпюры изгибающих моментов и значения ординат под их центрами тяжести

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 12 \cdot 1 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; & \omega_2 &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \cdot 3,76 \cdot 2 = 3,76 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; & \omega_4 &= \frac{2}{3} f_1 l = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = 5,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \\ f_1 &= \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 2^2}{8} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, \quad y_3 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}, \quad y_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Прогиб в точке A :

$$\begin{aligned}v_A &= \frac{1}{EI_X} (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 - \omega_4 y_4) = \\ &= \frac{1}{EI_X} \left(12 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 3,76 \cdot \frac{1}{3} - 5,33 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{12,588}{EI_X}.\end{aligned}$$

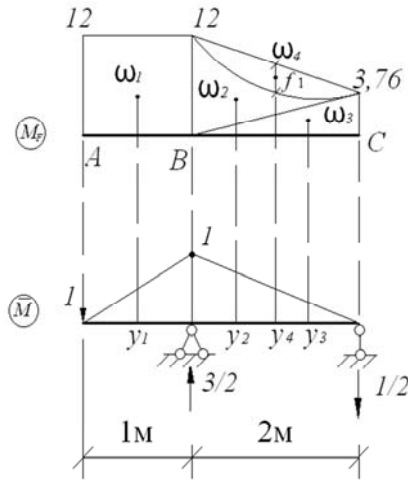


Рис. 5.11. Грузовая и единичная эпюры участка балки AC

Участок BC (рис. 5.12). Определим величину изгибающего момента в точке L:

$$M_L = -12 + 12,12 \cdot 1 - 8 \cdot 1 \cdot 0,5 = -3,88 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

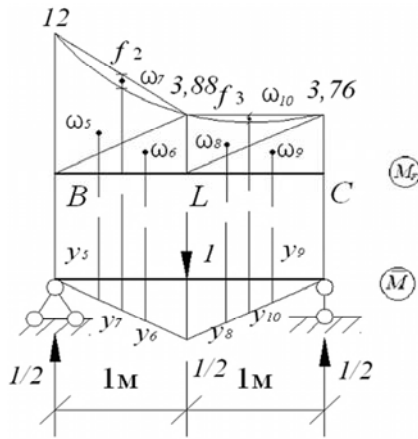


Рис. 5.12. Грузовая и единичная эпюры участка балки BC

Площади элементов эпюры и ординаты под центрами их тяжести рассчитываем аналогично:

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 3,88 \cdot 1 = 1,94 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_7 = \frac{2}{3} f_2 l = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$f_2 = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 1^2}{8} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\omega_8 = \frac{1}{2} \cdot 3,88 \cdot 1 = 1,94 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_9 = \frac{1}{2} \cdot 3,76 \cdot 1 = 1,88 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_{10} = \frac{2}{3} f_3 l = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$f_3 = f_2 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$y_5 = y_9 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$$

$$y_6 = y_8 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$y_7 = y_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$y_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Прогиб в точке L :

$$\begin{aligned} v_L &= \frac{1}{EI_X} (-\omega_5 y_5 - \omega_6 y_6 + \omega_7 y_7 - \omega_8 y_8 - \omega_9 y_9 + \omega_{10} y_{10}) = \\ &= \frac{1}{EI_X} \left(-6 \cdot \frac{1}{6} - 1,94 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - 1,94 \cdot \frac{1}{3} - 1,88 \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = -\frac{2,273}{EI_X}. \end{aligned}$$

Участок CD (рис. 5.13). Определим значение изгибающего момента в точке N

$$M_N = -6,39 \cdot 3,5 + 10 \cdot 2,5 + 8,06 \cdot 1,5 - 8 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 5,725 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Площади элементов эпюры и ординаты под центрами их тяжести:

$$\omega_{11} = \frac{1}{2} \cdot 3,76 \cdot 1,5 = 2,82 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \cdot 5,725 \cdot 1,5 = 4,294 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_{13} = \frac{2}{3} f_4 l = \frac{2}{3} \cdot 2,25 \cdot 1,5 = 2,25 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$y_{11} = y_{15} = \frac{1}{3} \cdot 0,75 = 0,25;$$

$$y_{12} = y_{14} = \frac{2}{3} \cdot 0,75 = 0,5;$$

$$y_{13} = y_{16} = \frac{1}{2} \cdot 0,75 = 0,375.$$

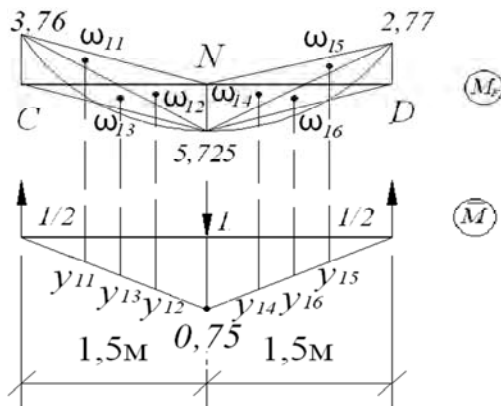


Рис. 5.13. Грузовая и единичная эпюры участка балки CD

$$f_4 = f_5 = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \cdot 1,5^2}{8} = 2,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\omega_{14} = \frac{1}{2} \cdot 5,725 \cdot 1,5 = 4,294 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_{15} = \frac{1}{2} \cdot 2,77 \cdot 1,5 = 2,078 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_{16} = \frac{2}{3} f_5 l = \frac{2}{3} \cdot 2,25 \cdot 1,5 = 2,25 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Прогиб в точке N :

$$\begin{aligned} v_N = \frac{1}{EI_X} & (-\omega_{11}y_{11} + \omega_{12}y_{12} + \omega_{13}y_{13} + \omega_{14}y_{14} - \\ & -\omega_{15}y_{15} + \omega_{16}y_{16}) = \frac{1}{EI_X} (-2,82 \cdot 0,25 + 4,294 \cdot 0,5 + 2,25 \cdot 0,375 + \\ & + 4,292 \cdot 0,5 - 2,078 \cdot 0,25 + 2,25 \cdot 0,375) = \frac{4,757}{EI_X}. \end{aligned}$$

Участок DK (рис. 5.14). Определим площади элементов эпюры изгибающих моментов на участке и ординаты под центрами их тяжести:

$$\omega_{17} = \frac{1}{2} \cdot 2,77 \cdot 1 = 1,385 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_{18} = \frac{1}{2} \cdot 6,39 \cdot 1 = 3,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_{19} = \frac{1}{2} \cdot 6,39 \cdot 1 = 3,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$y_{17} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$$

$$y_{18} = y_{19} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

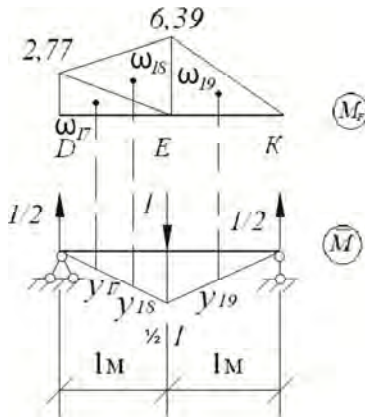


Рис. 5.14. Грузовая и единичная эпюры участка балки DK

Прогиб в точке E :

$$\begin{aligned} v_E &= -\frac{1}{EI_X} (\omega_{17} y_{17} + \omega_{18} y_{18} + \omega_{19} y_{19}) = \\ &= -\frac{1}{EI_X} \left(1,385 \cdot \frac{1}{6} + 3,2 \cdot \frac{1}{3} + 3,2 \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{2,364}{EI_X}. \end{aligned}$$

Построим изогнутую ось балки, определив прогибы в пролетах:

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{12,588}{EI_X} = \frac{12,588 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 0,017 \text{ м} = 1,7 \text{ см}; \\ v_N &= \frac{4,755}{EI_X} = \frac{4,757 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 0,006 \text{ м} = 0,6 \text{ см}; \\ v_E &= -\frac{4,716}{EI_X} = -\frac{2,364 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = -0,003 \text{ м} = -0,3 \text{ см}; \\ v_L &= -\frac{2,273}{EI_X} = -\frac{2,273 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = -0,003 \text{ м} = -0,3 \text{ см}. \end{aligned}$$

Изобразим изогнутую ось балки (см. рис. 5.9).

Пример 2. Многопролетная (неразрезная) балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа, модулем продольной упругости $E = 210$ ГПа, $m = 12$ кН·м, $q = 8$ кН/м, $F = 10$ кН, $a = 1$ м.

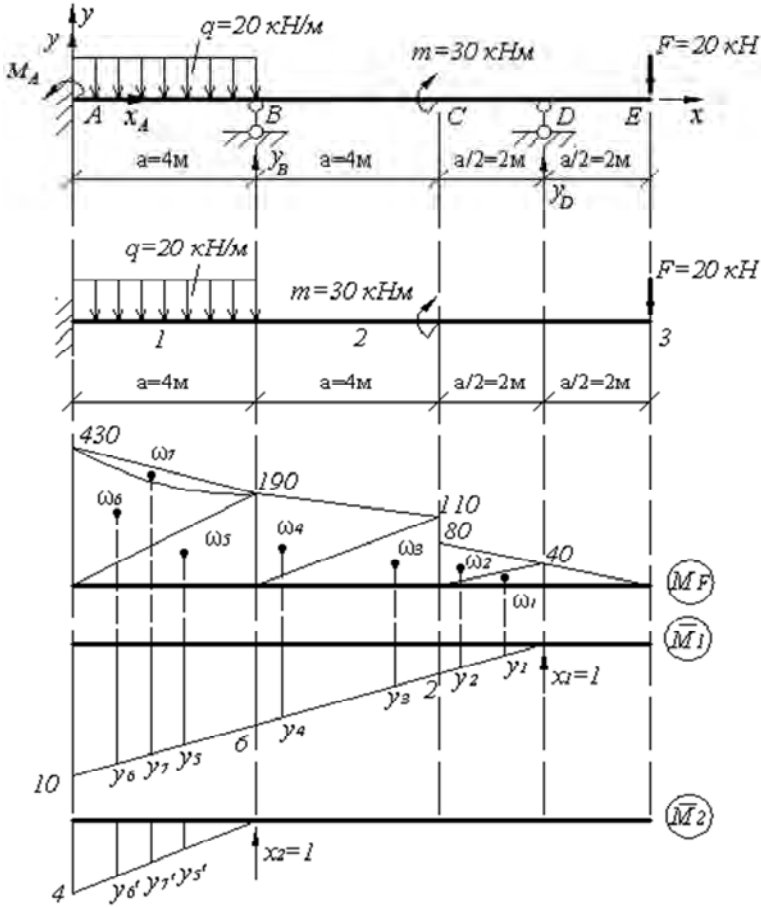


Рис. 5.15. Схема балки и основной системы.
Грузовая и единичные эпюры основной системы

Данная балка имеет две избыточные связи сверх необходимого минимума для обеспечения неизменяемости схемы.

Канонические уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Лишними неизвестными являются реакции опор B и D . В качестве основной принимаем систему, имеющую заделку в точке A .

Построим эпюру изгибающих моментов от действующей нагрузки (рис. 5.15):

$$M_D = -F \frac{a}{2} = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = 0; \quad M_{C(\text{правее})} = -Fa = -20 \cdot 4 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{C(\text{левее})} = -Fa - m = -80 - 30 = -110 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = -F \cdot 2a - m = -20 \cdot 8 - 30 = -190 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_A = -F \cdot 3a - m - q \cdot \frac{a^2}{2} = -20 \cdot 12 - 30 - 20 \cdot \frac{4^2}{2} = -430 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построим эпюры изгибающих моментов от единичных сил, приложенных вместо отброшенных связей (рис. 5.15):

$$M_A = 1 \cdot 2,5a = 10 \quad (\text{от силы } X_1 = 1);$$

$$M_A = 1 \cdot a = 4 \quad (\text{от силы } X_2 = 1).$$

Определим площади участков грузовой эпюры изгибающих моментов (M_F) и ординаты под центрами их тяжести в единичных эпюрах (\overline{M}_1 и \overline{M}_2)

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 2 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 4 = 220 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 190 \cdot 4 = 380 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 190 \cdot 4 = 380 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 430 \cdot 4 = 860 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_7 = \frac{2}{3} fa = \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 = 106,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$f = \frac{qa^2}{8} = \frac{20 \cdot 4^2}{8} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$y_1 = \frac{1}{3} \cdot 2 = 0,67 \text{ м}, \quad y_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,33 \text{ м}, \quad y_3 = 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 3,33 \text{ м};$$

$$y_4 = 2 + \frac{2}{3} \cdot 4 = 4,67 \text{ м}, \quad y_5 = 6 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 7,33 \text{ м}, \quad y_6 = 6 + \frac{2}{3} \cdot 4 = 8,67 \text{ м},$$

$$y_7 = 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 8 \text{ м}, \quad y_5' = \frac{1}{3} \cdot 4 = 1,33 \text{ м}, \quad y_6' = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2,67 \text{ м}, \quad y_7' = \frac{4}{2} = 2 \text{ м}.$$

Определим члены канонического уравнения

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_X} \left(10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \right) = \frac{333,33}{EI_X};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_X} \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{21,33}{EI_X};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_X} \left(6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{69,33}{EI}.$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ}(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 + \omega_6 y_6 - \omega_7 y_7) =$$

$$= -\frac{1}{EI_X}(40 \cdot 0,67 + 80 \cdot 1,33 + 220 \cdot 3,33 + 380 \cdot 4,67 + 380 \cdot 7,33 + 860 \cdot 8,67 -$$

$$-106,67 \cdot 8) = -\frac{12028,64}{EI_X};$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{EI_X}(\omega_5 y_5' + \omega_6 y_6' - \omega_7 y_7') =$$

$$= -\frac{1}{EI_X}(380 \cdot 1,33 + 860 \cdot 2,67 - 106,67 \cdot 2) = -\frac{2588,26}{EI_X}.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 333,33x_1 + 69,33x_2 - 12028,64 = 0; \\ 69,33x_1 + 21,33x_2 - 2588,26 = 0. \end{cases}$$

Откуда находим, что $x_1 = 33,5$ кН; $x_2 = 12,4$ кН.

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.16):

$$Q_E = 20 \text{ кН}; \quad Q_D (\text{правее}) = 20 \text{ кН};$$

$$Q_D (\text{левее}) = 20 - 33,5 = -13,5 \text{ кН};$$

$$Q_B (\text{правее}) = -13,5 \text{ кН};$$

$$Q_B (\text{левее}) = -13,5 - 12,4 = -25,9 \text{ кН};$$

$$Q_A = -25,9 + 20 \cdot 4 = 54,1 \text{ кН};$$

$$M_E = 0, \quad M_D = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C(\text{правее}) = -20 \cdot 4 + 33,5 \cdot 2 = -13 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C(\text{левее}) = -13 - 30 = -43 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = -20 \cdot 8 + 33,5 \cdot 6 - 30 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_A = -20 \cdot 12 + 33,5 \cdot 10 - 30 + 12,4 \cdot 4 - 20 \cdot \frac{4^2}{2} = 45,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим значение изгибающего момента в сечении N :

$$Z_N = \frac{Q_A}{q} = \frac{54,1}{20} = 2,71 \text{ м};$$

$$M_N = 54,1 \cdot 2,71 - 20 \cdot \frac{2,71^2}{2} - 45,4 = 27,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверим правильность расчетов, умножив конечную эпюру изгибающих моментов на единичные:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 2 = 13 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 43 \cdot 4 = 86 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 45,4 \cdot 4 = 90,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_7 = \frac{2}{3} fa = \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 = 106,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$y_1 = \frac{1}{3} \cdot 2 = 0,67 \text{ м}, \quad y_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,33 \text{ м}, \quad y_3 = 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 3,33 \text{ м};$$

$$y_4 = 2 + \frac{2}{3} \cdot 4 = 4,67 \text{ м}, \quad y_5 = 6 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 7,33 \text{ м}, \quad y_6 = 6 + \frac{2}{3} \cdot 4 = 8,67 \text{ м};$$

$$y_7 = 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 8 \text{ м}, \quad y_5' = \frac{1}{3} \cdot 4 = 1,33 \text{ м}, \quad y_6' = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2,67 \text{ м}, \quad y_7' = \frac{4}{2} = 2 \text{ м}.$$

$$\begin{aligned} \Sigma(M_F \overline{M_1}) &= \frac{1}{EI_x} \left(-\omega_1 y_1 - \omega_1 y_2 - \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5 - \omega_6 y_6 + \omega_7 y_7 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_x} \left(\omega_5 y_5' - \omega_6 y_6' + \omega_7 y_7' \right) = \frac{1}{EI} \left(-40 \cdot 0,67 - 13 \cdot 1,33 - 86 \times \right. \\ &\quad \times 3,33 + 22 \cdot 4,67 + 22 \cdot 7,33 - 90,8 \cdot 8,67 + 106,67 \cdot 8) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{EI_x} (22 \cdot 1,33 - 90,8 \cdot 2,67 + 106,67 \cdot 2) = -\frac{0,182}{EI_x}. \right. \end{aligned}$$

Ошибка составляет $\frac{0,182}{1360,142} \cdot 100 \% = 0,0134 \%$.

Определим прогибы посередине каждого из пролетов и в точке E . Для этого воспользуемся методом начальных параметров:

$$EI_x v = EI_x v_0 + EI_x \theta_0 Z + \frac{M(z-a)^2}{2} + \frac{F(z-b)^3}{6} + \frac{q(z-c)^4}{24}.$$

В начале координат $\theta_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Запишем выражение начальных параметров для $Z = 2 \text{ м}$, $Z = 6 \text{ м}$, $Z = 12 \text{ м}$:

$$EI_x v_{(Z=2)} = -\frac{45,4(2-0)^2}{2} + \frac{54,1(2-0)^3}{6} - \frac{20(2-0)^4}{24} = -32;$$

$$EI_X v_{(Z=6)} = -\frac{45,4(6-0)^2}{2} + \frac{54,1(6-0)^3}{6} + \frac{12,4(6-4)^3}{6} -$$

$$-\frac{20(6-0)^4}{24} + \frac{20(6-4)^4}{24} = 80,26;$$

$$EI_X v_{(Z=12)} = -\frac{45,4(12-0)^2}{2} + \frac{54,1(12-0)^3}{6} + \frac{12,4(12-4)^3}{6} +$$

$$+\frac{33,5(12-10)^3}{6} - \frac{20(12-0)^4}{24} + \frac{20(12-4)^4}{24} = -211,87.$$

Подберем сечение в виде двутавра (прил. 1), если $R = 200$ МПа:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R, \quad W_x = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{45,4 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 0,227 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 227 \text{ см}^3.$$

Выбираем по сортаменту двутавр № 22 с $W_x = 232 \text{ см}^3$, $I_x = 2550 \text{ см}^4$.
Прогиб в точке 1 при $Z = 2$ м:

$$v_1 = -\frac{32 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = -0,006 \text{ м.}$$

Прогиб в точке 2 при $Z = 6$ м:

$$v_2 = \frac{80,26 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 0,016 \text{ м.}$$

Прогиб в точке 3 при $Z = 12$ м:

$$v_3 = -\frac{211,87 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = -0,042 \text{ м.}$$

Строим эпюру прогибов балки (рис. 5.16).

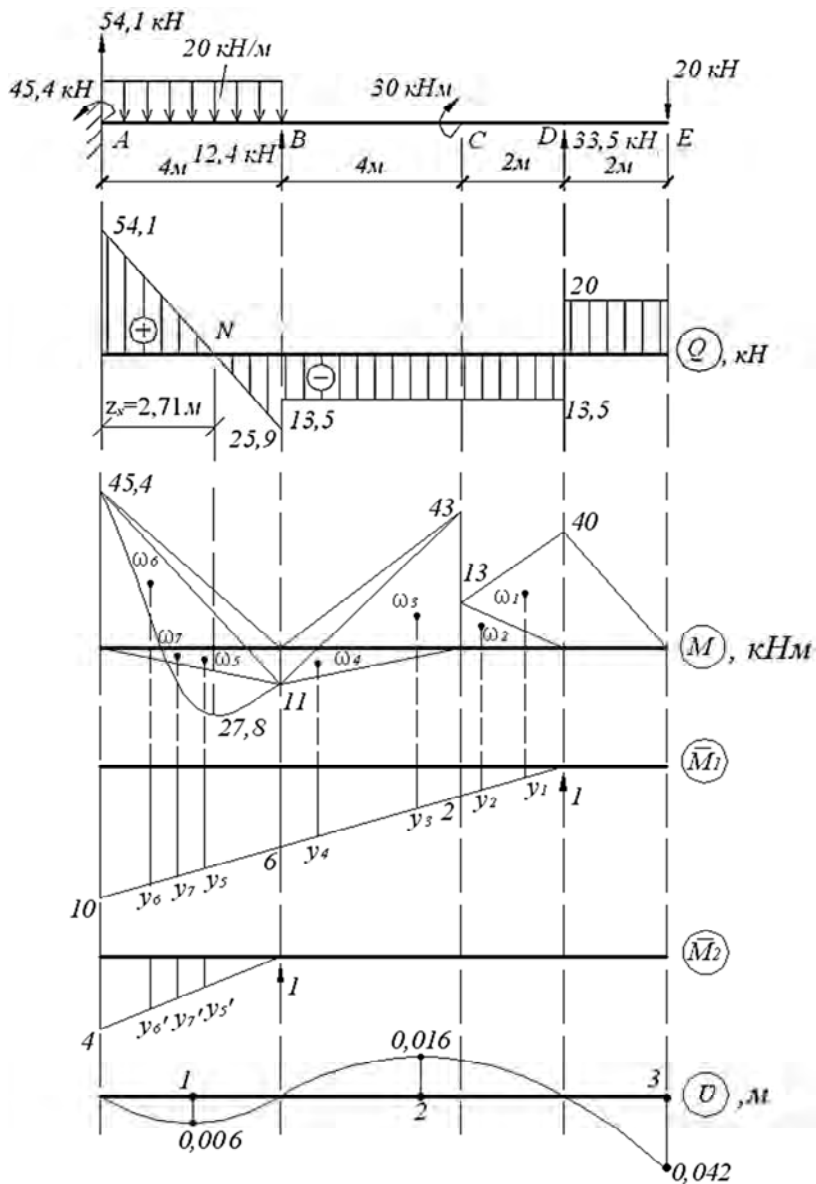


Рис. 5.16. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
Эпюра прогибов

6. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

6.1. Расчет внецентренно сжатой колонны

Задача 10

Колонна заданного поперечного сечения сжимается расчетной силой F , направленной параллельно продольной оси и приложенной к точке, показанной на сечении.

Расчетные сопротивления для материала колонны: на растяжение $R = 1,4$ МПа, на сжатие $R_{сж} = 22$ МПа.

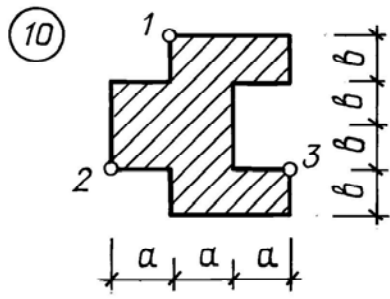
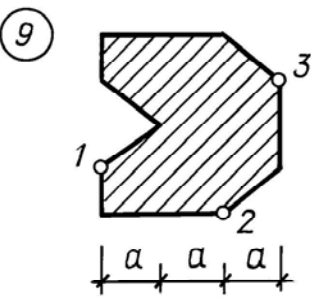
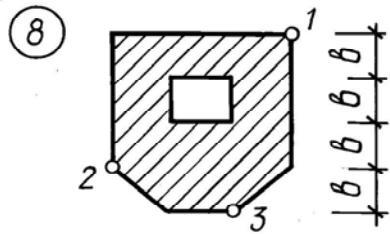
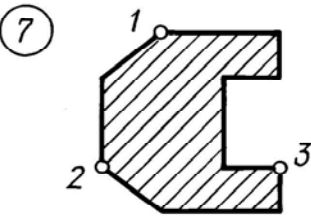
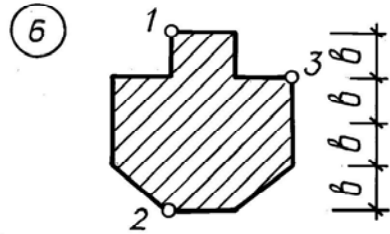
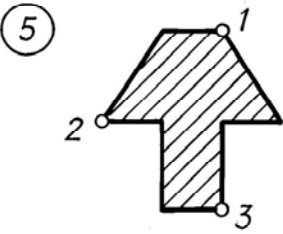
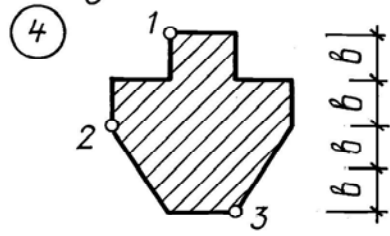
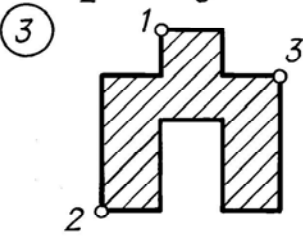
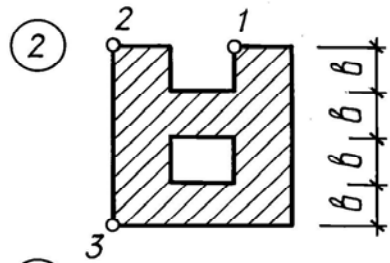
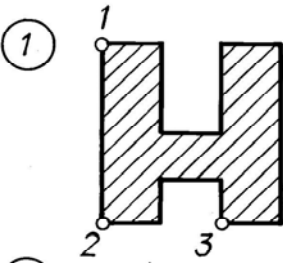
Требуется найти положение нейтральной (нулевой) линии, вычислить наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения, построить эпюру напряжений, дать заключение о прочности колонны, построить ядро сечения.

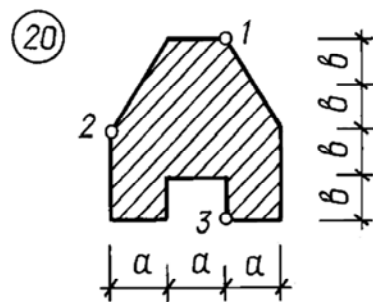
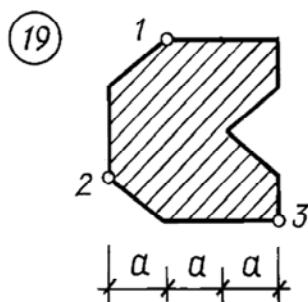
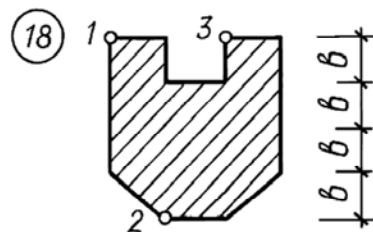
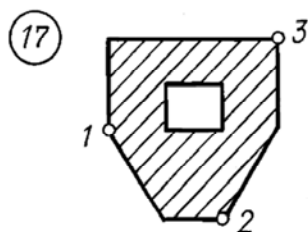
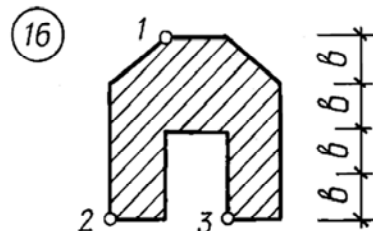
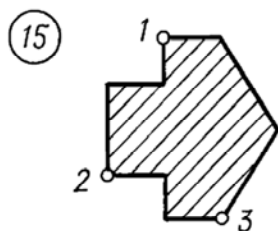
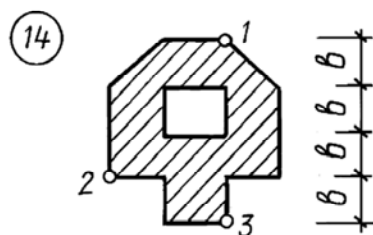
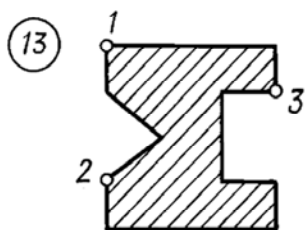
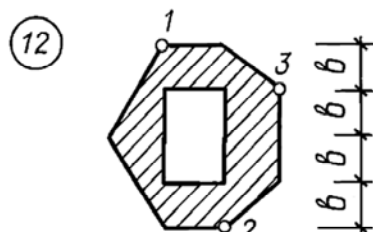
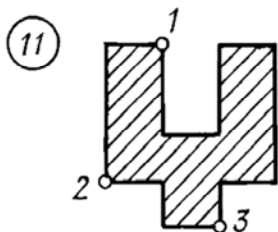
Исходные данные к задаче 10 приведены в табл. 6.1.

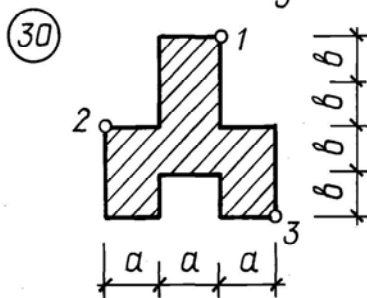
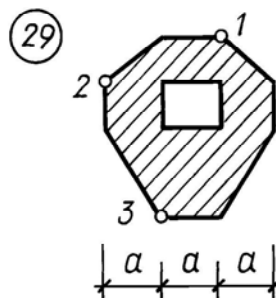
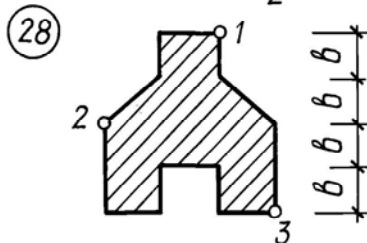
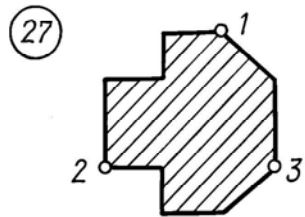
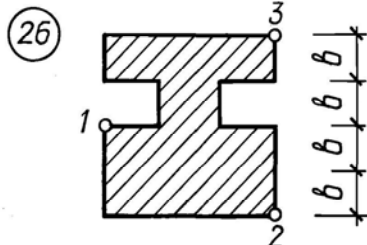
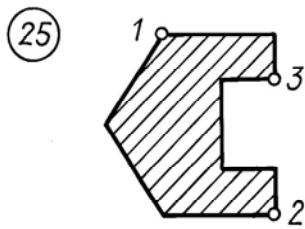
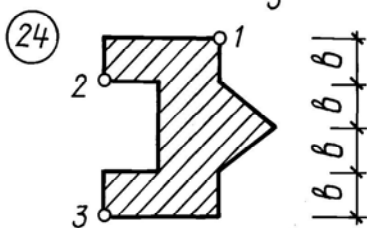
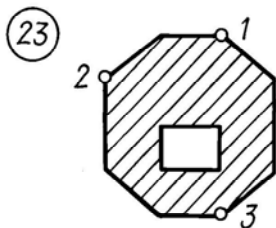
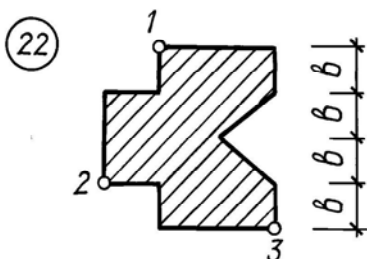
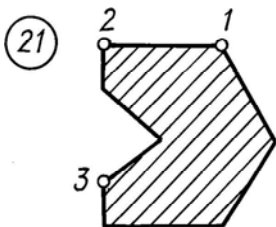
Таблица 6.1

Исходные данные к задаче 10

№ варианта	Нагрузка F , кН	Размеры сечения, см		Точка приложения силы
		a	b	
1	100	20	14	3
2	280	26	12	1
3	440	36	22	2
4	120	22	18	2
5	300	30	24	3
6	460	30	28	1
7	140	26	24	3
8	320	24	28	1
9	480	42	28	2
10	220	24	18	3







Пример решения задачи 10

Колонна заданного поперечного сечения сжимается расчетной силой F , направленной параллельно продольной оси и приложенной к точке, показанной на сечении.

Расчетные сопротивления для материала колонны: на растяжение $R = 1,4$ МПа, на сжатие $R_{сж} = 22$ МПа (рис. 6.1).

Требуется найти положение нейтральной (нулевой) линии, вычислить наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения, построить эпюру напряжений, дать заключение о прочности колонны, построить ядро сечения.

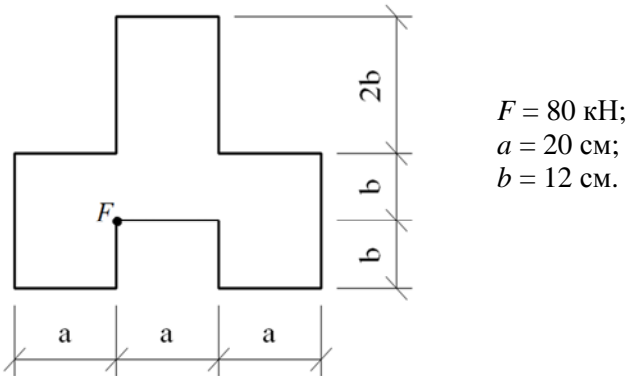


Рис. 6.1. Схема поперечного сечения колонны

Решение

Определим координаты центра тяжести сечения. Поперечное сечение колонны имеет ось симметрии y_C , следовательно, центр тяжести лежит на этой оси и для определения координаты y_C относительно вспомогательной оси OX , сложное сечение разбиваем на три прямоугольника:

$$y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_3 y_3}{A_1 + A_2 - A_3},$$

где y_1, y_2 и y_3 – координаты центров тяжести прямоугольников относительно вспомогательной оси OX ;

A_1, A_2 и A_3 – площади их поперечных сечений.

$$y_C = \frac{20 \cdot 24 \cdot 36 + 60 \cdot 24 \cdot 12 - 20 \cdot 12 \cdot 6}{20 \cdot 24 + 60 \cdot 24 - 20 \cdot 12} = \frac{33120}{1680} = 19,7 \text{ см.}$$

Определим геометрические характеристики сечения. Для вычисления главных центральных моментов инерции воспользуемся зависимостью между моментами инерции при параллельном переносе осей

$$I_{x_c} = \Sigma (I_{x_i} + A_i a_i^2) = \frac{20 \cdot 24^3}{12} + 20 \cdot 24 \cdot (16,3)^2 + \frac{60 \cdot 24^3}{12} + 60 \cdot 24 \cdot (-7,7)^2 - \left(\frac{20 \cdot 12^3}{12} + 20 \cdot 12 \cdot (-13,7)^2 \right) = 257143,2 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = \Sigma I_{y_i} = \frac{24 \cdot 20^3}{12} + \frac{24 \cdot 60^3}{12} - \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 440\,000 \text{ см}^4.$$

Определим квадраты радиусов инерции:

$$i_x^2 = \frac{I_{x_c}}{A} = \frac{257143,2}{1680} = 153,1 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_{y_c}}{A} = \frac{440\,000}{1680} = 261,9 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы F :

$$x_F = -10 \text{ см}, \quad y_F = -7,7 \text{ см.}$$

Положение нулевой линии:

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{261,9}{-10} = 26,2 \text{ см};$$

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{153,1}{-7,7} = 19,9 \text{ см.}$$

По найденным отрезкам, отсекаемым на осях координат, проводим нулевую линию (рис. 6.2).

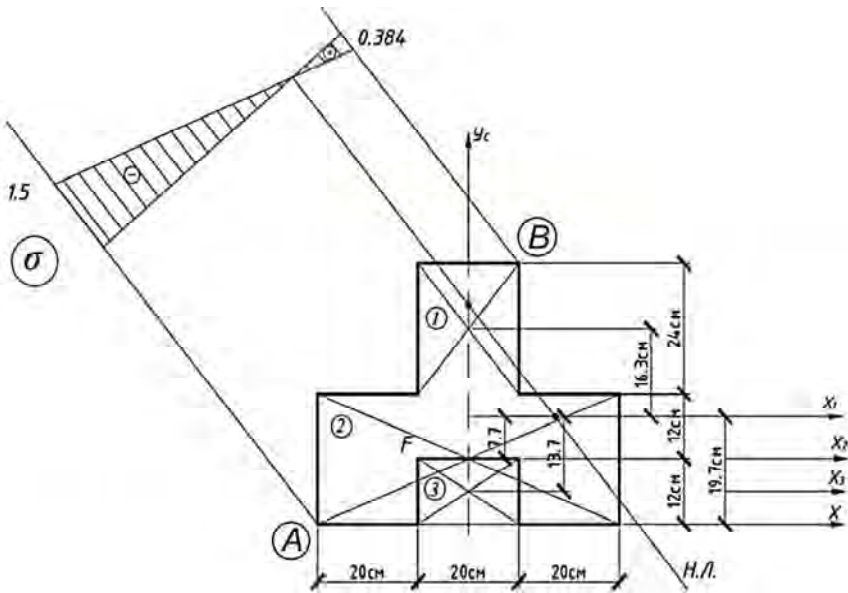


Рис. 6.2. Положение центра тяжести и нулевой линии. Эпюра напряжений

Определим наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения. Наиболее удаленными от нулевой линии точками являются точки A и B . Их координаты:

$$x_A = -30 \text{ см}; \quad y_A = -19,7 \text{ см}; \quad x_B = 10 \text{ см}; \quad y_B = 28,3 \text{ см}.$$

Напряжения в этих точках определяются по формуле

$$\sigma = -\frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_F}{i_x^2} y_{(A,B)} + \frac{x_F}{i_y^2} x_{(A,B)} \right).$$

Знак минус перед формулой показывает, что сила, приложенная к колонне, является сжимающей.

Нулевая линия делит сечение на зоны сжатия (область приложения силы F) и растяжения.

Растягивающее напряжение:

$$\sigma_B = -\frac{80 \cdot 10^3}{1680 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(-7,7) \cdot 10^{-2}}{153,1 \cdot 10^{-4}} \cdot 28,3 \cdot 10^{-2} + \frac{(-10) \cdot 10^{-2}}{261,9 \cdot 10^{-4}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \right) =$$

$$= 0,38 \text{ МПа} < 1,4 \text{ МПа.}$$

Сжимающие напряжение:

$$\sigma_A = -\frac{80 \cdot 10^3}{1680 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(-7,7) \cdot 10^{-2}}{153,1 \cdot 10^{-4}} \cdot (-19,7) \cdot 10^{-2} + \frac{(-10) \cdot 10^{-2}}{261,9 \cdot 10^{-4}} \cdot (-30) \cdot 10^{-2} \right) =$$

$$= -1,5 \text{ МПа} < 22 \text{ МПа.}$$

Прочность колонны обеспечена.

По результатам расчета напряжений σ_A и σ_B строим эпюру σ (см. рис. 6.2).

Построим ядро сечения (рис. 6.3).

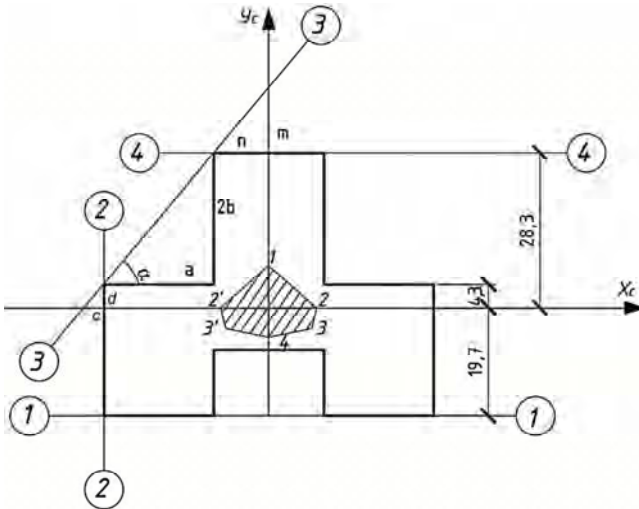


Рис. 6.3. Ядро сечения

Чтобы получить очертание ядра сечения, необходимо рассмотреть все возможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные являются нулевыми линиями, вычислить координаты граничных точек ядра относительно главных центральных осей сечения. Соединяя эти точки, получим очертание ядра сечения.

Касательная 1–1:

$$x_0 = \infty, \quad y_0 = -19,7 \text{ см};$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{153,1}{-19,7} = 7,8 \text{ см}.$$

Касательная 2–2:

$$x_0 = -30 \text{ см}, \quad y_0 = \infty;$$

$$x_2 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{261,9}{-30} = 8,73 \text{ см}, \quad y_2 = 0.$$

Касательная 3–3. Определим координаты точек пересечения касательной 3–3:

$$\frac{2b}{a} = \frac{d}{c}, \quad c = \frac{ad}{2b} = \frac{20 \cdot 4,3}{24} = 3,6 \text{ см};$$

$$\frac{2b}{a} = \frac{m}{n}, \quad m = \frac{2bn}{a} = \frac{24 \cdot 10}{20} = 12 \text{ см};$$

$$y_0 = 28,3 + 12 = 40,3 \text{ см}, \quad x_0 = -(30 + 3,6) = -33,6 \text{ см};$$

$$x_3 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{261,9}{-33,6} = 7,8 \text{ см};$$

$$y_3 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{153,1}{40,3} = -3,8 \text{ см}.$$

Касательная 4-4:

$$x_0 = \infty, \quad y_0 = 28,3 \text{ см};$$

$$x_4 = 0, \quad y_4 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{153,1}{28,3} = -5,4 \text{ см}.$$

Поскольку сечение имеет ось симметрии y_C , то все определенные координаты переносим симметрично этой оси (см. рис. 6.3).

6.2. Расчет балки на косой изгиб

Задача 11

Балка нагружена в главных плоскостях расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа.

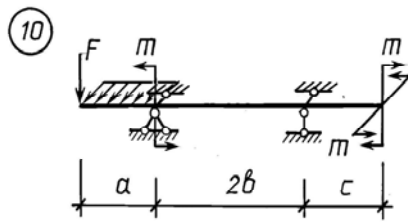
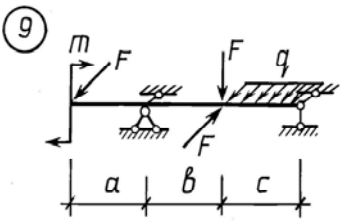
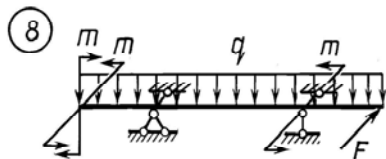
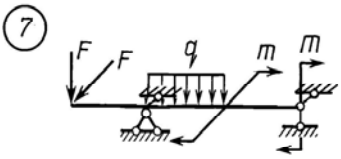
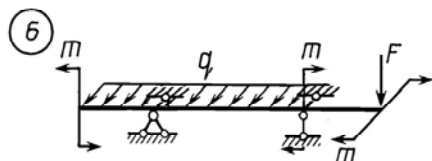
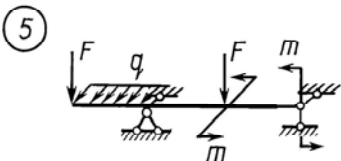
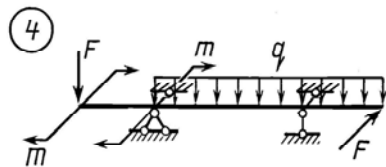
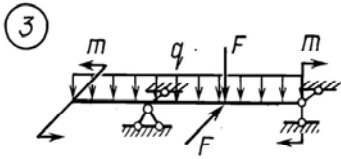
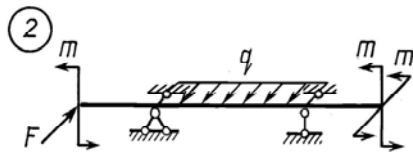
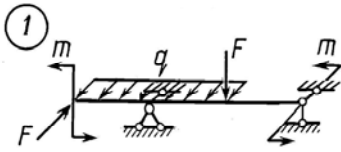
Требуется построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, определить опасное сечение и подобрать двутавр, приняв $W_x/W_y \approx 8$, определить положение нейтральной оси в опасном сечении и построить эпюру нормальных напряжений.

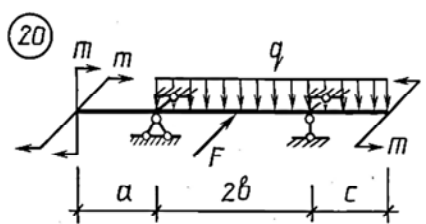
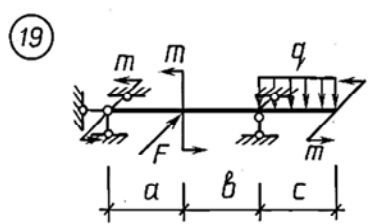
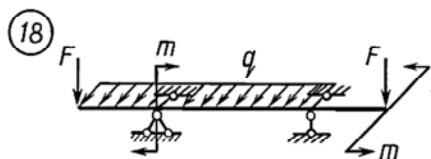
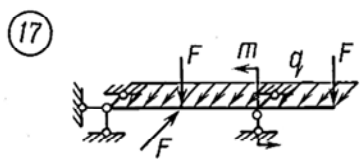
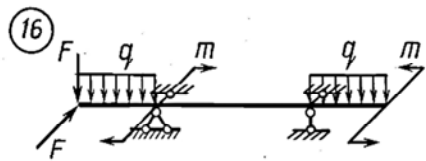
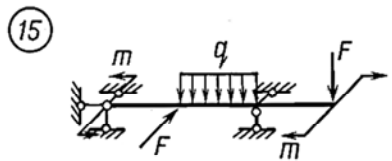
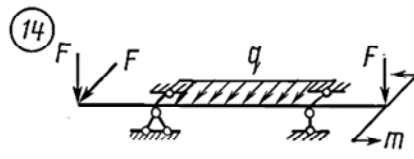
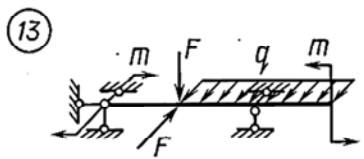
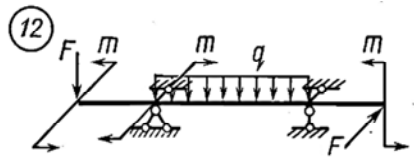
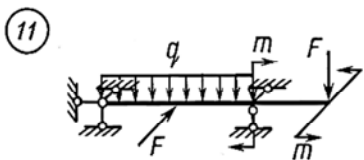
Исходные данные к задаче 11 представлены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

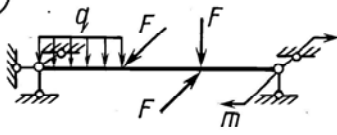
Исходные данные к задаче 11

№ варианта	a , м	b , м	c , м	F , кН	q , кН/м	m , кН·м
1	3	2	1	8	10	12
2	2	3	2	12	8	10
3	2	1	2	10	4	6
4	1	2	3	14	10	8
5	2	3	2	6	8	12
6	2	3	3	16	6	10
7	2	2	3	12	10	6
8	2	3	2	8	6	14
9	2	4	2	14	12	18
10	2	3	1	12	6	14

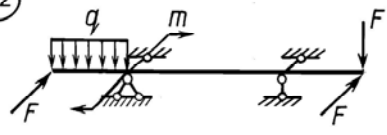




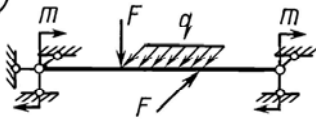
21



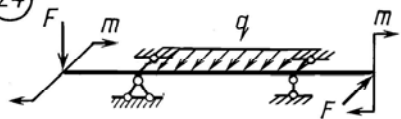
22



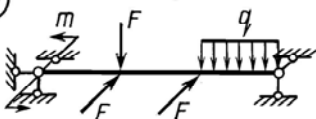
23



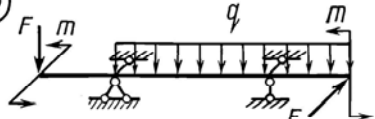
24



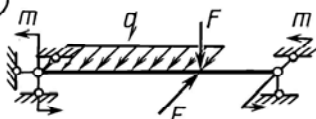
25



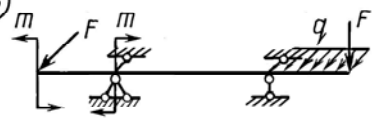
26



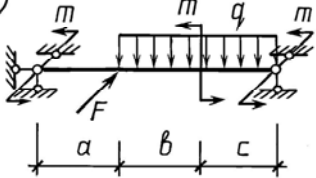
27



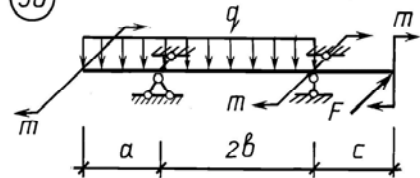
28



29



30



Пример решения задачи 11

Балка нагружена в главных плоскостях расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа (рис. 6.4).

Требуется построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, определить опасное сечение и подобрать двутавр, приняв $W_X/W_Y = 8$, определить положение нейтральной оси в опасном сечении и построить эпюру нормальных напряжений.

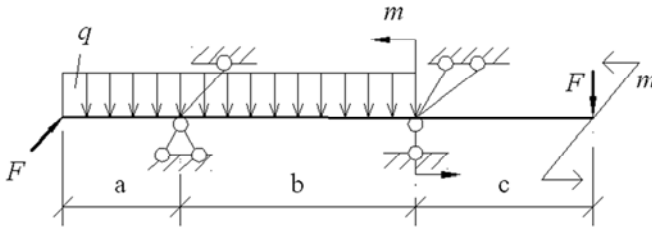


Рис. 6.4. Схема балки

$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ м}, & m &= 6 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ b &= 4 \text{ м}, & F &= 8 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ c &= 3 \text{ м}, & q &= 10 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Решение

Определим вертикальные и горизонтальные опорные реакции и построим эпюры изгибающих моментов M_X и M_Y (рис. 6.5).

Вертикальная плоскость:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\Sigma M_A = -y_B b + F(b+c) - m + q\left(b\frac{b}{2}\right) - q\left(a\frac{a}{2}\right) = 0;$$

$$-y_B \cdot 4 + 8 \cdot 7 - 6 + 10 \cdot \frac{4^2}{2} - 10 \cdot \frac{2^2}{2} = 0;$$

$$y_B = \frac{110}{4} = 27,5 \text{ кН}.$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$\Sigma M_B = y_A b - q \frac{(a+b)^2}{2} - m + Fc = 0;$$

$$y_A \cdot 4 - 10 \cdot \frac{6^2}{2} - 6 + 8 \cdot 3 = 0;$$

$$y_A = 40,5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma Y = 0;$$

$$27,5 + 40,5 - 8 - 10 \cdot 6 = 0.$$

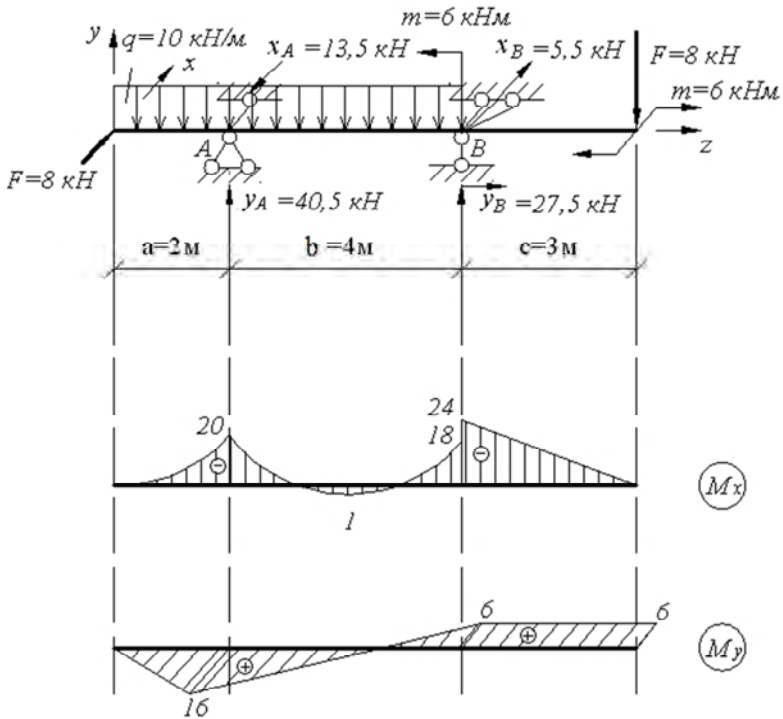


Рис. 6.5. Эпюры изгибающих моментов относительно осей X и Y

Горизонтальная плоскость:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\Sigma M_A = m - x_B b + Fa = 0.$$

$$-4x_B + 6 + 8 \cdot 2 = 0; \quad x_B = 5,5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$\Sigma M_B = F(a + b) - x_A b + m = 0;$$

$$8(2 + 4) - x_A \cdot 4 + 6 = 0; \quad x_A = 13,5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma X = 0;$$

$$\Sigma X = 8 - 13,5 + 5,5 = 0.$$

Выберем наиболее опасное сечение. Одновременно большие моменты в плоскости оси X и Y находятся в точке A :

$$M_X = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_Y = 16 \text{ кН}.$$

Определим требуемый момент сопротивления, приняв $W_X/W_Y = 8$, то есть $W_X = 8W_Y$.

Условие прочности при косом изгибе для балок из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq R \quad \text{или} \quad \frac{M_X}{8W_Y} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq R,$$

откуда

$$W_Y \geq \frac{\frac{M_X}{8} + M_Y}{R} = \frac{\frac{20 \cdot 10^3}{8} + 16 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,0881 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 88,1 \text{ см}^3.$$

По сортаменту (прил. 1) принимаем двутавр № 40

$$\begin{aligned}W_Y &= 86 \text{ см}^3, & W_X &= 953 \text{ см}^3; \\I_Y &= 667 \text{ см}^4, & I_X &= 19\,062 \text{ см}^4.\end{aligned}$$

Проверяем прочность балки:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} = \frac{20 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} + \frac{16 \cdot 10^3}{86 \cdot 10^{-6}} = 20,98 + 186,05 = \\&= 207,03 < 210 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Прочность балки обеспечена.

Недогрузка балки составляет $\frac{210 - 207,03}{210} \cdot 100 = 1,4 \%$.

Определяем угол наклона нулевой линии к оси OX :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{I_X}{I_Y} \frac{M_Y}{M_X} = -\frac{19062 \cdot 10^{-8}}{667 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{16 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 22,86.$$

$$\alpha_0 = 87^\circ 30'.$$

Для построения эпюры σ угол α_0 откладываем против часовой стрелки от оси OX . Наибольшие напряжения будут действовать в угловых точках сечения, причем в точке A они будут растягивающими, а в B – сжимающими (рис. 6.6).

Угол наклона силовой линии

$$\operatorname{tg} \alpha_F = \frac{M_Y}{M_X} = \frac{16 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,8;$$

$$\alpha_F = 38^\circ 30'.$$

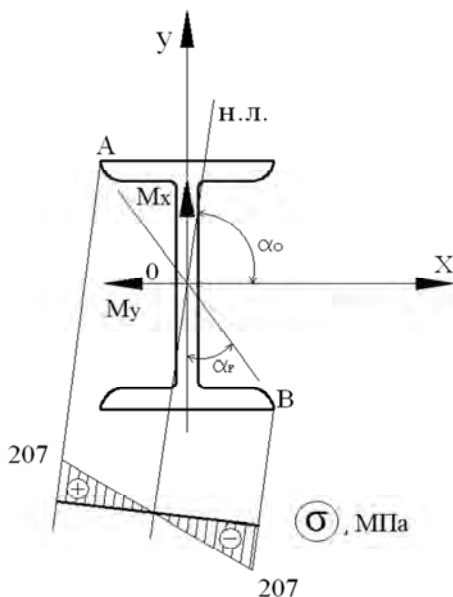


Рис. 6.6. Положение нулевой линии. Эпюра напряжений

6.3. Расчет пространственного стержня

Задача 12

Пространственная система, состоящая из трех стержней, жестко соединенных между собой под прямым углом, нагружена расчетной нагрузкой в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Стержни системы имеют одинаковые длины l и диаметры поперечных сечений D . Материал стержней – сталь с расчетными сопротивлениями $R = 200$ МПа, $R_c = 130$ МПа.

Требуется построить эпюры внутренних усилий, установить вид сопротивления для каждого участка стержня, определить опасное сечение и дать заключение о прочности конструкции.

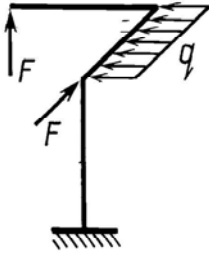
Исходные данные к задаче 12 представлены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

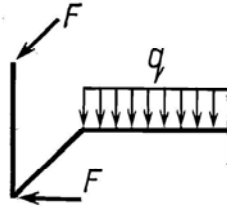
Исходные данные к задаче 12

№ варианта	F , кН	q , кН/м	m , кН·м	l , м	D , см
1	10	4	1	0,8	12
2	4	10	1	0,6	10
3	10	10	5	1,0	11
4	6	6	1	0,6	13
5	6	10	6	1,0	10
6	4	4	8	0,6	12
7	8	4	8	0,8	10
8	8	8	4	0,4	11
9	12	6	8	0,8	10
10	8	6	4	0,6	13

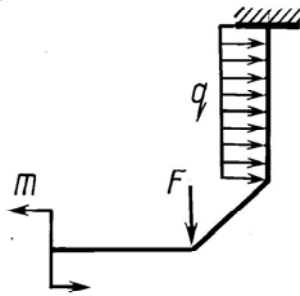
1



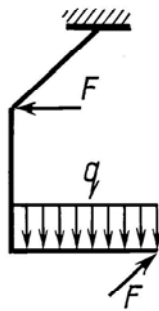
2



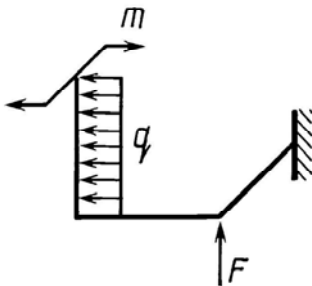
3



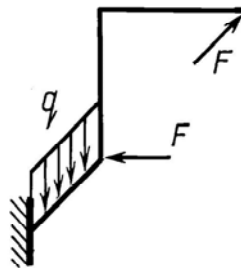
4



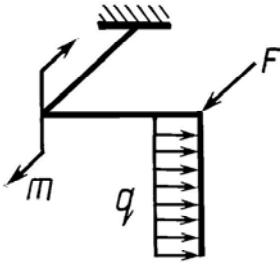
5



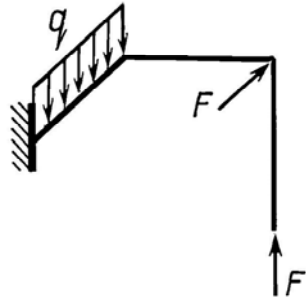
6



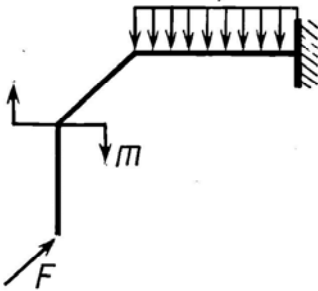
7



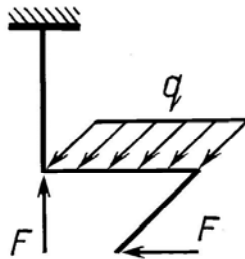
8



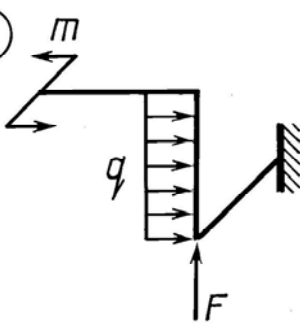
9



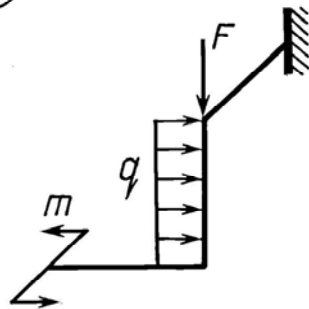
10

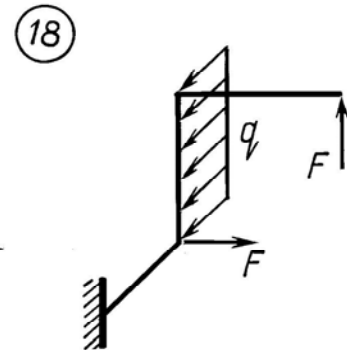
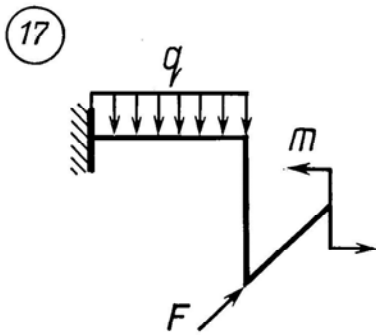
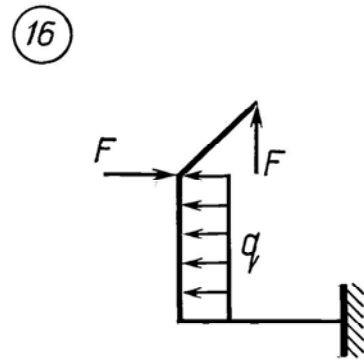
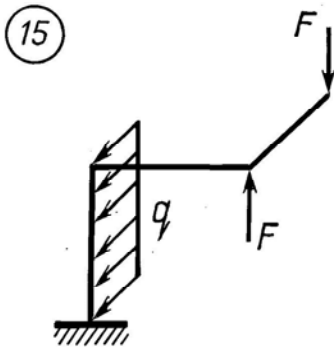
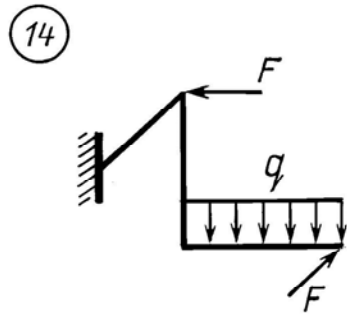
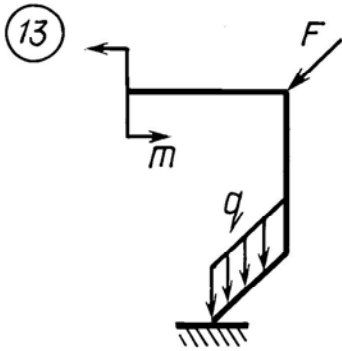


11

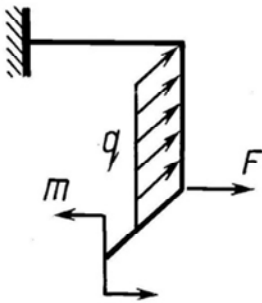


12

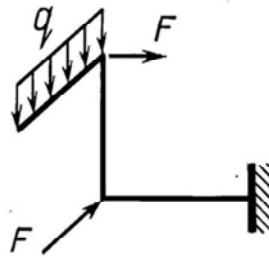




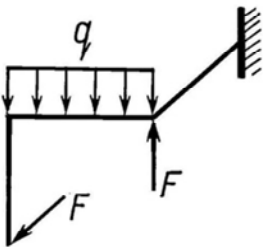
19



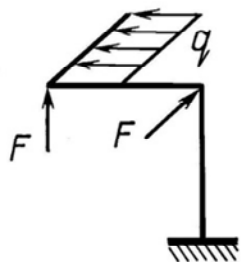
20



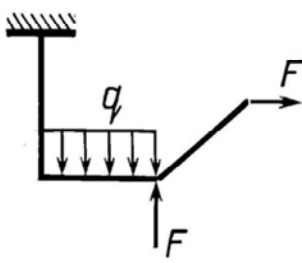
21



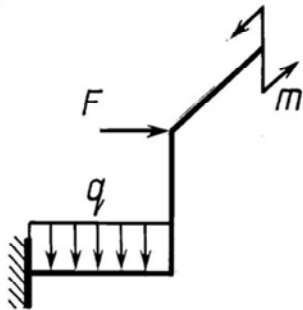
22



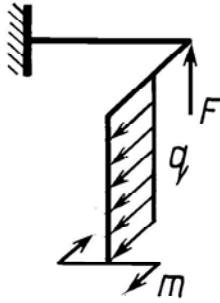
23



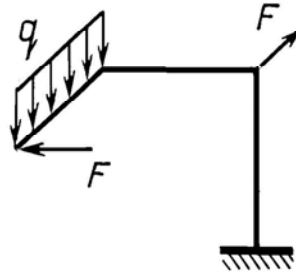
24



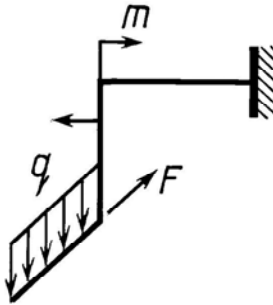
25



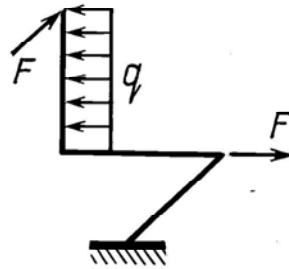
26



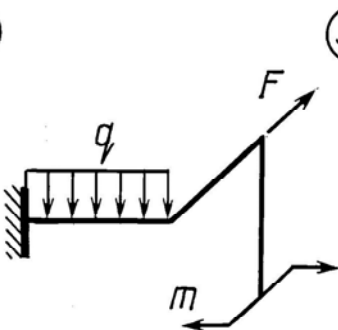
27



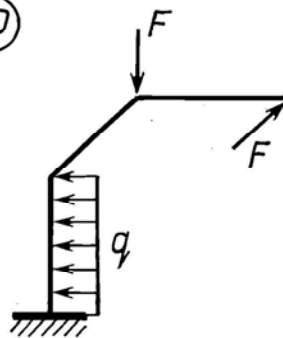
28



29



30



Пример решения задачи 12

Пространственная система, состоящая из трех стержней, жестко соединенных между собой под прямым углом, нагружена расчетной нагрузкой в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Стержни системы имеют одинаковые длины l и диаметры поперечных сечений d . Материал стержней – сталь с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа, $R_c = 130$ МПа, $m = 4$ кН·м, $l = 0,8$ м, $q = 8$ кН/м, $d = 10$ см, $F = 6$ кН (рис. 6.7).

Требуется построить эпюры внутренних усилий, установить вид сопротивления для каждого участка стержня, определить опасное сечение и дать заключение о прочности конструкции.

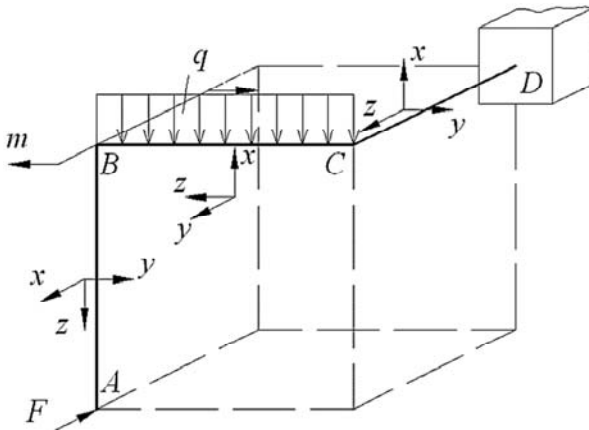


Рис. 6.7. Схема пространственной системы

Решение

Построим эпюру продольных сил. На участках AB и BC отсутствуют продольные силы.

Участок CD . Продольной силой для данного участка является сила F

$$N = -F = -6 \text{ кН (сжатие)} \text{ (рис. 6.8).}$$

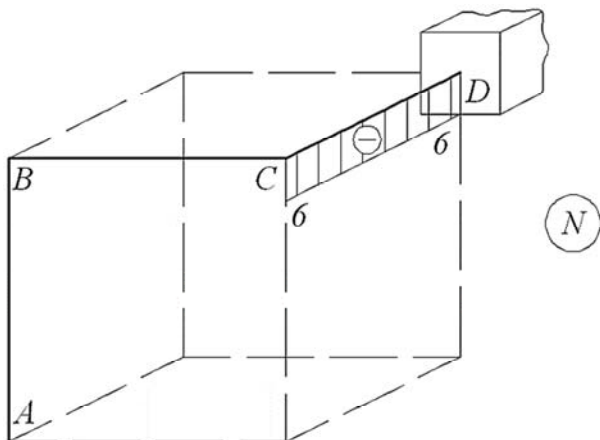


Рис. 6.8. Эпюра продольных сил

Построим эпюру поперечных сил (рис. 6.9).

Участок AB :

$$Q_{Ax} = -F = -6 \text{ кН}, \quad Q_{Bx} = -F = -6 \text{ кН}.$$

Участок BC :

$$Q_{By} = F = 6 \text{ кН}, \quad Q_{Cy} = F = 6 \text{ кН};$$

$$Q_{Bx} = 0, \quad Q_{Cx} = -ql = -8 \cdot 0,8 = -6,4 \text{ кН}.$$

Участок CD :

$$Q_{Cx} = -ql = -8 \cdot 0,8 = -6,4 \text{ кН};$$

$$Q_{Dx} = -6,4 \text{ кН}.$$

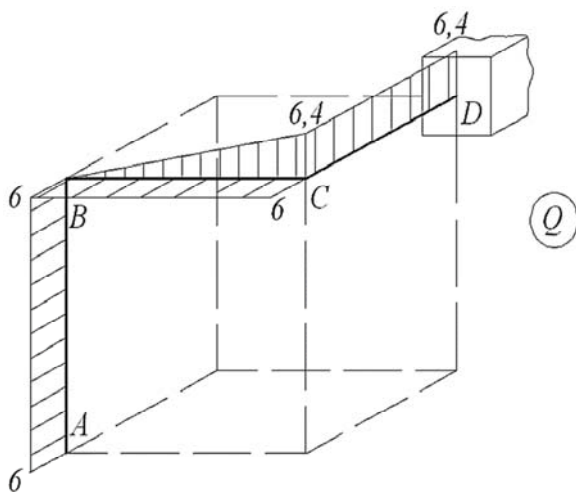


Рис. 6.9. Эпюра поперечных сил

Построим эпюру изгибающих моментов. Для этого последовательно построим эпюры от каждого вида нагрузки.

Сила F (рис. 6.10).

Участок AB :

$$M_{Ay} = 0, \quad M_{By} = Fl = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BC :

$$M_{Bx} = 0;$$

$$M_{Cx} = Fl = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD :

$$M_{Cx} = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_{Dx} = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Fl = M_{Cy} = M_{Dy} = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

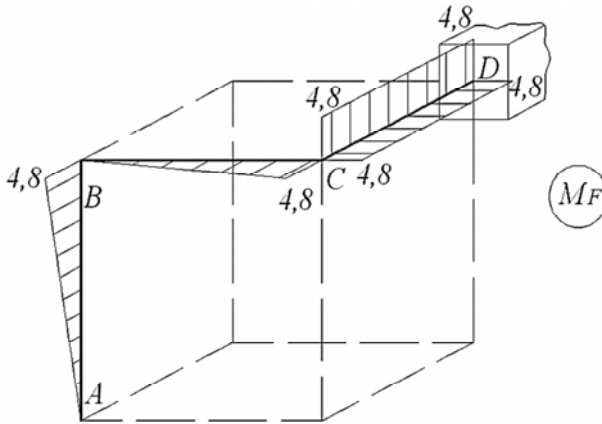


Рис. 6.10. Эпюра изгибающих моментов от действия силы F

Изгибающий момент m (рис. 6.11).

Участок BC :

$$M_{B_x} = M_{C_x} = m = 4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

Участок CD :

$$M_{C_x} = M_{D_x} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

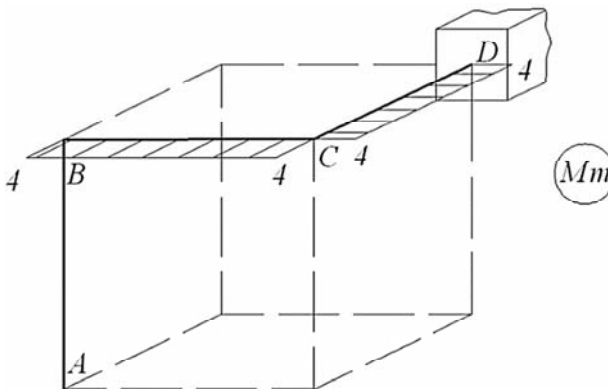


Рис. 6.11. Эпюра изгибающих моментов от действия изгибающего момента m

Распределенная нагрузка q (рис. 6.12).

Участок BC :

$$M_{By} = 0, \quad M_{Cy} = \frac{ql^2}{2} = \frac{8 \cdot 0,8^2}{2} = 2,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD :

$$M_{Cy} = 0, \quad M_{Dy} = ql = 8 \cdot 0,8 = 5,12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

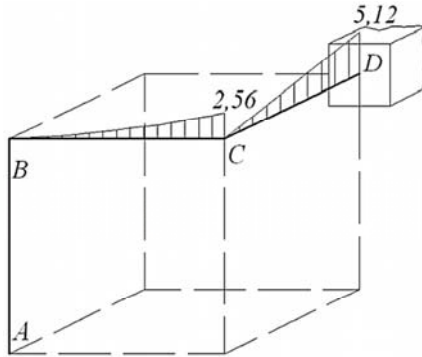


Рис. 6.12. Эпюра изгибающих моментов от действия равномерно распределенной нагрузки q

Просуммируем изгибающие моменты от всех видов нагрузки (рис. 6.13).

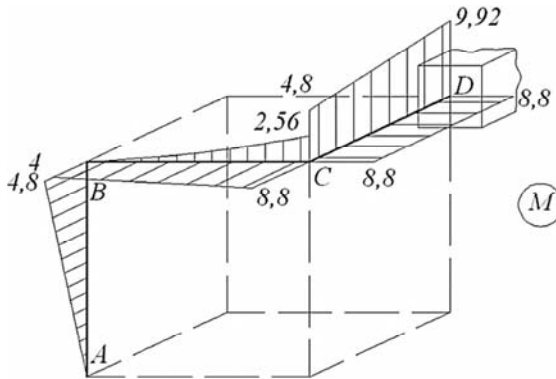


Рис. 6.13. Суммарная эпюра изгибающих моментов от действия всех видов нагрузки

Построим эпюру крутящих моментов (рис. 6.14).

Участок AB :

$$T = 0.$$

Участок BC :

$$T = Fl = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD :

$$T = ql \frac{l}{2} = 8 \cdot 0,8 \cdot \frac{0,8}{2} = 2,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

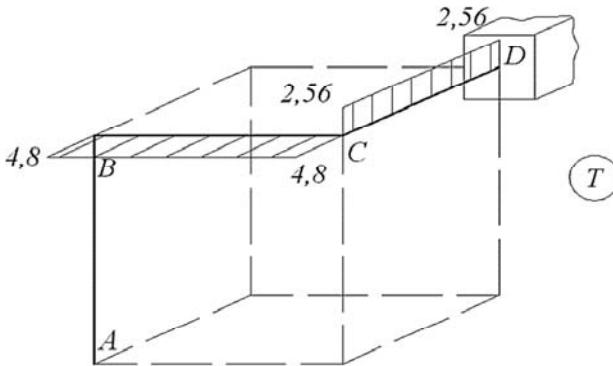


Рис. 6.14. Эпюра крутящих моментов

Установим вид сопротивления для каждого участка системы, который определяется по эпюрам. На участке AB действует поперечная сила Q_x и изгибающий момент M_y (поперечный изгиб). На участке BC действует поперечная сила Q_x , Q_y , крутящий момент T и изгибающие моменты M_x и M_y (косой изгиб с кручением). На участке CD действует поперечная сила Q_x , крутящий момент T , изгибающие моменты M_x , M_y и продольная сила N (косой изгиб с кручением и сжатием).

Определим максимальные напряжения в опасном сечении каждого участка от внутренних усилий M_x , M_y , T , N (касательными напряжениями от поперечных сил Q_x и Q_y можно пренебречь).

Участок *AB*. Опасная точка *B*:

$$Q_x = 6 \text{ кН}, \quad M_y = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\sigma_B = \frac{M_u}{W_u} = \frac{4,8 \cdot 10^3}{98,13 \cdot 10^{-6}} = 48,9 \text{ МПа};$$

$$W_u = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 10^3}{32} = 98,13 \text{ см}^3.$$

Участок *BC*. Опасная точка *C*:

$$Q_y = 6 \text{ кН}, \quad Q_x = 6,4 \text{ кН}, \quad M_x = 8,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_y = 2,56 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad T = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим суммарный изгибающий момент:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{8,8^2 + 2,56^2} = 9,16 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\sigma = \frac{M_u}{W_u} = \frac{9,16 \cdot 10^3}{98,13 \cdot 10^{-6}} = 93,35 \text{ МПа}.$$

При кручении круглого стержня возникают касательные напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} = \frac{4,8 \cdot 10^3}{196,26 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \text{ МПа};$$

$$W_\rho = 2W_u = 2 \cdot 98,13 = 196,26 \text{ см}^3.$$

Участок *CD*. Опасная точка *D*:

$$Q_x = 6,4 \text{ кН}, \quad M_x = 8,8 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_y = 9,92 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N = 6 \text{ кН}, \quad T = 2,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{6 \cdot 10^3}{78,5 \cdot 10^{-4}} = 0,764 \text{ МПа};$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ см}^2;$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{8,8^2 + 9,92^2} = 13,26 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sigma = \frac{M_u}{W_u} = \frac{13,26 \cdot 10^3}{98,13 \cdot 10^{-6}} = 135,14 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{2,56 \cdot 10^3}{196,26 \cdot 10^{-6}} = 13,04 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность системы при расчетном сопротивлении $R = 210$ МПа. Расчетное напряжение по третьей теории прочности для плоского напряженного состояния определяется по формуле

$$\sigma_p^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Участок AB :

$$\tau = 0, \quad \sigma_p = \sqrt{\sigma^2} = 48,9 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Участок BC :

$$\sigma_p^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{93,35^2 + 4 \cdot 24,5^2} = 105,43 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Участок CD :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{W_u} = 0,764 + 135,14 = 135,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_p^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{135,9^2 + 4 \cdot 13,04^2} = 138,38 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Прочность стержневой системы на всех участках обеспечена.

7. УСТОЙЧИВОСТЬ

7.1. Расчет стержня на устойчивость

Задача 13

Стальной стержень сжимается продольной расчетной нагрузкой F . Расчетное сопротивление материала стержня $R = 200$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа.

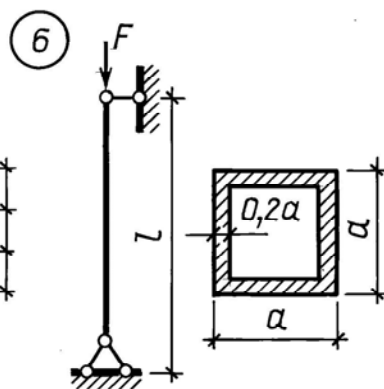
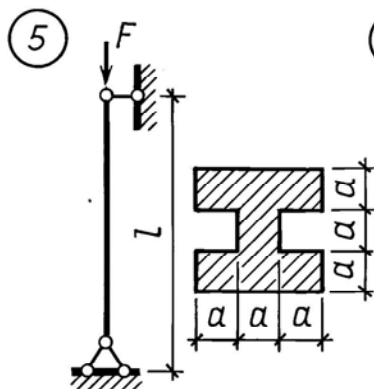
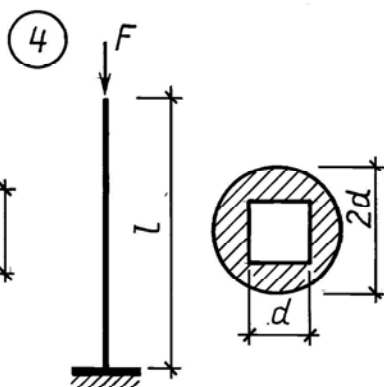
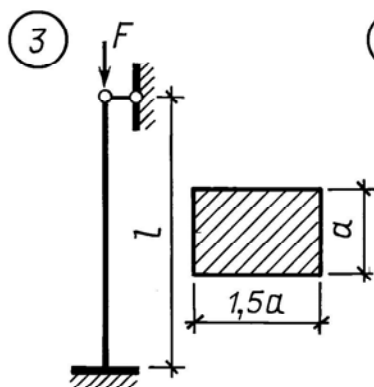
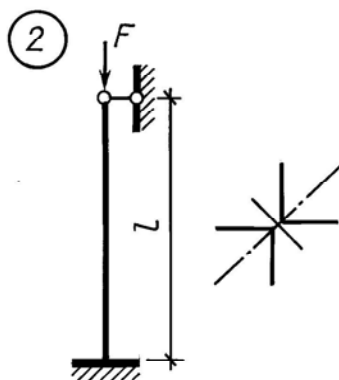
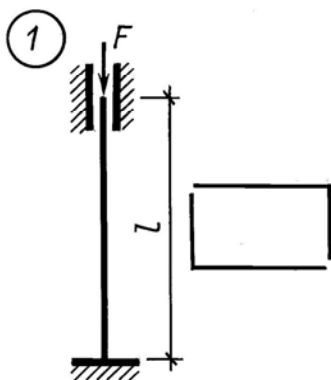
Требуется подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия устойчивости определить значение коэффициента запаса устойчивости.

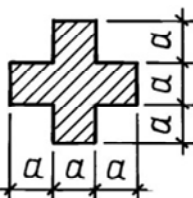
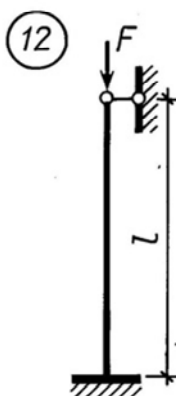
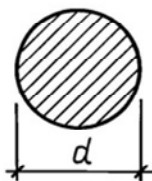
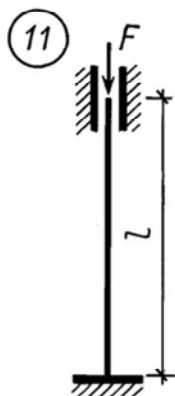
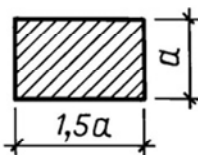
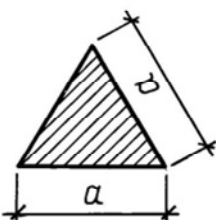
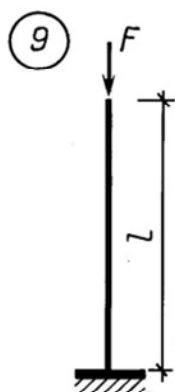
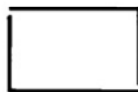
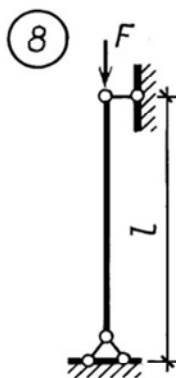
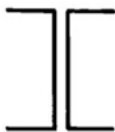
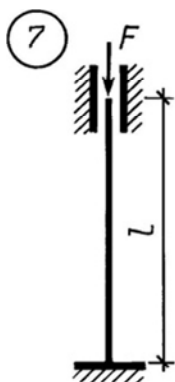
Исходные данные к задаче 13 представлены в табл. 7.1.

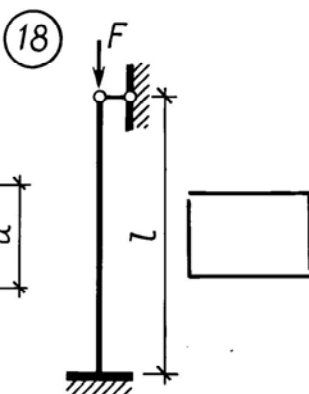
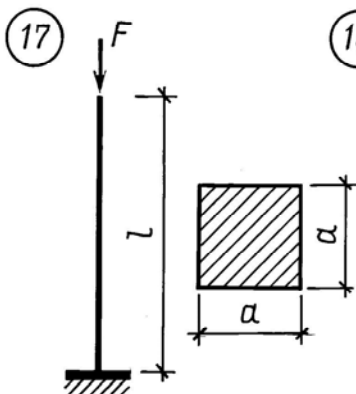
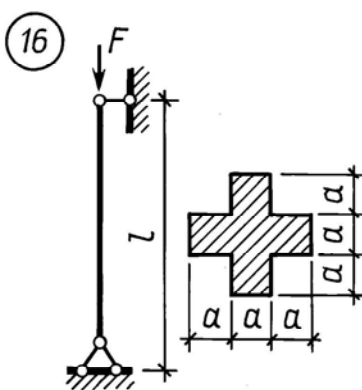
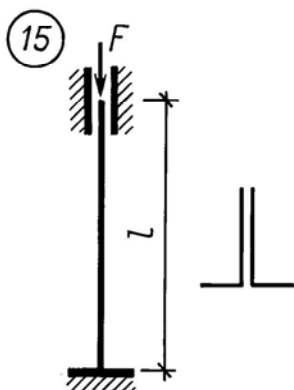
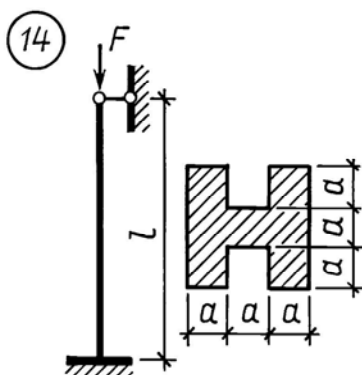
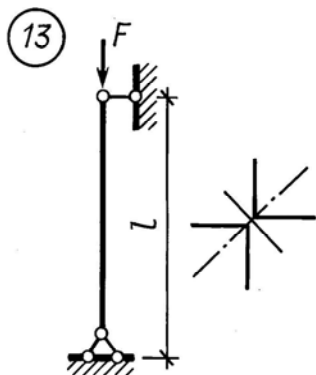
Таблица 7.1

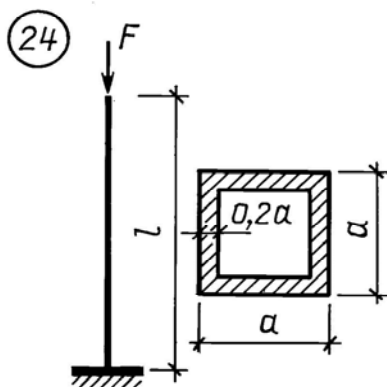
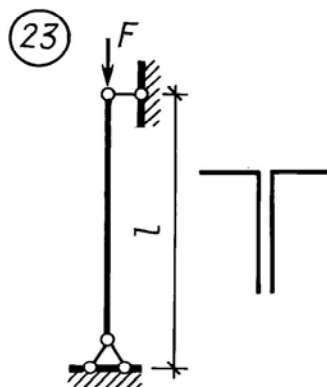
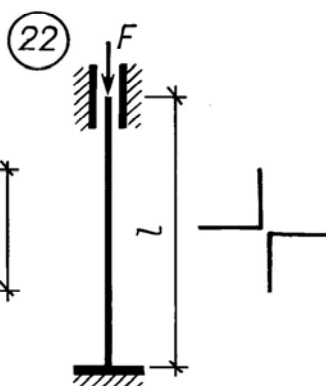
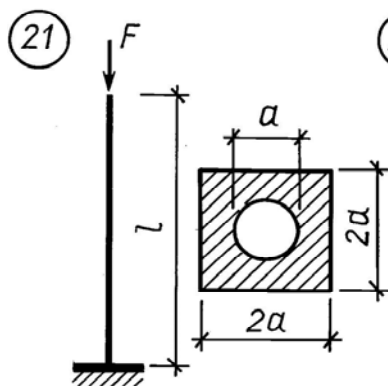
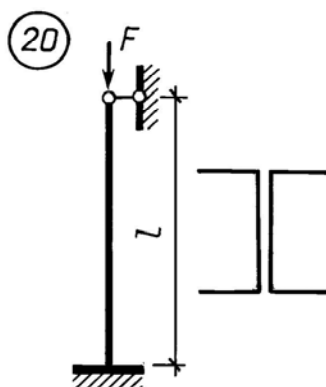
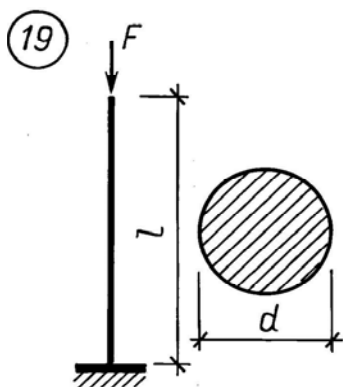
Исходные данные к задаче 13

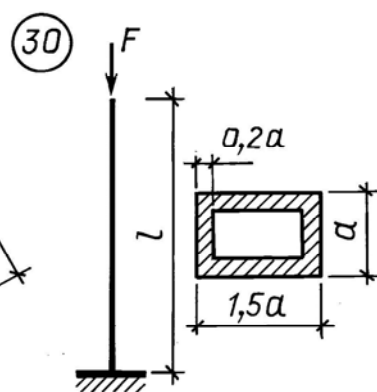
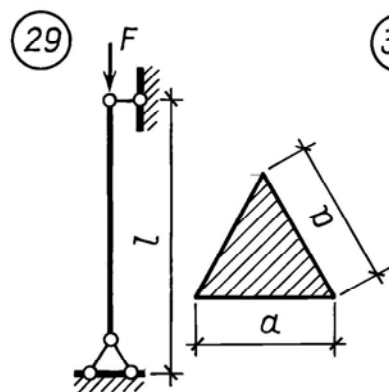
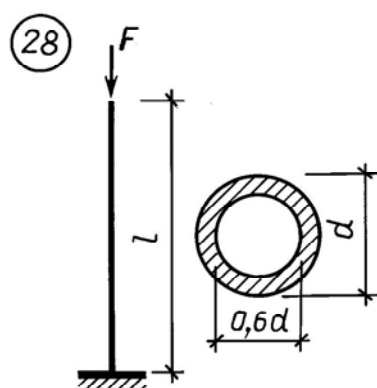
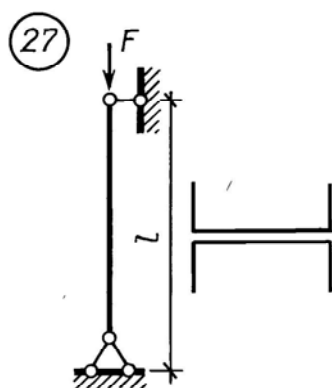
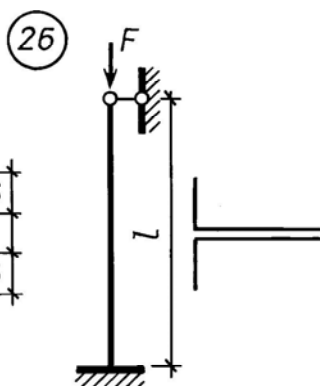
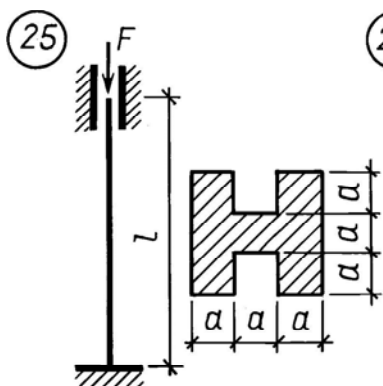
№ варианта	F , кН	l , м	№ варианта	F , кН	l , м	№ варианта	F , кН	l , м
1	110	1,8	11	200	2,5	21	134	1,8
2	160	2,8	12	100	2,2	22	280	2,8
3	190	2,2	13	140	2,6	23	220	2,4
4	100	1,6	14	172	2,2	24	110	1,8
5	120	2,5	15	210	2,8	25	144	2,8
6	164	2	16	110	1,5	26	282	2,6
7	194	2,6	17	124	1,6	27	224	2,4
8	120	2,4	18	178	2,6	28	180	1,6
9	130	1,6	19	216	1,7	29	150	2,4
10	170	1,5	20	160	2,5	30	186	1,5











Пример решения задачи 13

Пример 1. Стальной стержень (рис. 7.1) сжимается продольной расчетной нагрузкой F . Расчетное сопротивление материала стержня $R = 200$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа (рис. 7.1).

Требуется подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия устойчивости и определить значение коэффициента запаса устойчивости.

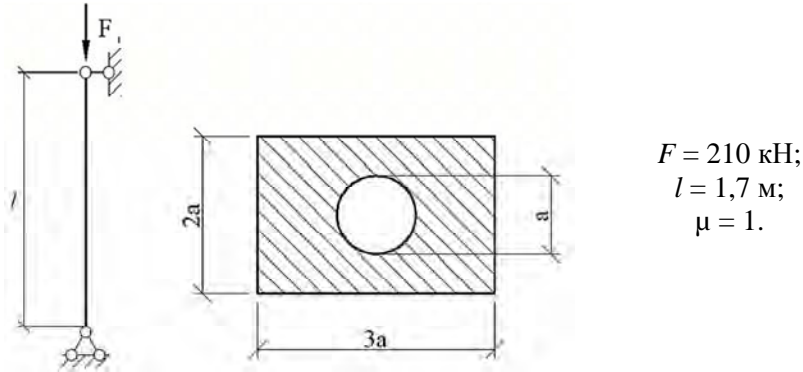


Рис. 7.1. Схема стержня и его поперечное сечение

Решение

Определим размеры поперечного сечения исходя из условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi R,$$

где φ – коэффициент снижения расчетного сопротивления материала при продольном изгибе (коэффициент продольного изгиба).

В расчетной формуле есть две неизвестные величины – коэффициент φ и искомая площадь A . Поэтому при подборе сечения необходимо использовать метод последовательных приближений.

Выразим геометрические характеристики через величину a . Так как потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости, определяем минимальный момент инерции:

$$I_{\min} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3a(2a)^3}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = 1,95a^4,$$

тогда площадь поперечного сечения

$$A = 3a2a - \frac{\pi a^2}{4} = 5,21a^2, \quad a = \sqrt{\frac{A}{5,21}} = 0,44\sqrt{A};$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,95a^4}{5,21a^2}} = 0,61a.$$

Приближение 1. В первом приближении коэффициент изгиба принимают $\varphi_1 = 0,5$. Тогда требуемая площадь сечения

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{210 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$a_1 = 0,44\sqrt{2,1 \cdot 10^{-3}} = 0,0201 \text{ м} = 2,01 \text{ см};$$

$$i_{\min_1} = 0,61a = 0,61 \cdot 0,0201 = 0,0123 \text{ м}.$$

Расчетная гибкость стержня

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min_1}} = \frac{1 \cdot 1,7}{0,0123} = 138,21.$$

По таблице (прил. 5) определяем значение коэффициента φ'_1 , соответствующего гибкости $\lambda_1 = 138,21$:

$$\lambda = 130, \quad \varphi = 0,425;$$

$$\lambda = 140, \quad \varphi = 0,376.$$

Путем линейной интерполяции получим:

$$\varphi'_1 = 0,425 - \frac{0,425 - 0,376}{10} \cdot 8,21 = 0,385.$$

Проверим выполнение условия устойчивости в первом приближении:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{210 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{-3}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа},$$

$$\varphi'_1 R = 0,385 \cdot 200 = 77 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 > \varphi'_1 R.$$

Перенапряжение составляет $\frac{100-77}{77} \cdot 100 = 29,8\% > 5\%$, что недопустимо. Необходимо уточнение размеров.

Приближение 2. За новое значение коэффициента φ_2 принимаем среднее арифметическое первых двух:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,385}{2} = 0,443,$$

тогда площадь сечения

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 R} = \frac{210 \cdot 10^3}{0,443 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$a_2 = 0,44 \sqrt{2,37 \cdot 10^{-3}} = 0,021 \text{ м} = 2,1 \text{ см},$$

радиус инерции

$$i_{\min 2} = 0,61 a_2 = 0,61 \cdot 0,021 = 12,81 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Определим гибкость стержня

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min 2}} = \frac{1 \cdot 1,7}{12,81 \cdot 10^{-3}} = 132,7.$$

Коэффициент φ'_2 рассчитываем для гибкости $\lambda_2 = 132,7$:

$$\lambda = 130, \quad \varphi = 0,425;$$

$$\lambda = 140, \quad \varphi = 0,376.$$

$$\varphi'_2 = 0,425 - \frac{0,425 - 0,376}{10} \cdot 2,7 = 0,412.$$

Проверим выполнение условий устойчивости:

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{210 \cdot 10^3}{2,37 \cdot 10^{-3}} = 88,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 88,6 \text{ МПа};$$

$$\varphi'_2 R = 0,412 \cdot 200 = 82,4 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет $\frac{88,6 - 82,4}{82,4} \cdot 100 = 7,52 \% > 5 \%$, что недопустимо.

Приближение 3. Определим коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,443 + 0,412}{2} = 0,428.$$

Площадь поперечного сечения

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 R} = \frac{210 \cdot 10^3}{0,428 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$a_3 = 0,44 \sqrt{2,45 \cdot 10^{-3}} = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

радиус инерции

$$i_{\min 3} = 0,61 a_3 = 0,61 \cdot 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,34 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

гибкость стержня

$$\lambda_3 = \frac{\mu l}{i_{\min 3}} = \frac{1 \cdot 1,7}{1,34 \cdot 10^{-2}} = 126,9.$$

Определим значение коэффициента φ'_3 :

$$\lambda = 120, \quad \varphi = 0,479;$$

$$\lambda = 130, \quad \varphi = 0,425;$$

$$\varphi'_3 = 0,479 - \frac{0,479 - 0,425}{10} \cdot 6,9 = 0,442;$$

$$\sigma_3 = \frac{F}{A_3} = \frac{210 \cdot 10^3}{2,45 \cdot 10^{-3}} = 85,71 \cdot 10^6 \text{ Па} = 85,71 \text{ МПа}.$$

Расчетное сопротивление

$$\varphi'_3 R = 0,442 \cdot 200 = 88,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 < \varphi'_3 R \quad (85,71 < 88,4 \text{ МПа}).$$

Недонапряжение составляет $\frac{88,4 - 85,71}{88,4} = 3,04 \% < 5 \%$, что допустимо.

Окончательно принимаем $a = 22$ мм и размеры сечения 44×66 мм.

$$I_{\min} = 1,95 a^4 = 1,95 \cdot 2,2^4 = 45,68 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = 0,61 \cdot 2,2 = 1,342 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 1,7}{1,342 \cdot 10^{-2}} = 126,7.$$

Находим величину критической силы. Так как $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$, то есть $126,7 > 100$, используем формулу Эйлера для определения критической силы:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 45,68 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 1,7)^2} =$$

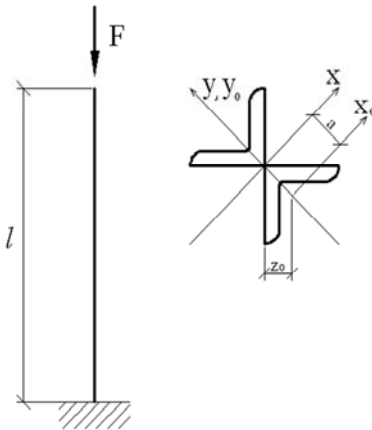
$$= 311,69 \cdot 10^3 \text{ Н} = 311,69 \text{ кН.}$$

Определим коэффициенты запаса устойчивости:

$$k_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{311,69}{210} = 1,48.$$

Пример 2. Стальной стержень сжимается продольной расчетной нагрузкой F . Расчетное сопротивление материала стержня $R = 200$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа (рис. 7.2).

Требуется подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия устойчивости и определить значение коэффициента запаса устойчивости.



$$F = 250 \text{ кН};$$

$$l = 1,4 \text{ м};$$

$$\mu = 2.$$

Рис. 7.2. Схема стержня

Решение

Определим размеры поперечного сечения исходя из условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi R.$$

Для расчета используем метод последовательных приближений.

Приближение 1. В первом приближении примем коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$, тогда

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{250 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

Площадь одного уголка

$$A_{\text{уг}} = \frac{A_1}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Из сортамента прокатной стали (прил. 3) выберем уголок $100 \times 100 \times 7$ с площадью $A_{\text{уг}} = 12,8 \text{ см}^2$. Определим радиусы инерции данного сечения относительно главных центральных осей x и y , которые являются осями симметрии сечения

$$i_y = \sqrt{\frac{2I_{y_0}}{2A_{\text{уг}}}} = i_{y_0}^{\text{уг}} = 1,99 \text{ см (находим в сортаменте, прил. 3)}.$$

$$i_x = \sqrt{\frac{2(I_{x_0} + A_{\text{уг}} a^2)}{2A_{\text{уг}}}} = \sqrt{i_{x_0}^{\text{уг}} + a^2};$$

$$i_{x_0} = 3,88 \text{ см (находим в сортаменте, прил. 3)};$$

$$a = z_0 \cos 45^\circ = 2,68 \cdot 0,707 = 1,895 \text{ см (} z_0 \text{ находим в сортаменте)};$$

$$i_x = \sqrt{3,88 + 1,895^2} = 2,73 \text{ см}.$$

Сравнивая i_y и i_x , определяем, что минимальным радиусом инерции является i_y .

Определим гибкость стержня:

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,4}{1,99 \cdot 10^{-2}} = 140,7.$$

По таблице (прил. 5) определяем значение коэффициента φ'_1 , соответствующего гибкости $\lambda_1 = 140,7$:

$$\lambda = 140, \quad \varphi = 0,376;$$

$$\lambda = 150, \quad \varphi = 0,328.$$

Путем линейной интерполяции получим:

$$\varphi'_1 = 0,376 - \frac{0,376 - 0,328}{10} \cdot 0,7 = 0,373.$$

Проверим выполнение условия устойчивости в первом приближении:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{250 \cdot 10^3}{2 \cdot 12,8 \cdot 10^{-4}} = 97,66 \cdot 10^6 \text{ Па} = 97,66 \text{ МПа};$$

$$\varphi'_1 R = 0,373 \cdot 200 = 74,6 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет $\frac{97,66 - 74,6}{74,6} \cdot 100 = 30,83 \% > 5 \%$, что недопустимо. Необходимо увеличить поперечное сечение.

Приближение 2. За новое значение коэффициента φ_2 принимаем среднее арифметическое первых двух:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,373}{2} = 0,437,$$

тогда площадь сечения

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 R} = \frac{250 \cdot 10^3}{0,437 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,86 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 28,6 \text{ см}^2;$$

$$A_{\text{уг}} = \frac{A_2}{2} = \frac{28,6}{2} = 14,3 \text{ см}^2.$$

В сортаменте выбираем уголок $110 \times 110 \times 7$, $A = 15,2 \text{ см}^2$,
 $i_{y0} = i_{\min} = 2,19 \text{ см}$.

Определяем гибкость стержня:

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,4}{2,19 \cdot 10^{-2}} = 127,9.$$

Из таблицы для $\lambda = 127,9$ выберем значение φ :

$$\lambda = 120, \quad \varphi = 0,479;$$

$$\lambda = 130, \quad \varphi = 0,425.$$

$$\varphi'_2 = 0,479 - \frac{0,479 - 0,425}{10} \cdot 7,9 = 0,436.$$

Проверим выполнение условий устойчивости:

$$\sigma_2 = \frac{F}{2A} = \frac{250 \cdot 10^3}{2 \cdot 15,2 \cdot 10^{-4}} = 82,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 82,2 \text{ МПа};$$

$$\varphi'_2 R = 0,436 \cdot 200 = 87,2 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 < \varphi'_2 R.$$

Недонапряжение составит $\frac{87,2 - 82,2}{87,2} \cdot 100 = 5,7 \%$, что для прокатного профиля приемлемо.

Окончательно принимаем сечение в виде двух уголков $110 \times 110 \times 7$,
 $I_{\min} = 72,7 \text{ см}^4$.

Находим величину критической силы. Так как $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$, то есть $127,9 > 100$, используем формулу Эйлера для определения критической силы:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 72,7 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 1,4)^2} =$$
$$= 365,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 365,7 \text{ кН.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$k_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{365,7}{250} = 1,46.$$

8. ДИНАМИКА

8.1. Расчет упругой системы на динамическую нагрузку

Задача 14

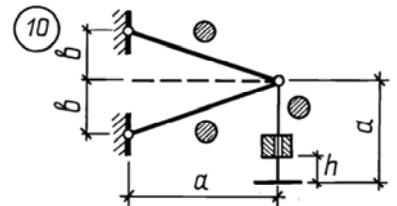
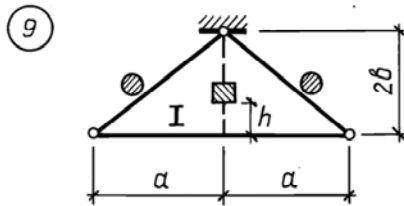
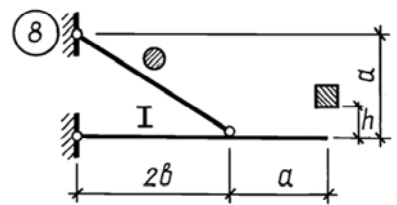
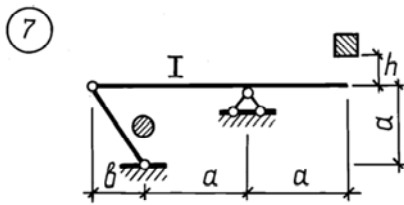
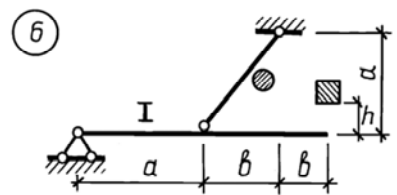
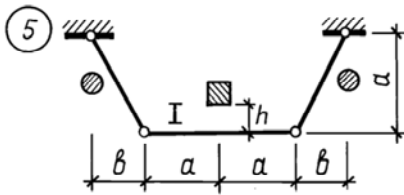
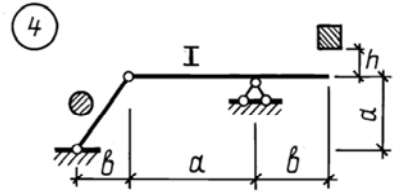
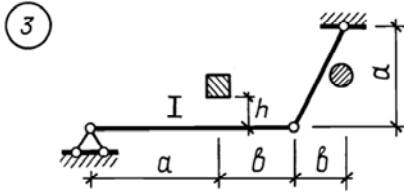
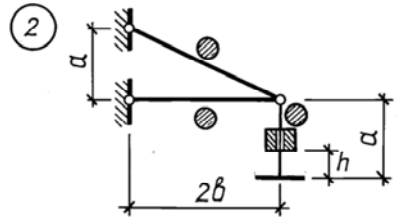
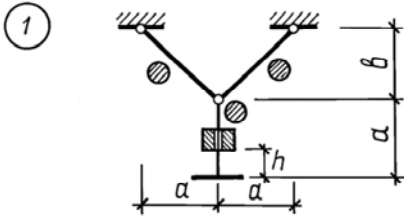
На упругую систему падает груз G с высоты h . Материал стержней – сталь. Расчетное сопротивление при статической нагрузке $R = 210$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа.

Требуется определить величины максимальных динамических напряжений в элементах системы, определить величину динамического перемещения точки приложения груза. Массу конструкции не учитывать.

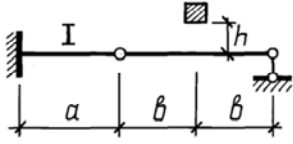
Исходные данные к задаче 14 представлены в табл. 8.1

Таблица 8.1

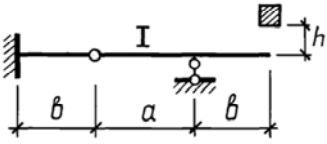
№ варианта	G , Н	h , см	a , м	b , м	Номер двутавра	Диаметр d , см
1	400	7	4,0	1,0	18	4,2
2	450	6,5	3,8	1,2	18	3,6
3	500	6	3,6	1,4	16	3,8
4	550	5,5	3,4	1,6	22	3,4
5	600	5	3,2	1,8	20	3,2
6	650	7	3,0	3,0	20	3,0
7	700	6,5	2,8	2,8	24	2,8
8	750	6	2,6	2,6	22	2,6
9	800	5,5	3,4	2,4	27	2,4
10	850	7	3,2	2,2	24	2,6



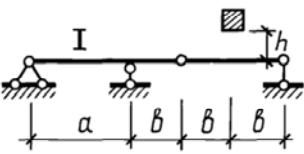
11



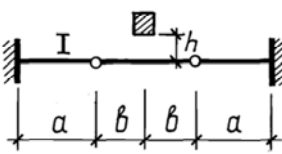
12



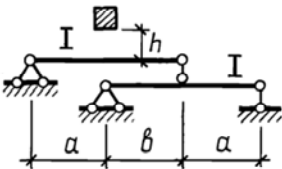
13



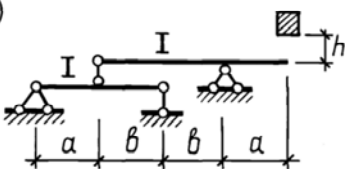
14



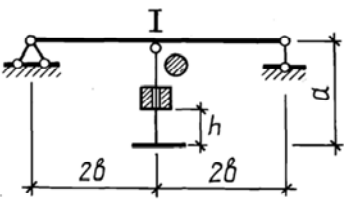
15



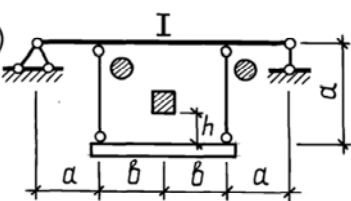
16



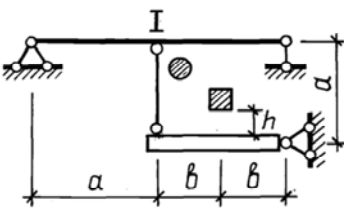
17



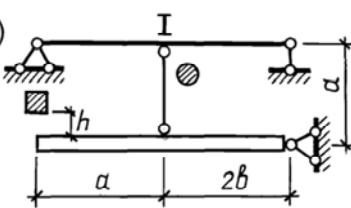
18

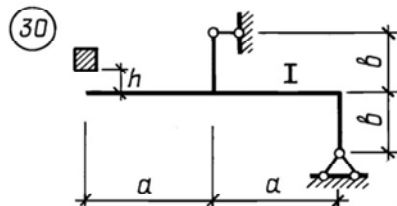
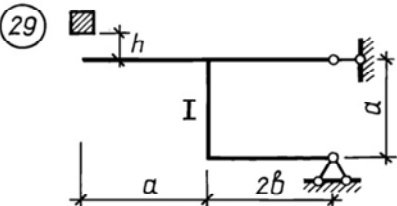
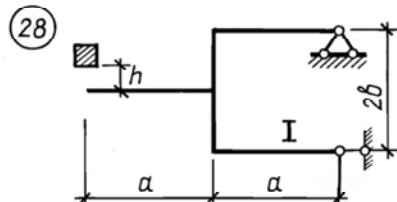
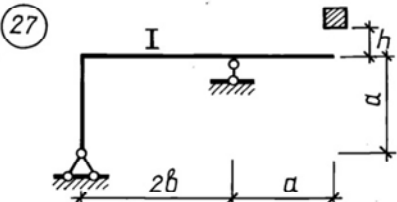
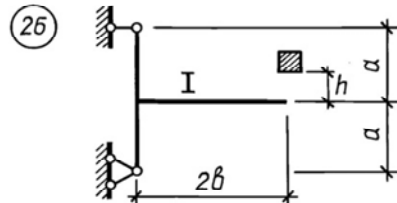
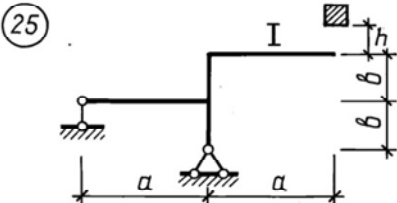
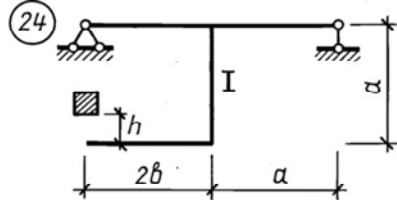
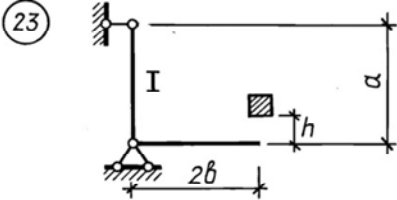
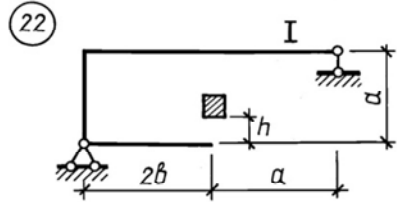
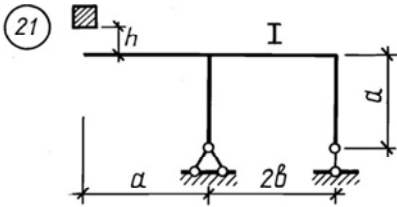


19



20





Пример решения задачи 14

На упругую систему падает груз G с высоты h . Материал стержней – сталь. Расчетное сопротивление при статической нагрузке $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа (рис. 8.1).

Требуется определить величины максимальных динамических напряжений в элементах системы определить величину динамического перемещения точки приложения груза.

Массу конструкции не учитывать.

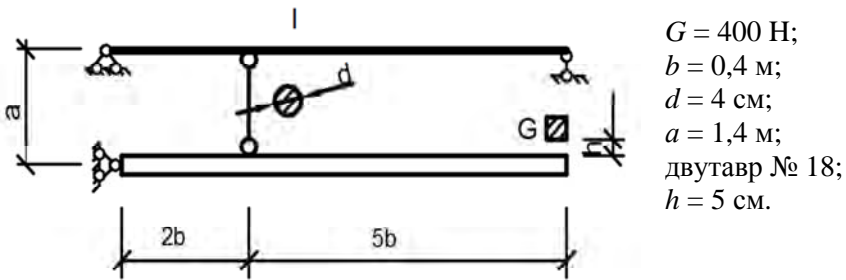


Рис. 8.1. Схема стержневой системы

Решение

Рассчитаем стержневую систему на статическую нагрузку. Определим статическое усилие в стержне (рис. 8.2).

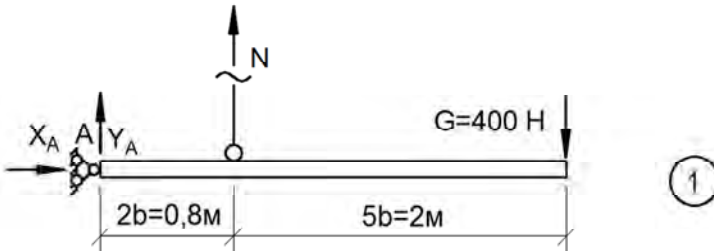


Рис. 8.2. Схема элемента 1

Составим уравнение равновесия

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\Sigma M_A = -N2b + G7b = 0;$$

$$N = \frac{G7b}{2b} = 3,5G = 3,5 \cdot 400 = 1400 \text{ Н.}$$

Рассчитаем опорные реакции в балке BC (рис. 8.3).

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$Y_C 7b - N2b = 0;$$

$$Y_C \cdot 2,8 = 1400 \cdot 0,8;$$

$$Y_C = 400 \text{ Н.}$$

$$\Sigma M_C = 0;$$

$$Y_B 7b - N5b = 0;$$

$$Y_B \cdot 2,8 = 1400 \cdot 2;$$

$$Y_B = 1000 \text{ Н;}$$

$$\Sigma Y = 400 + 1000 - 1400 = 0.$$

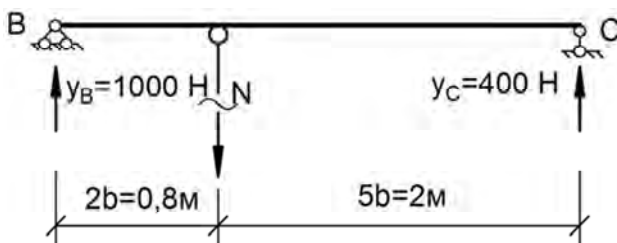


Рис. 8.3 Схема балки

Построим эпюру изгибающих моментов в балке BC (рис. 8.4).
 Определим удлинение стержня:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2;$$

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{Nl}{EA} = \frac{1400 \cdot 1,4}{200 \cdot 10^9 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4}} = 0,78 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,008 \text{ мм}.$$

Определим напряжение в стержне от статической нагрузки

$$\sigma_{\text{ст(ст)}} = \frac{N}{A} = \frac{1400}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 111,5 \cdot 10^4 \text{ Па} = 1,12 \text{ МПа}.$$

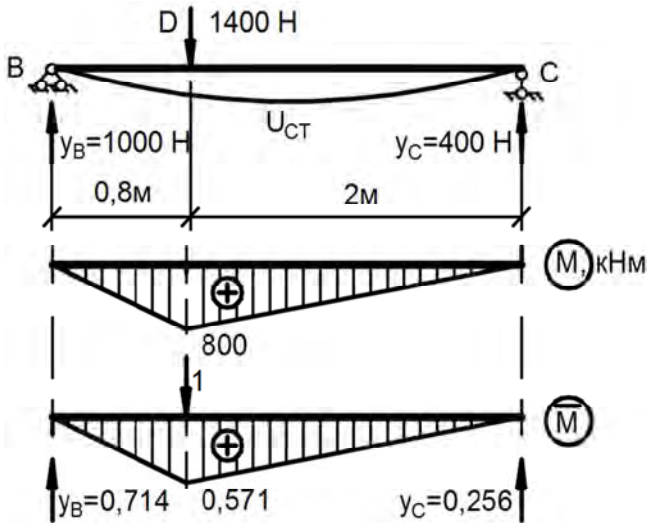


Рис. 8.4. Эпюры изгибающих моментов и единичная эпюра балки

Определим напряжение в балке от статической нагрузки:

$$\sigma_{\text{ст}(\sigma)} = \frac{M_{\text{max}}}{W_X} = \frac{800}{143 \cdot 10^{-6}} = 5,59 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,59 \text{ МПа},$$

где $W_X = 143 \text{ см}^3$ (выпишем из сортамента, прил. 1).

Определим прогиб балки в точке D от статического действия нагрузки методом сил. Для этого приложим в точке единичную силу и построим эпюру изгибающих моментов от этой силы (рис. 8.4)

$$Y_B = \frac{1 \cdot 0,8}{2,8} = 0,286, \quad Y_C = \frac{1 \cdot 2}{2,8} = 0,714, \quad M_D = 0,571.$$

$$v_{D_{ст}} = \frac{1}{EI_X} \left(800 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,571 + 800 \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,571 \right) = \frac{426,3}{EI_X}.$$

Выпишем из сортамента (прил. 1) значение момента инерции для двутавра № 18: $I_X = 1290 \text{ см}^4$.

Прогиб в точке D от статической нагрузки

$$v_{D_{ст}} = \frac{426,3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,17 \text{ мм}.$$

Определим прогиб в точке падения груза от статической нагрузки (рис. 8.5).

$$\frac{v_{ст}}{7b} = \frac{v_{D_{ст}} + \Delta l_{ст}}{2b};$$

$$v_{ст} = \frac{7(v_{D_{ст}} + \Delta l_{ст})}{2} = \frac{7(0,17 + 0,008)}{2} = 0,62 \text{ мм}.$$

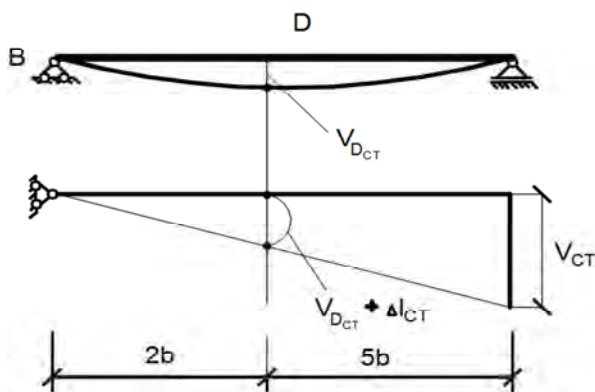


Рис. 8.5. Схема прогибов балки от статической нагрузки

Определим динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 50}{0,62}} = 13,7.$$

Определим максимальные динамические напряжения в стержне и балке

$$\sigma_{дст} = \sigma_{стст} k_d = 1,12 \cdot 13,7 = 15,34 \text{ МПа} < R;$$

$$\sigma_{дб} = \sigma_{стб} k_d = 5,59 \cdot 13,7 = 76,6 \text{ МПа} < R.$$

Прочность системы обеспечена.

Определим прогиб в точке падения груза от динамической нагрузки:

$$v_d = v_{ст} k_d = 0,62 \cdot 13,7 = 8,5 \text{ мм.}$$

9. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

9.1. Исследование напряженно-деформированного состояния в точке

Задача 15

Напряженное состояние в точке задано шестью компонентами σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} (табл. 9.1) (рис. 9.1). Требуется определить главные напряжения, максимальные касательные напряжения, направляющие косинусы главных площадок, значения главных относительных деформаций, относительное изменение объема, удельную потенциальную энергию изменения объема и формы и полную удельную потенциальную энергию.

Таблица 9.1

Исходные данные к задаче 15

№ варианта	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}	μ	E , ГПа
1	10	-60	100	-10	20	10	0,24	200
2	-20	70	-110	40	-30	-50	0,30	210
3	30	-80	120	-40	-20	10	0,28	220
4	-40	90	-130	20	80	80	0,25	200
5	50	-100	140	-60	60	20	0,24	210
6	-60	110	-150	80	50	-50	0,30	220
7	70	120	-50	40	-40	80	0,27	200
8	-80	130	60	30	90	60	0,25	210
9	90	-140	70	60	20	-20	0,30	220
10	-100	150	-80	-50	50	30	0,24	200
11	110	-50	90	70	-40	40	0,28	210
12	120	60	-100	80	-30	30	0,25	220
13	130	-70	110	50	40	-50	0,27	200
14	140	80	-40	20	-10	40	0,30	210
15	150	-90	50	40	-40	20	0,28	220

№ варианта	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}	μ	E , ГПа
16	-10	40	-60	10	-10	20	0,25	200
17	20	-50	100	20	40	10	0,27	210
18	-30	60	-110	-10	30	20	0,28	220
19	40	-70	120	60	-50	50	0,25	200
20	-50	80	-10	20	30	-40	0,24	210
21	60	-90	20	50	-40	50	0,30	220
22	70	100	-30	20	20	-10	0,27	200
23	80	-110	40	30	-40	50	0,25	210
24	-90	120	-50	50	60	-20	0,30	220
25	100	-130	60	20	-50	40	0,27	200
26	110	50	-70	30	40	-10	0,28	210
27	120	-60	10	10	10	-20	0,26	220
28	-130	70	-20	20	30	-40	0,24	200
29	140	-80	30	30	70	-60	0,27	210
30	150	90	-40	-20	-40	30	0,28	220

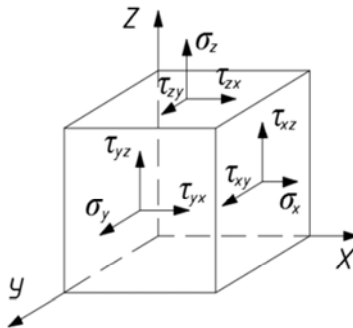


Рис. 9.1. Элементарный параллелепипед в общем случае нагружения

Пример решения задачи 15

Напряженное состояние в точке задано шестью компонентами $\sigma_x = 50$ МПа, $\sigma_y = -20$ МПа, $\sigma_z = 30$ МПа, $\tau_{xy} = -10$ МПа, $\tau_{yz} = 10$ МПа, $\tau_{zx} = 10$ МПа, $E = 200$ ГПа, $\mu = 0,35$.

Требуется определить главные напряжения, максимальные касательные напряжения, направляющие косинусы главных площадок, начения главных относительных деформаций, относительное изменение объема, удельную потенциальную энергию изменения объема и формы и полную удельную потенциальную энергию.

Решение

Определим инварианты напряженного состояния:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= 50(-20) + (-20)30 + 30 \cdot 50 - (-10)^2 - 10^2 - 10^2 = \\ &= -1000 - 600 + 1500 - 100 - 100 - 100 = -400 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 50 - 20 + 30 = 60 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \tau_{xy}^2 - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} = \\ &= 50(-20) \cdot 30 - 30(-10)^2 - 50 \cdot 10^2 - (-20) \cdot 10^2 + 2(-10) \cdot 10 \cdot 10 = \\ &= -30\,000 - 3000 - 5000 + 2000 - 2000 = -38\,000 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Определим главные напряжения, решая кубическое уравнение любым из известных способов:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0;$$

$$\sigma^3 - 60\sigma^2 - 400\sigma + 38\,000 = 0.$$

Получим три корня уравнения и, с учетом условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, запишем

$$\sigma_1 = 54,57 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 29,24 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -23,81 \text{ МПа}.$$

Проверим правильность вычисления главных напряжений. Так как I_1, I_2, I_3 – инварианты, то их значения постоянны. Определим значения инвариантов в главной системе координат:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 54,57 + 29,24 - 23,81 = 60 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3 = 54,57 \cdot 29,24 - 23,81 \cdot 54,57 - 29,24 \cdot 23,81 = 1595,63 - 1299,31 - 696,20 = -399,88 \text{ МПа};$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 54,57 \cdot 29,24 \cdot (-23,81) = -37991,87 \text{ МПа}.$$

Результаты вычислений I_1, I_2, I_3 соответствуют полученным в заданной системе координат.

Находим максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{54,57 + 23,81}{2} = 39,19 \text{ МПа};$$

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{29,24 + 23,81}{2} = 26,52 \text{ МПа};$$

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{54,57 - 29,24}{2} = 12,67 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = 39,19 \text{ МПа}.$$

Определим направляющие косинусы главных площадок. Для этого необходимо подставить последовательно значения σ_i ($i = 1, 2, 3$) в любые два уравнения системы (третье является линейно зависимым):

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{zx}n = 0;$$

$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0;$$

$$\tau_{xy}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0$$

и решить их совместно с уравнением $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Выражения для l_i, m_i и n_i можно получить, используя известные из математики формулы Крамера:

$$l_i = \frac{\Delta_{1i}}{D_i}, \quad m_i = \frac{\Delta_{2i}}{D_i}, \quad n_i = \frac{\Delta_i}{D_i};$$

$$\Delta_{1i} = -(\sigma_y - \sigma_i)\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz};$$

$$\Delta_{2i} = -(\sigma_x - \sigma_i)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{xz};$$

$$\Delta_i = (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2;$$

$$D_i = \sqrt{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2 + \Delta_i^2}.$$

Система уравнений для определения l_1, m_1, n_1 будет иметь следующий вид:

$$(50 - 54,57)l_1 + 10m_1 + 10n_1 = 0;$$

$$(-10)l_1 - (20 + 54,57)m_1 + 10n_1 = 0;$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -(\sigma_y - \sigma_1)\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz} = -(-20 - 54,57)10 + \\ &+ (-10)10 = 745,7 - 100 = 645,7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{21} &= -(\sigma_x - \sigma_1)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{xz} = -(50 - 54,57)10 + \\ &+ (-10)10 = 45,7 - 100 = -54,3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{xy}^2 = (50 - 54,7)(-20 - 54,57) - \\ &- (-10)^2 = 240,78. \end{aligned}$$

$$D_1 = \sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{21}^2 + \Delta_1^2} = \sqrt{645,7^2 + (-54,3)^2 + 240,78^2} = 691,268;$$

$$l_1 = \frac{\Delta_{11}}{D_1} = \frac{645,7}{691,268} = 0,9341;$$

$$m_1 = \frac{\Delta_{21}}{D_1} = -\frac{54,3}{691,268} = -0,0786;$$

$$n_1 = \frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{240,78}{691,268} = 0,3483.$$

Условие проверки выполняется

$$0,9341^2 + (-0,0786)^2 + 0,3483^2 = 1.$$

Определим l_2 , m_2 , n_2 :

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= -(\sigma_y - \sigma_2)\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz} = -(-20 - 29,24)10 + \\ &+ (-10)10 = 429,4 - 100 = 392,4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{22} &= -(\sigma_x - \sigma_2)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{xz} = -(50 - 29,24)10 + \\ &+ (-10)10 = 207,6 - 100 = -307,6;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= (\sigma_x - \sigma_2)(\sigma_y - \sigma_2) - \tau_{xy}^2 = (50 - 29,24)(-20 - 29,24) - \\ &- (-10)^2 = -1122,2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2 &= \sqrt{\Delta_{12}^2 + \Delta_{22}^2 + \Delta_2^2} = \sqrt{392,4^2 + (-307,6)^2 + (-1122,2)^2} = \\ &= 1227,98.\end{aligned}$$

$$l_2 = \frac{\Delta_{12}}{D_2} = \frac{392,4}{1227,98} = 0,3195;$$

$$m_2 = \frac{\Delta_{22}}{D_2} = -\frac{307,6}{1227,98} = -0,2505;$$

$$n_2 = \frac{\Delta_2}{D_2} = -\frac{1122,2}{1227,98} = -0,9139.$$

Условие проверки выполняется

$$0,3195^2 + (-0,2505)^2 + (-0,9139)^2 = 1.$$

Определим l_3, m_3, n_3 :

$$\Delta_{13} = -(\sigma_y - \sigma_3)\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz} = -(-20 + 23,81)10 + (-10)10 = -38,1 - 100 = -138,1;$$

$$\Delta_{23} = -(\sigma_x - \sigma_3)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{xz} = -(50 + 23,81)10 + (-10)10 = -738,1 - 100 = -838,1;$$

$$\Delta_2 = (\sigma_x - \sigma_3)(\sigma_y - \sigma_3) - \tau_{xy}^2 = (50 + 23,81)(-20 + 23,81) - (-10)^2 = 181,21.$$

$$D_3 = \sqrt{\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_3^2} = \sqrt{(-138,1)^2 + (-838,1)^2 + 181,21^2} = 868,52.$$

$$l_3 = \frac{\Delta_{13}}{D_3} = -\frac{138,1}{868,52} = 0,159;$$

$$m_3 = \frac{\Delta_{23}}{D_3} = -\frac{838,1}{868,52} = -0,965;$$

$$n_3 = \frac{\Delta_3}{D_3} = \frac{181,21}{868,52} = 0,2086.$$

Условие проверки выполняется

$$(-0,159)^2 + (-0,965)^2 + 0,2086^2 = 1.$$

Определим значения главных относительных деформаций, используя закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [54,57 - 0,35(29,24 - 23,81)] = 26,33 \cdot 10^{-5} \text{ (растяжение);} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [29,24 - 0,35(-23,81 + 54,57)] = 9,24 \cdot 10^{-5} \text{ (растяжение);}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-23,81 - 0,35(29,24 + 54,57)] = -26,57 \cdot 10^{-5} \text{ (сжатие)}.\end{aligned}$$

Определим относительное изменение объема:

$$e_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (26,33 + 9,23 - 26,57)10^{-5} = 9,05 \cdot 10^{-5}.$$

Определим удельную потенциальную энергию изменения объема:

$$\begin{aligned}U_0^{об} &= \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \\ &= \frac{1-2 \cdot 0,35}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} (54,57 + 29,24 - 23,81)^2 = 90 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Определим удельную потенциальную энергию изменения формы:

$$\begin{aligned}U_0^\phi &= \frac{1-2\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \\ &= \frac{1-2 \cdot 0,35}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} [(54,57 - 29,24)^2 + (29,24 + 23,81)^2 + \\ &\quad + (54,57 + 23,81)^2] = 1079 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Определим полную удельную потенциальную энергию деформации:

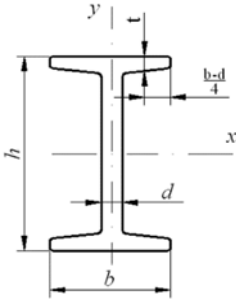
$$U_0 = U_0^\phi + U_0^{об} = (1079,9 + 90)10^{-5} = 1169,9 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 1995.
2. Балыкин, М. К. Сопротивление материалов: сборник заданий для расчетно-проектировочных работ для строительных специальностей / М. К. Балыкин [и др.]. – Минск : БНТУ, 2003.
3. Винокуров, Е. Ф. Сопротивление материалов: расчетно-проектировочные работы / Е. Ф. Винокуров, А. Г. Петрович, Л. И. Шевчук. – Минск : Вышэйшая школа, 1987.
4. Заяц, В. Н. Сопротивление материалов / В. Н. Заяц, М. К. Балыкин, И. А. Голубев. – Минск : БГПА, 1998.
5. Петрович, А. Г. Сборник задач расчетно-проектировочных работ по курсу «Сопротивление материалов»: в 2 ч. / А. Г. Петрович [и др.]. – Минск : БПИ, 1979. – Ч. 1.
6. Петрович, А. Г. Сборник задач расчетно-проектировочных работ по курсу «Сопротивление материалов»: в 2 ч. / А. Г. Петрович [и др.]. – Минск : БПИ, 1981. – Ч. 2.
7. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев : Вища школа, 1986.
8. Смирнов, А. Ф. Сопротивление материалов / А. Ф. Смирнов [и др.]. – М. : Высшая школа, 1975.
9. Балыкин, М. К. Сопротивление материалов: лабораторный практикум / М. К. Балыкин [и др.]. – Минск : БГПА, 1999.
10. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов. Практикум по решению задач : учебное пособие / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2009. – 688 с. : ил.
11. Сборник задач для расчетно-проектировочных работ по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов строительных специальностей / сост. С. И. Зиневич [и др.]. – Минск : БНТУ, 2012. – 108 с.
12. Задачи с решениями по сопротивлению материалов / сост.: Е. А. Евсеева, С. И. Зиневич, С. В. Соболевский. – Минск : БНТУ, 2014. – 138 с.
13. Нагрузка и воздействие : СНиП 2.01.07–85. – Госстрой СССР, 1985.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239–89*)

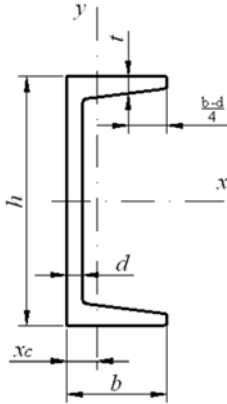


I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент площади
 полусечения;
 i – радиус инерции

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						
	h	b	d	t			x				y		
							I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	72,6	57	19062	953	16,2	545	667	86	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сталь горячекатаная. Швеллерная (по ГОСТ 8240–89)

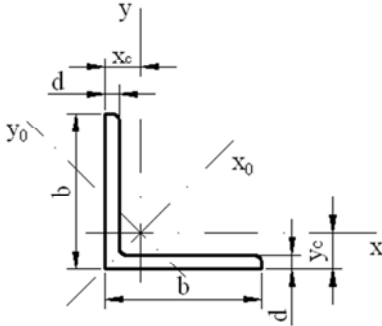


I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент площади
 полусечения;
 i – радиус инерции

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность P , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							x_c , см
	h	b	d	t			x				y			
							I_{xx} , см ⁴	W_{xx} , см ³	i_{xx} , см	S_{xx} , см ³	I_{yy} , см ⁴	W_{yy} , см ³	i_{yy} , см	
5	50	32	4,4	7	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,6	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	160	64	5	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	160	68	5	9	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	270	95	6	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Рекомендуемый сортамент равнополочных уголков (по ГОСТ 8509–86)



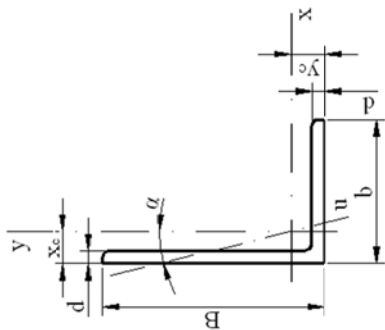
I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент площади
 полусечения;
 i – радиус инерции

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							x_c, y_c , см
	b	d			x		x_0		y_0		I_{y_0} , см ⁴	
					I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} , см ⁴	I_{x_0} , см	I_{y_0} , см ⁴	I_{y_0} , см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,89	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
		4	1,46	1,15	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
3	30	3	1,74	1,36	1,45	0,91	2,3	1,15	0,6	0,59	0,85	0,85
		4	2,27	1,78	1,84	0,9	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	2,68	1,13
		5	3,79	2,98	5,53	1,21	8,75	1,52	2,3	0,78	3,22	1,17
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1	4,16	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,63	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
		5	4,8	3,77	11,2	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
6,3	63	4	4,96	3,9	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
		6	7,28	5,72	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,9	1,78
7	70	5	6,86	5,38	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,7	1,9
		6	8,15	6,39	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,1	1,94
		7	9,42	7,39	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,2	1,99
		8	10,67	8,37	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,2	2,02

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7,5	75	5	7,39	5,8	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,1	2,02
		6	8,78	6,89	46,57	2,3	73,87	2,9	19,28	1,48	27,3	2,06
		7	10,15	7,97	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	31,2	2,1
		8	11,5	9,02	59,84	2,28	94,89	2,87	24,8	1,47	35	2,15
8	80	9	12,83	10,07	66,1	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,6	2,18
		6	9,38	7,36	56,97	2,47	90,4	3,11	23,54	1,58	33,4	2,19
		7	10,85	8,51	65,31	2,45	103,6	3,09	26,97	1,58	38,3	2,23
9	90	8	12,3	9,65	73,36	2,44	116,3	3,08	30,32	1,57	43	2,27
		6	10,61	8,33	82,1	2,78	130	3,5	33,97	1,79	48,1	2,43
		7	12,28	9,64	94,3	2,77	149,6	3,49	38,94	1,78	55,4	2,47
		8	13,93	10,93	106,1	2,76	168,4	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	100	9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	68	2,55
		7	13,75	10,79	130,5	3,08	207	3,88	54,16	1,98	76,4	2,71
		8	15,6	12,25	147,1	3,07	233	3,87	60,92	1,98	86,3	2,75
		10	19,24	15,1	178,9	3,05	283	3,84	74,08	1,96	110	2,83
12,5	125	12	22,8	17,9	208,9	3,03	330	3,81	86,84	1,95	122	2,91
		14	26,28	20,63	237,1	3,00	374	3,78	99,32	1,94	138	2,99
		8	19,69	15,46	294	3,87	466	4,87	121,9	2,49	172	3,36
		9	22	17,3	327	3,86	520	4,86	135,8	2,48	192	3,4
		10	24,33	19,1	359	3,85	571	4,84	148,5	2,47	211	3,45
14	140	12	28,89	22,68	422	3,82	670	4,82	174,4	2,46	248	3,53
		14	33,37	26,2	481	3,8	763	4,78	199,6	2,45	282	3,61
		16	37,77	29,65	538	3,78	852	4,75	224,2	2,44	315	3,68
		9	24,72	19,41	465	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
16	160	10	27,33	21,45	512	4,33	813	5,46	210	2,78	301	3,82
		12	32,49	25,5	602	4,31	956	5,43	248	2,76	354	3,9
		10	31,43	24,67	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
		11	34,42	27,02	844	4,95	1340	6,24	347	3,18	496	4,35
		12	37,39	29,35	912	4,94	1450	6,23	375	3,17	537	4,39
		14	43,57	33,97	1046	4,92	1662	6,2	430	3,16	615	4,47
20	200	16	49,07	38,52	1175	4,89	1865	6,17	484	3,14	690	4,55
		18	54,79	43,01	1290	4,87	2061	6,13	537	3,13	771	4,63
		20	60,4	47,44	1418	4,85	2248	6,1	589	3,12	830	4,7
		12	47,1	36,97	1822	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
		13	50,85	39,92	1960	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
		16	61,98	48,65	2362	6,17	3755	7,78	969	3,96	1393	5,54
25	250	20	76,54	60,08	2871	6,12	4560	7,72	1181	3,93	1689	5,7
		25	94,29	74,02	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
		30	111,54	87,56	4019	6	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07
		16	78,4	61,55	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
		18	87,72	68,86	5247	7,73	8336	9,75	2157	4,96	3089	6,83
		20	96,96	76,11	5764	7,71	9159	9,72	2370	4,94	3395	6,91
		22	106,12	83,31	6270	7,09	9961	9,69	2579	4,93	3691	7
		25	119,71	93,97	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11
25	250	28	133,12	104,5	7716	7,61	12243	9,59	3189	4,9	4527	7,23
		30	141,96	111,44	8176	7,59	12964	9,56	3388	4,89	4788	7,31

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Рекомендуемый сортамент неравнополочных уголков (по ГОСТ 8510-86)



B – ширина большой полки;

b – ширина малой полки;

d – толщина полки;

I – момент инерции;

i – радиус инерции;

x_c, y_c – расстояние от центра тяжести до наружных граней полки;

α – угол наклона главной центральной оси

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения $A, \text{см}^2$	Линейная плотность $\rho, \text{кг/м}$	Геометрические характеристики относительно осей						$x_c, \text{см}$	$y_c, \text{см}$	$I_{x_p}, \text{см}^4$	$\text{tg } \alpha$	
	B	b			d	x		y_0		u					
						$I_{x_p}, \text{см}^4$	$i_{x_p}, \text{см}$	$I_{y_p}, \text{см}^4$	$i_{y_p}, \text{см}$	$I_{u_p}, \text{см}^4$					$i_{u_p}, \text{см}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	
			4	1,94	1,52	1,93	1	0,57	0,54	0,35	0,43	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281
			5	3,03	2,37	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,86	0,53	0,53	0,66	1,41	1,44
5/3,2	50	32	3	2,42	1,9	6,18	1,6	1,99	0,91	1,18	0,7	0,72	1,60	2,01	0,403	
			4	3,17	2,4	7,98	1,59	2,56	0,9	1,52	0,69	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	
			5	4,98	3,91	19,91	2	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	
			6	5,9	4,63	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,85	1,07	2,2	9,27	0,386
7,5/5	75	60	5	6,11	4,79	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12	0,436	
			6	7,25	5,69	40,92	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	1,08	1,21	2,44	14,1	0,435
			7	8,37	6,57	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435
9/5,6	90	56	8	9,47	7,43	52,38	2,35	18,52	1,4	10,87	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43	
			5,5	7,86	6,17	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384
			6	8,54	6,7	70,58	2,88	21,22	1,58	12,7	1,22	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384
10/6,3	100	63	8	11,18	8,77	90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,38	
			6	9,58	7,53	98,29	3,2	30,58	1,79	18,2	1,38	1,38	1,42	3,23	31,5	0,393
			7	11,09	8,7	112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,37	1,46	3,28	36,1	0,392
			8	12,57	9,87	126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,5	3,32	40,75	0,391	
			10	15,47	12,14	153,95	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,35	1,58	3,4	48,6	0,387

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
12,5/8	125	80	7	14,06	11,04	226	4,01	73,73	2,29	43,4	1,76	1,8	4,01	74,7	0,407	
			8	15,98	12,58	225	4	80,95	2,28	48,82	1,75	1,84	1,84	4,05	84,1	0,406
			10	19,7	15,47	311	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	1,74	1,92	4,14	102
16/10	160	100	12	23,36	18,34	364	3,95	116,84	2,24	69,47	1,72	2	4,22	118	0,4	
			9	22,87	17,96	605	5,15	186	2,85	110,4	2,2	2,24	2,24	5,19	194	0,391
			10	25,28	19,85	666	5,13	204	2,84	121,16	2,19	2,28	2,19	2,28	5,23	213
20/12,5	200	125	12	30,04	23,58	784	5,11	238	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249	0,388	
			14	34,72	27,26	897	5,08	271	2,8	162,49	2,16	2,43	2,43	5,4	282	0,385
			11	34,87	27,37	1449	6,45	446	3,58	263	2,75	2,79	2,75	2,79	6,5	465
20/12,5	200	125	12	37,89	29,74	1568	6,43	481	3,57	285	2,74	2,83	6,54	503	0,392	
			14	43,87	34,43	1800	6,41	550	3,54	326	2,73	2,91	2,91	6,62	575	0,390
			16	49,77	39,07	2026	6,38	616	3,52	366	2,72	2,99	2,99	6,71	643	0,388

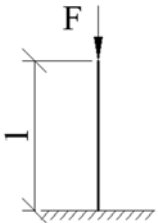
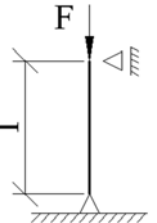


ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Коэффициент φ продольного изгиба центрально-сжатых элементов

Гибкость, λ	Значения φ для элементов из							
	стали с расчетным сопротивлением R , МПа						чугуна	древесины
	200	240	280	320	360	400		
0	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,97	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,91	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,81	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,69	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,57	0,8
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,44	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,34	0,608
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,26	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,2	0,37
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,16	0,3
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	–	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,26	–	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	–	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,24	0,215	0,195	–	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	–	0,133
160	0,29	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	–	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,15	0,136	–	0,104
180	0,233	0,196	0,17	0,15	0,135	0,123	–	0,093
190	0,21	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	–	0,083
200	0,191	0,161	0,14	0,124	0,111	0,101	–	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	–	0,068
220	0,16	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	–	0,062

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Влияние условий закрепления концов стержня
на величину критической силы

Схема стойки				
μ	2	1	0,7	0,5

Значение коэффициентов a и b в формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Материал	λ _{пред}	a, МПа	b, МПа
Ст 2, Ст 3	100	310	1,14
Ст 5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремнистая сталь	100	589	3,82
Дерево	110	29,3	0,194
Чугун	80	776	12
Для чугуна $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$, где $c = 0,53$			

Задача 1 «Расчет статически определимого стержня»

Условие

Содержание

условия

Расчетная схема

Чертеж

расчетной

схемы

Задача 2 «Расчет статически определимой стержневой системы»

Условие

Содержание

условия

Расчетная схема

Чертеж

расчетной

схемы

Примечание. Каждую задачу следует начинать с новой страницы.

Решение задачи следует вести в числовом виде, вычисления достаточно вести с точностью до двух значащих цифр после запятой. Расчеты следует проводить последовательно, аккуратно в соответствии с требованиями задания. Если одна из расчетных величин определяется по готовой формуле, то недостаточно привести эту формулу и конечный результат, следует показать, как получен этот результат. При построении эпюр следует располагать их на одном листе с расчетной схемой.

Указание для студентов заочников. При выборе номера схемы задачи следует руководствоваться следующим правилом: личный номер (шифр) студента от 1 до 30 соответствует номеру схемы. Если личный номер больше 30, то номер схемы определяется путем деления личного номера на 30. Целое число частного не используется, а остаток определяет номер схемы. Например, личный номер студента 289, тогда $289 / 30 = 9$ и 19 в остатке – номер схемы 19.

Работы, выполненные с нарушением этого правила, не рецензируются.

При защите расчетно-проектировочной работы студент должен отвечать на вопросы, связанные с ее выполнением, уметь решить контрольную задачу по ее тематике.

Учебное издание

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ**

Составители:

ЕВСЕЕВА Елена Анатольевна

ЗИНЕВИЧ Сергей Иванович

ЮГОВА Марина Викторовна

Редактор *Е. С. Кочерго*

Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 24.03.2017. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 15,98. Уч.-изд. л. 12,50. Тираж 200. Заказ 380.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.