



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лабораторный практикум

**Минск
БНТУ
2017**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лабораторный практикум
для студентов специальностей

1-38 01 01 «Механические и электромеханические
приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные
и лазерные приборы и системы»,

1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»,
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области приборостроения*

Минск
БНТУ
2017

УДК 53(075.6)(075.8)

ББК 22.2я7

К60

С о с т а в и т е л и :

Д. С. Бобученко, Ю. А. Бумай,
В. В. Красовский, В. В. Черный

Р е ц е н з е н т ы :

кафедра физики БГУИР
(зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук *Г. Ф. Смирнова*);
профессор кафедры «Физика полупроводников и нанoeлектроники» БГУ,
доктор физ.-мат. наук *М. Г. Лукашевич*

Колебания и волны : лабораторный практикум для студентов
К60 специальностей 1-38 01 01 «Механические и электромеханические
приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные
приборы и системы», 1-38 02 01 «Информационно-измерительная
техника», 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности» /
сост. : Д. С. Бобученко [и др.]. – Минск : БНТУ, 2017. – 72 с.
ISBN 978-985-550-864-0.

Лабораторный практикум содержит описание механических колебаний и волн. Рассмотрены следующие вопросы: гармонический осциллятор; математический и физический маятники, обратный маятник; крутильные, затухающие и связанные колебания; понятие о волнах, плоская бегущая и стоячая волны.

Теоретическая часть дополнена схемами экспериментальных установок для определения ускорения свободного падения, момента инерции, модуля кручения, скорости звука в воздухе.

Издание предназначено для студентов инженерных специальностей, изучающих раздел «Механика и молекулярная физика» курса общей физики.

УДК 53(075.6)(075.8)

ББК 22.2я7

ISBN 978-985-550-864-0

© Белорусский национальный
технический университет, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 6. ИЗУЧЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ	4
Лабораторная работа № 11. ИЗУЧЕНИЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ.....	21
Лабораторная работа № 16. ИЗУЧЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ	35
Лабораторная работа № 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ МЕТОДОМ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ	49
ПРИЛОЖЕНИЯ	68

Лабораторная работа № 6

ИЗУЧЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы:

- изучить законы гармонических колебаний;
- изучить математический и физический маятники.

Теоретическая часть

Гармонические колебания

Колебания (механические) представляют собой движения, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени, характерной особенностью которых является то, что колеблющееся тело проходит одну и ту же точку траектории последовательно в двух противоположных направлениях.

Простейшей механической системой, которая может совершать колебания, является пружинный маятник – небольшой груз, колеблющийся на пружине. Системы, способные совершать колебания, называют **осцилляторами**.

Дифференциальное уравнение, описывающее закон колебаний груза, встречается во многих разделах физики, техники и других наук: колебания заряда в электрической цепи; колебание камертона, порождающего звуковые волны; колебания электронов в атоме, порождающие световые волны; колебания крыла летящего самолета и другие.

Если координата груза зависит от времени по закону косинуса или синуса, то колебания называют **гармоническими**. Любая система, совершающая гармонические колебания, называется **гармоническим осциллятором**.

Рассмотрим колебания тела массой m (кг), которое прикреплено к пружинке с жесткостью k (Н/м) и может совершать колебания без трения вдоль горизонтальной поверхности (рис. 6.1). Начало координатной оси выберем в центре масс тела, находящегося в положении равновесия.

Согласно закону Гука, при отклонении тела от положения равновесия возникает противодействующая растяжению пружины сила

$F = -kx$. Из второго закона Ньютона с учетом того, что ускорение $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, следует

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (6.1)$$

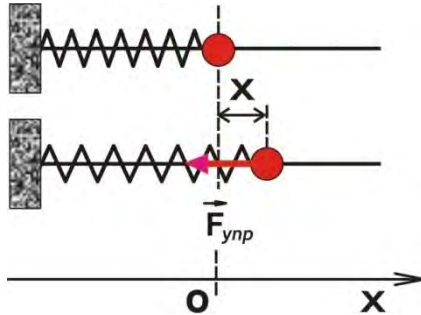


Рис. 6.1

Это уравнение приведем к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (6.2)$$

Введем обозначение

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.3)$$

Подставим выражение (6.3) в (6.2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка (порядок уравнения определяется наибольшим порядком производной). Решением дифференциального уравнения

является функция $x(t)$, т. е. зависимость координаты тела от времени. Такая функция, будучи подставленной в уравнение (6.4), превратит его в тождество. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решением уравнения (6.4) является следующая функция:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (6.5)$$

Из выражения (6.5) видно, что колебания тела будут происходить по гармоническому закону. Система, совершающая такие колебания, является *гармоническим осциллятором*.

Скорость, с которой совершает колебания система, можно найти как производную по времени от выражения (6.5):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (6.6)$$

Рассмотрим физический смысл уравнения (6.5). Как видно, величина отклонения тела от положения равновесия $x(t)$ описывается функцией косинуса. Максимальное значение абсолютной величины отклонения равно A . Эта постоянная называется **амплитудой колебаний**. Поскольку косинус является периодической функцией с периодом, равным 2π , можно определить интервал времени, через который значения физических величин, описывающих процесс колебаний (смещение, скорость, ускорение), повторяются:

$$2\pi = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0). \quad (6.7)$$

Из уравнения (6.7) легко получить

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.8)$$

Подставив выражение (6.3) в (6.8), получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.9)$$

Таким образом, **период колебаний** равен времени, в течение которого совершается одно полное колебание.

Колебательное движение характеризуется **частотой колебаний** – числом колебаний, совершаемых в единицу времени. В системе СИ частота измеряется в герцах (Гц). Частоте в один герц соответствует одно колебание, совершаемое за одну секунду. Из формулы (6.8) можно определить частоту колебаний ν :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.10)$$

Из выражений (6.8) и (6.10) определим величину ω :

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (6.11)$$

Величина ω называется циклической частотой колебаний и ее смысл можно определить, как число колебаний за 2π секунд. В выражении (6.5) аргумент косинуса (синуса)

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (6.12)$$

называется **фазой колебаний**, а величина $\varphi_0 = \varphi(0)$ – **начальной фазой** колебаний. Фаза определяет относительное отклонение колеблющегося тела от положения равновесия (отношение отклонения в данный момент к амплитуде).

Выражение (6.5) в общем виде удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.4) при любых значениях φ_0 и A . Для определенного колебания значения этих величин необходимо определять исходя из начальных условий. Пусть мы отклонили тело от положения равновесия на величину A и отпустили его. Это значит, что в начальный момент отклонение и скорость будут принимать значения $x(0) = A$ и $v(0) = 0$.

В этом случае уравнение колебания можно записать как с использованием функции \cos , так и функции \sin :

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad (6.13)$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (6.14)$$

То есть выбор формы записи осуществляется из соображений удобства.

Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити и совершающая колебания под действием момента сил, создаваемого силой тяжести. Движение такого маятника будет описываться дифференциальным уравнением, которое следует из основного закона динамики вращательного движения:

$$I\beta = M, \quad (6.15)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости, в которой проходят колебания;

β – угловое ускорение;

M – алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно оси вращения; в данном случае – момент силы тяжести.

Расстояние от точки подвеса до центра тяжести будет равно длине нити l . Следовательно, момент инерции материальной точки относительно точки подвеса равен

$$I = ml^2. \quad (6.16)$$

Момент силы тяжести равен силе тяжести, умноженной на плечо d этой силы. Плечо равно расстоянию от оси вращения до линии действия силы.

Из рис. 6.2 следует равенство

$$M = -mg l \sin \alpha, \quad (6.17)$$

где m – масса маятника;

g – ускорение свободного падения тел;

α – угол отклонения маятника от вертикали;
 l – расстояние от оси вращения до центра тяжести.

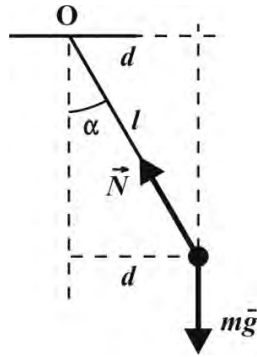


Рис. 6.2

Знак минус в формуле (6.17) показывает, что момент силы всегда стремится вернуть маятник в положение равновесия (или уменьшить модуль угла α).

Угловое ускорение β связана с углом отклонения α следующим образом:

$$\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (6.18)$$

Теперь выражение (6.15) с учетом (6.16), (6.17) и (6.18) можно записать в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\alpha. \quad (6.19)$$

Рассмотрим *малые колебания маятника*, когда максимальный угол отклонения его от положения равновесия значительно меньше одного радиана. Тогда можно положить с хорошей точностью

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad (6.20)$$

где угол определяется в радианах. Введем обозначение

$$\frac{g}{l} = \omega^2. \quad (6.21)$$

Тогда формула (6.19) с учетом (6.20) и (6.21) примет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2\alpha$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \quad (6.22)$$

Дифференциальное уравнение (6.22) является аналогичным уравнению (6.4) и поэтому решением его будет функция вида (6.5):

$$\alpha(t) = \alpha_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (6.23)$$

Выразив из (6.21) величину ω и подставив ее в (6.8), получим выражение для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.24)$$

Как видно из (6.24), период колебаний математического маятника зависит от его длины и ускорения свободного падения тел и не зависит от массы груза.

Физический маятник

Физический маятник – абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием собственной силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести C (рис. 6.3).

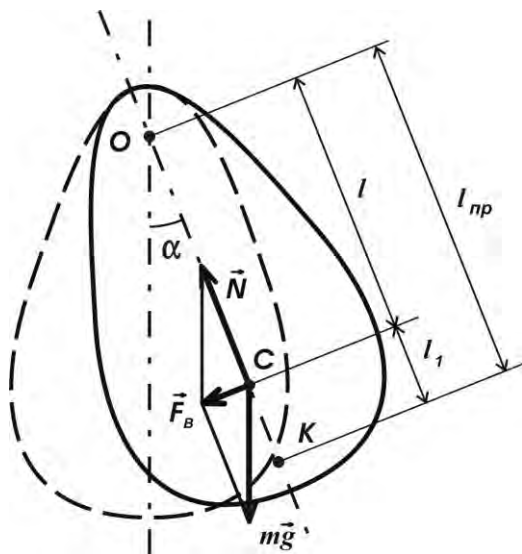


Рис. 6.3

Момент силы тяжести равен силе тяжести, умноженной на плечо этой силы. Плечо равно расстоянию от оси вращения до линии действия силы.

Из рис. 6.3 следует равенство

$$M = -mg/l \sin \alpha. \quad (6.25)$$

где m – масса маятника;

g – ускорение свободного падения тел;

α – угол отклонения маятника от вертикали;

l – расстояние от оси вращения до центра тяжести.

Знак минус присутствует по той же причине, что и для математического маятника.

Теперь, используя уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси (6.15), с учетом (6.25) можно записать в виде

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg/l \sin \alpha. \quad (6.26)$$

Рассмотрим малые колебания маятника, когда максимальный угол отклонения его от положения равновесия значительно меньше одного радиана. Тогда с хорошей точностью выполняется (6.20).

Введем обозначение

$$\frac{mgl}{I} = \omega^2. \quad (6.27)$$

Тогда выражение (6.26) с учетом (6.20) и (6.27) принимает вид, аналогичный (6.4) и (6.22):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0.$$

Решение последнего дифференциального уравнения также является аналогичным решениям уравнений (6.4) и (6.22):

$$\alpha(t) = \alpha_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Выразив из (6.27) ω и подставив его в (6.8), получим выражение для периода колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (6.28)$$

Приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника с таким же периодом колебаний. Из формулы (6.28) видно, что период колебаний физического маятника зависит от трех параметров: массы, момента инерции и расстояния от оси до центра тяжести, а для математического маятника согласно (6.24) период зависит только от его длины. Поэтому приведенная длина физического маятника является характеристикой, удобной для практики.

Приравняв формулы (6.24) и (6.28), легко получить выражение для вычисления приведенной длины физического маятника:

$$I_{\text{пр}} = \frac{I}{ml}. \quad (6.29)$$

Формулу (6.29) можно представить в более наглядном виде, если с помощью теоремы Штейнера выразить момент инерции маятника в следующем виде:

$$I = I_c + ml^2, \quad (6.30)$$

где I_c – момент инерции маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс.

Подставив (6.30) в (6.29), получим

$$I_{\text{пр}} = \frac{I_c}{ml} + l. \quad (6.31)$$

Точка K , находящаяся на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от оси вращения на прямой линии, проходящей через центр масс, называется **центром качания** физического маятника. Эта точка обладает важным свойством: при переносе точки подвеса в точку K (рис. 6.3) точка O становится центром качания, а период колебаний маятника не изменяется.

Докажем это утверждение.

При переносе точки подвеса в точку K расстояние от точки K до центра тяжести C будет равно

$$l_1 = l_{\text{пр}} - l, \quad (6.32)$$

а новая приведенная длина физического маятника согласно (6.31) составит

$$I_{\text{пр}} = \frac{I_c}{ml_1} + l_1. \quad (6.33)$$

Из (6.31) следует, что

$$I_{\text{пр}} - l = \frac{I_c}{ml}. \quad (6.34)$$

Тогда согласно (6.32)

$$h_1 = \frac{l_c}{ml}. \quad (6.35)$$

Подставив это значение h_1 в (6.33), получим

$$l'_{\text{пр}} = \frac{l_c}{ml} + l. \quad (6.36)$$

Из формул (6.31) и (6.36) видно, что $l'_{\text{пр}} = l_{\text{пр}}$, т. е. при переносе центра качания в точку подвеса приведенная длина физического маятника не изменяется, поэтому не изменяется и его период колебаний.

Оборотный маятник

Оборотным называют физический маятник, имеющий две оси вращения, вторая из которых находится в точке качания. В этом случае, как было отмечено выше, расстояние между осями равно приведенной длине физического маятника, а периоды колебаний относительно обеих осей совпадают.

Простейший оборотный маятник представляет собой длинный однородный стержень, на котором закрепляются две оси и два груза (рис. 6.4). Обычно грузы подбирают таким образом, чтобы их массы отличались как можно меньше. Перемещая грузы и оси относительно стержня, добиваются, чтобы при перевороте маятника периоды не изменялись, и выполнялось равенство:

$$T_1 = T_2 = T, \quad (6.37)$$

где T_1 и T_2 – периоды колебаний относительно осей 1 и 2, соответственно.

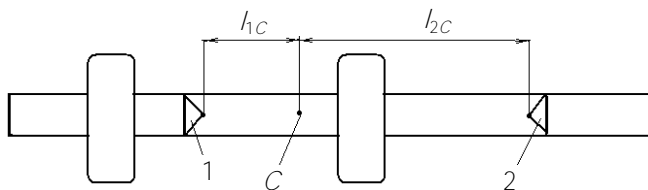


Рис. 6.4

Из (6.28) следуют формулы для T_1 и T_2 :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{mg l_{1c}}}, \quad (6.38)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{mg l_{2c}}}, \quad (6.39)$$

где l_1, l_2 – моменты инерции маятника относительно соответствующих осей;

l_{1c}, l_{2c} – расстояния от центра масс маятника до этих осей.

По теореме Штейнера

$$l_1 = l_c + m l_{1c}^2, \quad (6.40)$$

$$l_2 = l_c + m l_{2c}^2, \quad (6.41)$$

где l_c – момент инерции маятника относительно его центра масс;
 m – масса маятника.

Подставим выражение (6.40) в (6.38), (6.41) в (6.39), а затем возведем полученные равенства в квадрат и выразим из них l_c :

$$l_c = \frac{T_1^2 mg l_{1c}}{4\pi^2} - m l_{1c}^2, \quad (6.42)$$

$$l_c = \frac{T_2^2 mg l_{2c}}{4\pi^2} - m l_{2c}^2. \quad (6.43)$$

Приравняв правые части последних равенств и учитывая равенство (6.37), получим

$$\frac{T^2 mg (l_{1c} - l_{2c})}{4\pi^2} = m (l_{1c}^2 - l_{2c}^2). \quad (6.44)$$

В случае $l_{1c} \neq l_{2c}$ (несимметричное расположение грузов и осей относительно центра масс маятника) из (6.44) следует

$$g = \frac{4\pi^2 l_0}{T^2}, \quad (6.45)$$

где l_0 – расстояние между осями:

$$l_0 = l_{1c} + l_{2c}. \quad (6.46)$$

Таким образом, по измеренным значениям l_0 и T можно определить величину ускорения свободного падения g .

Если же $l_{1c} = l_{2c}$ (симметричное расположение как осей, так и грузов относительно центра масс маятника), то уравнения (6.42) и (6.43) идентичны, а полученное уравнение (6.44) превращается в тождество вида $0 = 0$. В этом случае определить g не удастся, так как неограниченно возрастает погрешность.

Однако на опыте добиться точного совпадения периодов колебаний относительно обеих осей весьма сложно, если периоды определяются с высокой степенью точности. Этому способствует и то обстоятельство, что грузы и оси фиксируются на стержне, как правило, только в определенных положениях. Поэтому анализ оборотного маятника обычно производится в предположении, что периоды T_1 и T_2 немного отличаются. Приравнивая правые части из (6.42) и (6.43), вместо (6.44) получим следующее равенство:

$$m(T_1^2 g l_{1c} - T_2^2 g l_{2c}) = 4\pi^2 m(l_{1c}^2 - l_{2c}^2),$$

откуда в случае $l_{1c} \neq l_{2c}$ имеем

$$g = 4\pi^2 \frac{(l_{1c} + l_{2c})(l_{1c} - l_{2c})}{l_{1c}T_1^2 - l_{2c}T_2^2} \quad (6.47)$$

или

$$g = 4\pi^2 \frac{l_0}{T^2}, \quad (6.48)$$

где

$$T_0^2 = \frac{I_c T_1^2 - I_c T_2^2}{I_c - I_c}. \quad (6.49)$$

Практическая часть

Определение момента инерции физического маятника

Как видно из формулы (6.28), период колебаний физического маятника зависит от его момента инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса I , массы маятника m и расстояния от точки подвеса до центра масс l .

Величину l легко определить, если положить маятник на призму, как показано на рис. 6.5, так, что он будет находиться в равновесии, а затем измерить расстояние от точки его опоры на призму до точки подвеса маятника.

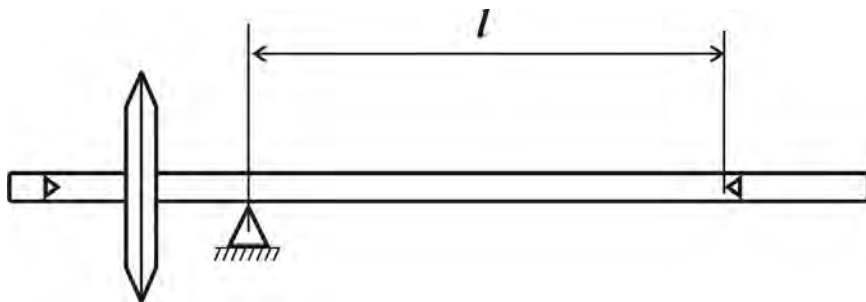


Рис. 6.5

Затем, поместив маятник в установку, отклонить его на небольшой угол ($5-10^\circ$), отпустить и измерить период колебаний. После этого момент инерции I легко вычислить по формуле, полученной из (6.28):

$$I = \frac{mglT^2}{4\pi^2}. \quad (6.50)$$

Определение ускорения свободного падения с помощью обратного маятника

Из формул (6.48, 6.49) следует, что ускорение свободного падения может быть определено по измеренным значениям T_1 , T_2 , l_{1c} , l_{2c} . Необходимо подобрать положение осей и грузов таким образом, чтобы периоды T_1 и T_2 отличались не более чем на 1 %. Чтобы найти погрешность Δg , необходимо знать величину погрешности ΔT_0 , которую вычислим следующим образом. Возьмем дифференциал от обеих частей уравнения (6.49). Для упрощения будем считать l_{1c} и l_{2c} постоянными величинами. Затем заменим дифференциалы соответствующих величин на их абсолютные погрешности. В результате получим

$$2T_0\Delta T_0 = \left| \frac{2l_{1c}}{l_{1c} - l_{2c}} \right| T_1 \Delta T_1 + \left| \frac{2l_{2c}}{l_{1c} - l_{2c}} \right| T_2 \Delta T_2. \quad (6.51)$$

Учитывая, что T_1 , T_2 и T_0 отличаются незначительно, сократим их в данном уравнении и получим

$$\Delta T_0 = \left| \frac{2l_{1c}}{l_{1c} - l_{2c}} \right| \Delta T_1 + \left| \frac{2l_{2c}}{l_{1c} - l_{2c}} \right| \Delta T_2. \quad (6.52)$$

Полученное значение ΔT_0 подставляем в формулу для расчета погрешностей. Из (6.52) следует, что l_{1c} и l_{2c} не должны принимать близкие значения, иначе величина погрешности ΔT_0 резко возрастает. Значения этих величин должны отличаться хотя бы на 25 %. Однако также и недопустима слишком большая разница между l_{1c} и l_{2c} , иначе сильно возрастает период колебаний и силы трения вносят очень большие систематические погрешности. Поэтому, если обозначим отношение большей из величин l_{1c} , l_{2c} к меньшей из них как z , то должно выполняться неравенство

$$1,25 < z < 3,0. \quad (6.53)$$

Выражение (6.49) для T_0 довольно громоздко. Расчеты показывают, что значения, полученные из этой формулы и из упрощенной формулы

$$T_0 = 0,5(T_1 + T_2), \quad (6.54)$$

отличаются незначительно, поэтому для определения T_0 будем использовать формулу (6.54).

Задание 6.1. Определить момент инерции физического маятника

1. Выбрать положение груза на стержне. Определить положение центра тяжести с помощью призмы (рис. 6.4) и измерить расстояние от центра тяжести до точки подвеса.

2. Измерить несколько раз период колебаний физического маятника при фиксированном положении оси и груза.

3. Рассчитать среднее значение периода колебаний T_c , а также абсолютные погрешности этих величин (ΔT , Δl).

4. Рассчитать момент инерции физического маятника по формуле (6.50), из которой затем определить погрешность измерений ΔI .

5. Переместить груз в другое положение. Повторить все операции, указанные в предыдущем пункте.

Задание 6.2. Определить ускорение свободного падения с помощью обратного маятника

1. Передвигая грузы и оси на стержне обратного маятника, добиться как можно лучшего совпадения периодов колебаний маятника T_1 и T_2 относительно обеих осей. Средние значения этих периодов, определенные по числу измерений не менее трех, не должны отличаться более чем на 1 %.

2. Определить положение центра масс маятника с помощью призмы.

3. Измерить расстояние между опорными ребрами призм обратного маятника (l_0), равное приведенной длине.

4. Измерить расстояния от центра масс маятника до опорного ребра каждой из призм (l_{1c} и l_{2c}) и проверить выполнение неравенства (6.53).

5. Определить величину T_0 по формуле (6.54).

6. Вычислить среднее значение ускорения свободного падения по формуле (6.48).

7. Определить погрешности ΔT_1 , ΔT_2 и по формуле (6.52) определить значение ΔT_0 . Из формулы (6.48) получить выражение для относительной погрешности $\varepsilon_g = \Delta g/g$, предельно ее значение и абсолютную погрешность Δg .

Контрольные вопросы

1. Что такое колебания?
2. Какие колебания называются гармоническими?
3. Уравнение гармонических колебаний и его решение?
4. Что такое амплитуда, период, частота, фаза, начальная фаза?
5. Дать определение физического и математического маятника.
6. Вывести формулу для периода колебаний физического маятника.
7. Что такое приведенная длина физического маятника? Что такое центр качания?
8. Вывести формулу для приведенной длины физического маятника.
9. Дать определение оборотного маятника.
10. Чему равна приведенная длина для оборотного маятника? Как определяется ускорение свободного падения по методу оборотного маятника?

Литература

1. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – М. : Высшая школа, 2007. – С. 255–261.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1987. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. – С. 181–197.
3. Петровский, И. И. Механика / И. И. Петровский. – Минск : БГУ, 1973. – С. 283–299.
4. Сивухин, Д. В. Механика : учебное пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1989. – Т. 1 : Общий курс физики. – С. 204 – 213.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 4 т. / И. В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2012. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. – С. 256–275.

Лабораторная работа № 11

ИЗУЧЕНИЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы:

- изучить основные закономерности гармонических колебаний и сложение колебаний одного направления;
- изучить колебания связанных маятников, синфазные и противофазные колебания, биения.

Теоретическая часть

Движения, называемые колебаниями, широко распространены и играют большую роль в природе и технике. Характерной особенностью всех колебательных движений является их периодичность, т. е. регулярная повторяемость через равные промежутки времени T . В качестве примеров колебательных движений можно указать: движение маятника, колебание тела на пружине, движения поршня в двигателе внутреннего сгорания, колебания атомов и молекул вблизи положения равновесия в твердых телах и т. д. Математически повторяемость движения означает выполнение следующих соотношений:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t + T), \\v(t) &= v(t + T), \\a(t) &= a(t + T).\end{aligned}\tag{11.1}$$

где x – координата колеблющейся точки;

v и a – скорость и ускорение колеблющейся точки, соответственно.

Аналогичные соотношения могут быть записаны и для любых других параметров, описывающих движение колеблющейся точки. Отрезок времени T между двумя последовательными одинаковыми состояниями движения колеблющегося тела, называют *периодом колебаний*. Следует отметить, что повторяемость движения присуща

также равномерному вращению. Однако при вращательном движении все точки тела движутся по неизменным круговым траекториям все время в одну и ту же сторону, в то время как при колебательном движении одна и та же траектория проходится колеблющимся телом поочередно в противоположных направлениях.

К колебательным относят и такие движения, которые не являются строго периодическими в указанном выше смысле, но для которых характерно то, что движущееся тело проходит через равные промежутки времени положение равновесия, двигаясь поочередно в противоположных направлениях и достигая через такие же промежутки времени максимального отклонения от равновесия в том или ином направлении. Примером такого движения могут быть затухающие колебания маятника (колебания с постепенно убывающей амплитудой колебаний). Колебательное движение считается заданным, если известны координаты тела как функция времени.

Свободные гармонические колебания

Колебания называются *гармоническими*, если их можно описать с помощью функций синуса или косинуса. Свободные колебания наблюдаются в системе, на которую не действуют внешние силы или их действие скомпенсировано, и при отсутствии в системе сил трения. В качестве примера гармонических колебаний рассмотрим свободные колебания математического маятника.

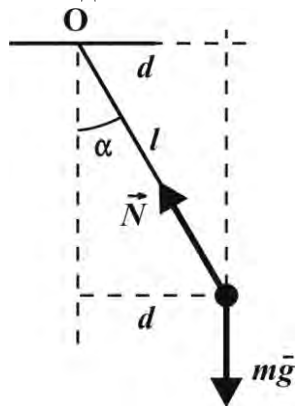


Рис. 11.1

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити (рис. 11.1).

Вследствие того, что нить нерастяжима, расстояние от материальной точки до точки подвеса O остается постоянным и траектория, по которой движется материальная точка – дуга окружности. Таким образом, материальная точка совершает вращательное движение. Для описания движения материальной точки воспользуемся основным законом динамики вращательного движения:

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M. \quad (11.2)$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения;

α – угол отклонения маятника от положения равновесия;

M – результирующий момент сил, действующих на тело.

Для материальной точки момент инерции $I = ml^2$.

На материальную точку действуют две силы – сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{N} . Однако в уравнение входят не силы, действующие на материальную точку, а *моменты сил* относительно оси вращения O . Так как линия действия силы \vec{N} проходит через точку O , то плечо этой силы (т. е. кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы) равно нулю и момент силы также равен нулю. Момент силы тяжести относительно оси O вычисляется по формуле $mg \sin \alpha$. Ограничимся рассмотрением малых углов $\alpha \leq 7-8^\circ$. При таких малых углах $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, если угол α выразить в радианах. Кроме того, из физических соображений запишем момент силы тяжести со знаком «минус», учитывая тот факт, что момент силы тяжести действует в сторону, противоположную отклонению. С учетом всего сказанного, уравнение (11.2) можно представить в следующем виде:

$$ml^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg l \alpha. \quad (11.3)$$

Преобразуем его, перенеся все члены в левую сторону и разделив уравнение на m и l :

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0. \quad (11.4)$$

Введем обозначение $\omega_0^2 = g/l$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (11.5)$$

Уравнение (11.5) называется *уравнением свободных колебаний* и имеет важное значение в теории колебаний. Решением этого уравнения является гармоническая функция вида

$$\alpha(t) = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (11.6)$$

То, что (11.6) является решением уравнения (11.5), можно легко проверить прямой подстановкой (11.6) в (11.5), которая превращает уравнение (11.5) в тождество. Кроме того, в прил. А приведено строгое решение уравнения (11.5). Следует иметь в виду, что решение (11.6) может быть представлено как с помощью функции синус, так и с помощью функции косинус; различными при этом окажутся лишь начальные фазы φ , значения которых можно найти, используя, например, начальные условия.

В уравнении (11.6) α – это угол отклонения маятника от положения равновесия в момент времени t , α_m – представляет собой максимальное отклонение тела от положения равновесия и называется *амплитудой колебаний*. Аргумент функции синус – $\omega_0 t + \varphi$ называется *фазой колебания*; ω_0 – *круговая* или *циклическая частота колебаний*; t – время; φ – *начальная фаза* (значение фазы при $t = 0$). Легко установить связь между циклической частотой колебаний и периодом колебаний T . Так как через промежуток времени T колебания полностью повторяются, то, следовательно, должно повторяться и значение координаты α , так как функция \sin является периодической с периодом 2π , то должно выполняться равенство

$$[\omega_0(t + T) + \varphi] - (\omega_0 t + \varphi) = 2\pi. \quad (11.7)$$

Из уравнения (11.7) легко получить

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Величина $\nu = 1 / T$ называется *частотой* и равна числу колебаний в единицу времени. Соответственно, $\omega_0 = 2\pi\nu$ равно числу колебаний, совершаемых за 2π секунд.

Таким образом, тело, уравнение движений которого имеет вид (11.5), действительно совершает гармонические колебания с круговой частотой ω_0 . Частота ω_0 называется **собственной частотой системы**, а колебания, которые совершает система, выведенная из состояния равновесия в отсутствие сил трения и других внешних воздействий, называются **свободными колебаниями**.

Сложение колебаний

Рассмотрим сложение двух колебаний, происходящих в одном направлении вдоль оси x , при условии, что амплитуды этих колебаний одинаковы и равны a , а частоты отличаются незначительно. Покажем, что результирующее движение при этих условиях можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание с периодически изменяющейся (пульсирующей) амплитудой называется **биениями**.

Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω , а частоту второго колебания через $\omega + \Delta\omega$. Будем предполагать, что $\Delta\omega \ll \omega$. Положим начальные фазы обоих колебаний равными нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид:

$$x_1 = A \cos(\omega t), \tag{11.8}$$

$$x_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega) t].$$

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t. \tag{11.9}$$

Во втором множителе приняли $\omega + \Delta\omega / 2 \approx \omega$, т. е. пренебрегли членом $\Delta\omega / 2$, малым по сравнению с ω .

График функции (11.9) изображен на рис. 11.2 (график построен для $\omega / \Delta\omega = 10$). Заключенный в скобки множитель в формуле (11.9) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Ввиду

условия $\Delta\omega \ll \omega$ за то время, за которое множитель $\cos\omega t$ совершает несколько полных колебаний, множитель, стоящий в скобках, почти не изменится. Это позволяет рассматривать колебание (11.9) как гармоническое колебание с частотой ω , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону.

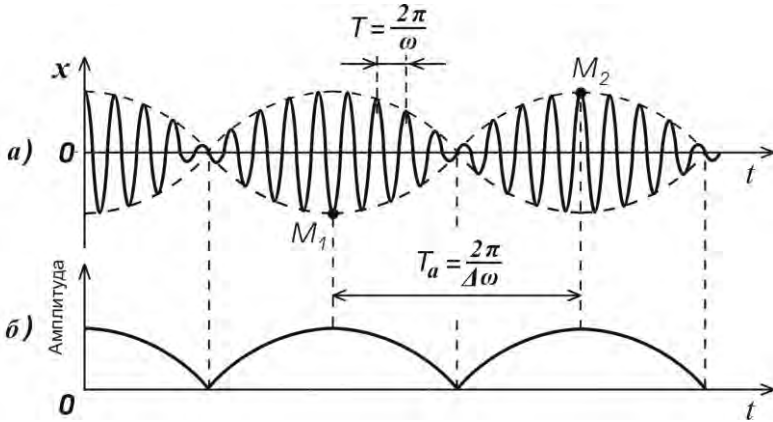


Рис. 11.2

По определению амплитуда всегда положительна, поэтому выражение (11.9) можно интерпретировать как

$$x = \left| 2 A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \cos(\omega t + \varphi), \quad (11.10)$$

где φ – скачок фазы, изменяющийся на π при каждом прохождении амплитудой через нулевое значение.

Связанные колебания

Под *числом степеней свободы* понимают число независимых координат, которые полностью задают положение системы в пространстве. Совокупность двух или нескольких маятников, каким-либо образом связанных между собой, представляет связанную систему. *Связанными* называются колебания, возникающие в такой системе при условии взаимного влияния колебаний маятников друг на друга.

В механике простейшую систему с двумя степенями свободы образуют два одинаковых математических маятника массой m и длиной l , совершающие колебания в одной плоскости и связанные между собой невесомой пружинкой с коэффициентом жесткости k . Пружина находится на расстоянии d от точек подвеса. При движении маятников в одной вертикальной плоскости (рис. 11.3) состояние системы полностью описывается двумя независимыми параметрами (координатами) – углами φ_1 и φ_2 , задающими отклонения маятников от вертикали, т. е. данная система имеет две степени свободы.

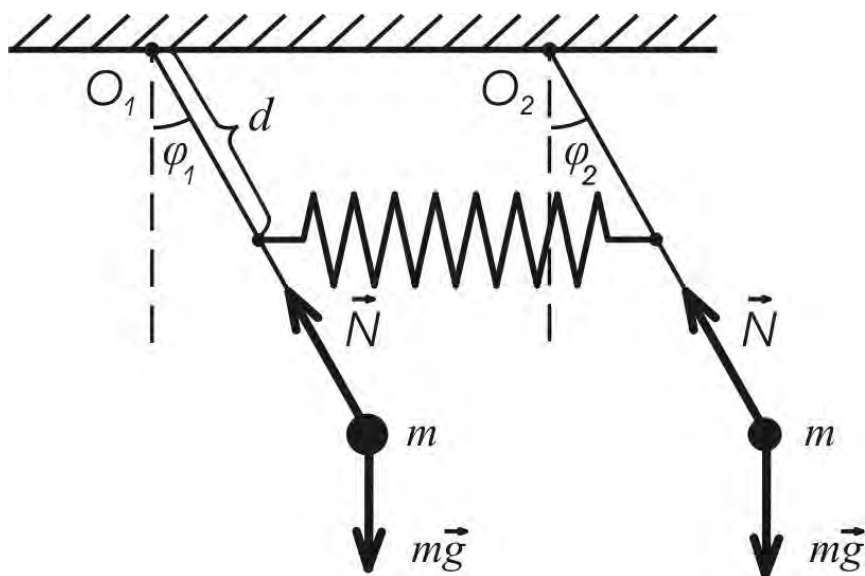


Рис. 11.3

Уравнения движения для каждого маятника можно получить из основного закона динамики вращательного движения:

$$I_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = \sum_k M_{ik}, \quad (11.11)$$

где I_i – момент инерции i -го маятника относительно оси вращения;

$\Sigma_k M_{ik}$ – сумма моментов сил, действующих на i -й маятник относительно этой же оси;

φ_i – угол поворота, применительно к каждому маятнику.

На каждый маятник действует момент силы тяжести (перед ним стоит знак минус, так как он направлен в сторону, противоположную отклонению) и момент сил со стороны пружины. С учетом сказанного уравнение (11.11) для малых колебаний каждого из маятников ($\sin\varphi \approx \varphi$) имеет вид:

$$mI^2 \varphi_1'' = -mgI\varphi_1 + kd^2 (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (11.12)$$

$$mI^2 \varphi_2'' = -mgI\varphi_2 + kd^2 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

или после небольших преобразований:

$$mI^2 \varphi_1'' + mgI\varphi_1 = kd^2 (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (11.13)$$

$$mI^2 \varphi_2'' + mgI\varphi_2 = kd^2 (\varphi_1 - \varphi_2),$$

Момент инерции / точечной массы m , находящейся на расстоянии l от оси вращения, равен mI^2 . Учтено, что момент сил со стороны пружины при малых φ_1 и φ_2 выражается через удлинение пружины, которое равно $d(\varphi_1 - \varphi_2)$ и, следовательно, момент M упругой силы равен $kd(\varphi_1 - \varphi_2)d$, так как плечо этой силы равно d . Будем рассматривать случай, когда моменты сил трения, действующих на маятник, много меньше M и затуханием можно пренебречь.

Система уравнений (11.13) путем почленного сложения и вычитания уравнений может быть преобразована к виду:

$$mI^2 (\varphi_1'' + \varphi_2'') + mgI(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \quad (11.14)$$

$$mI^2 (\varphi_1'' - \varphi_2'') + mgI(\varphi_1 - \varphi_2) = 2kd^2 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Введя новые переменные Q_1 и Q_2 : $Q_1 = \varphi_1 + \varphi_2$, $Q_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, – получим следующую систему уравнений:

$$Q_1'' + \frac{g}{l} Q_1 = 0, \tag{11.15}$$

$$Q_2'' + \left(\frac{g}{l} + 2 \frac{kd^2}{ml^2} \right) Q_2 = 0.$$

Таким образом, система уравнений (11.13) в результате преобразований распалась на два независимых уравнения (11.15), каждое из которых представляет собой уравнение свободных колебаний вида (11.5) с собственными частотами (они называются нормальными), соответственно

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2 \cdot \frac{kd^2}{ml^2}. \tag{11.16}$$

Общие решения уравнений (11.15) будут иметь вид:

$$Q_1 = 2A \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \tag{11.17}$$

$$Q_2 = 2B \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Здесь для удобства амплитуды обозначены $2A$ и $2B$, а начальные фазы – α_1 и α_2 . Обратный переход к углам отклонения маятников φ_1 и φ_2 дает:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \tag{11.18}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2) = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - B \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Таким образом, в общем случае колебания каждого маятника складываются из двух независимых колебаний с нормальными частотами ω_1 и ω_2 которые определяются выражениями (11.16). Новые переменные Q_1 и Q_2 называют нормальными координатами.

Как видно из (11.18), возможны случаи, когда оба маятника одновременно колеблются лишь с одной из нормальных частот (т. е. при $B = 0$ или $A = 0$). Каждая из возможностей осуществляется в зависимости от способа возбуждения колебаний в системе, т. е. от начальных условий. Поскольку начальные отклонения и скорости маятников в общем случае имеют вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1 \Big|_{t=0} &= A \cos \alpha_1 + B \cos \alpha_2, \\ \varphi_2 \Big|_{t=0} &= A \cos \alpha_1 - B \cos \alpha_2,\end{aligned}\tag{11.19}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} \Big|_{t=0} = -A\omega_1 \sin \alpha_1 - B\omega_2 \sin \alpha_2,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} \Big|_{t=0} = -A\omega_1 \sin \alpha_1 + B\omega_2 \sin \alpha_2.$$

Отсюда легко видеть, что случай $B = 0$ означает, что в начальный момент оба маятника были отклонены на один и тот же угол $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ и имели одинаковые скорости $\varphi'_{10} = \varphi'_{20} = -A\omega_1 \sin \alpha_1$. Этот случай соответствует так называемым **синфазным колебаниям**; оба маятника колеблются с меньшей из нормальных частот ω_1 .

Случай $A = 0$ означает, что в начальный момент маятники были отклонены на одинаковые углы в противоположные стороны $\varphi_{10} = -\varphi_{20} = B \cos \alpha_2$ и имели противоположные угловые скорости $\varphi'_{10} = \varphi'_{20} = -B\omega_2 \sin \alpha_2$. При таком способе возбуждения оба маятника осуществляют **противофазные колебания** с большей из нормальных частот.

При произвольном возбуждении колебаний (например, качнуть один из маятников) каждый из маятников осуществляет сложное колебание, являющееся результатом сложения двух колебаний, происходящих в одном направлении. Если собственные частоты обоих маятников близки, то в результате должны возникнуть биеения, которые удобно наблюдать при слабой связи между маятниками,

т. е. при выполнении условия $kd^2 \ll mgl$ (это имеет место при малом расстоянии d). При указанных условиях расстройка $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ мала по сравнению с нормальными частотами ω_2 и ω_1 . Действительно, если рассмотреть случай когда $A = B$, то уравнение движения 1-го маятника примет вид (уравнение движения второго маятника рассматривается аналогично)

$$\varphi_1 = A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A\cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (11.20)$$

преобразовав, получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (11.21)$$

Полученное выражение полностью аналогично результату (11.9) и начальная часть полученного выражения:

$$2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \quad (11.22)$$

будет представлять собой медленно изменяющуюся со временем амплитуду. График такого колебания представлен на рис. 11.2. Промежутки времени между двумя соседними по времени минимальными или максимальными значениями амплитуды колебаний называют *периодом биений* (см. рис. 11.2). Так как под амплитудой следует понимать не само выражение (11.22), а его абсолютную величину, т. е.

$$\left| 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \right|, \quad (11.23)$$

то очевидно, что значения амплитуды будут повторяться при изменении аргумента косинуса в (11.23) на π , т. е. период биений можно определить из условия

$$T_{\text{биен}} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \pi, \quad (11.24)$$

учитывая, что

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_c}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_n},$$

получим

$$T_{\text{биен}} = \frac{T_n T_c}{T_c - T_n}. \quad (11.25)$$

Видно, что в том случае, когда $\omega_1 \approx \omega_2$, разность $T_c - T_n$ будет малой величиной, а $T_{\text{биен}}$ большой и, следовательно, эффект легко наблюдать экспериментально.

Практическая часть

Так как теория связанных колебаний рассмотрена нами для математических маятников, то в начале измерений необходимо убедиться, что физические маятники, используемые в лабораторной установке, близки по своим свойствам к математическим. Для этого нужно измерить время t_n , за которое происходит 10–20 свободных колебаний маятника, и, разделив это время на число колебаний, определить период колебаний. Повторить эту процедуру три–четыре раза. Найти среднее значение периода колебаний $T_{\text{ср}}$. Период колебаний математического маятника, рассчитанный по формуле

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (11.26)$$

сравнить со средним значением периода $T_{\text{ср}}$, измеренным экспериментально, и рассчитать относительное отклонение экспериментального результата от расчетного значения по формуле

$$\delta = \frac{T_M - T_{\text{ср}}}{T_M} \cdot 100\%. \quad (11.27)$$

Убедиться, что это отклонение не превышает 3–4 % и теория математических маятников может, в пределах указанной точности, применяться для используемой экспериментальной установки.

Измерить периоды синфазных T_c и противофазных T_n колебаний. Для этого зафиксировать время 10–20 колебаний и, разделив на количество колебаний, найти период. Процедуру повторить три–четыре раза и рассчитать среднее значение периодов T_c и T_n .

Рассчитать период биений по формуле (11.25), подставив в нее значения периодов T_c и T_n , определенные ранее. После этого измерить экспериментально период биений. Для этого зафиксировать пять–шесть раз время между двумя последующими остановками маятника и рассчитать среднее значение. Сравнить результат расчета по формуле (11.25) и результат прямого измерения периода биений.

Рассчитать коэффициент жесткости пружинной связи между маятниками. Из формул (11.16) для определения нормальных частот следует

$$\frac{4\pi^2}{T_c^2} = \frac{g}{l}, \quad \frac{4\pi^2}{T_n^2} = \frac{g}{l} + 2 \cdot \frac{kd^2}{ml^2}.$$

Вычитая из второго уравнения первое, можно после несложных преобразований получить

$$k = \frac{2\pi^2 ml^2 (T_c^2 - T_n^2)}{d^2 T_n^2 T_c^2}. \quad (11.28)$$

Величина m обозначена на грузе маятника. Величины l и d можно легко измерить с помощью линейки, а периоды синфазных и противофазных колебаний были определены ранее. Воспользовавшись формулой (11.28), рассчитать коэффициент жесткости пружины и погрешность, с которой он определен.

Проделать такие измерения дважды при различных положениях пружины, сравнить полученные значения коэффициента жесткости.

Контрольные вопросы

1. Какие движения называются колебательными?
2. Какие колебания называются гармоническими? Как записывается уравнение гармонических колебаний?
3. Дайте определения и поясните физический смысл параметров гармонических колебаний: амплитуды, периода, частоты, фазы?
4. Что такое связанные колебания? При каких условиях они возникают?
5. Что такое синфазные и противофазные колебания? Как их возбудить?
6. Что такое биения и при каких условиях они возникают?
7. Что называется периодом биений и по какой формуле его можно рассчитать?

Литература

1. Общий физический практикум / под ред. А. Н. Матвеева, Д. Ф. Киселева. – М. : МГУ, 1991. – 272 с.
2. Физический практикум. Механика и молекулярная физика / под ред. В. И. Ивероновой. – М. : Наука, 1967. – 352 с.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 4 т. / И. В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2012. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. – С. 256–279.

Лабораторная работа № 16

ИЗУЧЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы:

- изучить крутильные колебания;
- изучить крутильный маятник;
- изучить свободные затухающие колебания.

Теоретическая часть

Виды колебаний

В природе и технике большое распространение имеют колебательные движения. Их отличительной особенностью является повторяемость во времени. Это означает, что через определенный промежуток времени T , который называют периодом колебаний, все параметры колеблющегося тела (например, координата, скорость, ускорение) возвращаются к исходному значению. В частности, при крутильных колебаниях должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha(t + T), \\ \omega(t) &= \omega(t + T), \\ \varepsilon(t) &= \varepsilon(t + T),\end{aligned}\tag{16.1}$$

где α – угловая координата;

ω – угловая скорость;

ε – угловое ускорение колеблющегося тела.

При этом повторяются и другие параметры, описывающие колебательное движение тел. В качестве примера можно указать движение маятника часов, колебания струны, движение поршней в двигателе внутреннего сгорания, колебания атомов и молекул вещества во время теплового движения. В зависимости от характера воздействия на колебательную систему различают свободные (собственные) и вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными называются такие колебания, которые происходят в системе, представленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок либо она была выведена из положения равновесия.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически меняющейся силы. Примером может служить движение поршня автомобильного двигателя.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колебательную систему внешних сил. Однако сила и моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колебательной системой. Примером автоколебаний являются механические часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через положение равновесия.

Параметрические колебания характеризуются тем, что за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например, изменяется длина нити маятника.

Крутильный маятник

Наряду с обычными, хорошо известными маятниками (физическим и математическим), удобным и достаточно простым примером колебательных систем является крутильный маятник. Схематично представлен на рис. 16.1.

Представляет собой твердое тело 1, закрепленное на упругом элементе в виде натянутой нити или стальной проволоки (струны) 2, жестко закрепленной в кронштейнах 3.

При закручивании струны вместе с телом на некоторый угол α в ней возникает деформация кручения и момент сил упругости, препятствующий закручиванию нити:

$$M = -f\alpha, \quad (16.2)$$

где α – является угловой координатой. Коэффициент f , называемый **модулем кручения нити**, остается постоянным в пределах упругой деформации струны при закручивании.

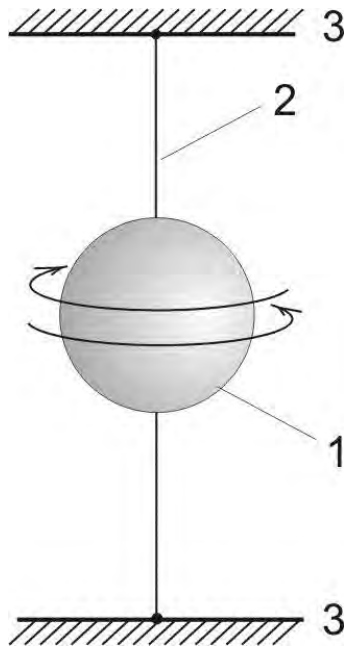


Рис. 16.1

Вращательным называется движение, при котором все точки движутся по окружностям (дугам окружности), центры которых лежат на одной оси, называемой осью вращения. В соответствии с приведенным определением видно, что рассматриваемое тело совершает вращательное движение. Его анализ можно провести исходя из **основного закона динамики вращательного движения**:

$$M = I\varepsilon, \quad (16.3)$$

где M – суммарный момент сил, действующий на тело;
 I – момент инерции тела относительно оси вращения;
 ε – угловое ускорение по определению:

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (16.4)$$

Рассмотрим случай свободных колебаний крутильного маятника, когда после выведения из положения равновесия на него не действуют сторонние моменты сил. В этом случае, используя (16.2), (16.3), (16.4), получим соотношение

$$-f\alpha = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (16.5)$$

Если ввести обозначение $\omega_0^2 = f/I$, то соотношение (16.4) можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0. \quad (16.6)$$

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка носит название уравнения свободных колебаний. Его решение имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (16.7)$$

В этом можно убедиться прямой подстановкой (16.7) в (16.6). Соотношение (16.7) называется уравнением гармонических колебаний. *Гармоническими колебаниями* называются колебания, которые можно описать с помощью функций синуса и косинуса. В данном случае коэффициент α_0 обозначает максимальный угол закручивания маятника и называется амплитудой колебания; выражение $\omega_0 t + \varphi$ называется фазой колебания, где φ – начальная фаза колебания (т. е. значение фазы в момент времени $t = 0$), ω_0 – циклическая частота колебаний. С одной стороны, как отмечалось выше, $\omega_0^2 = f/I$, с другой стороны можно получить связь с частотой и периодом колебаний. Так как через промежуток времени T колебания полностью повторяются, то, следовательно, должно повторяться и значение координаты α , так как функция \sin является периодической с периодом 2π . Таким образом, должно выполняться равенство

$$[\omega_0(t + T) + \varphi] - (\omega_0 t + \varphi) = 2\pi. \quad (16.8)$$

Из уравнения (16.8) легко получить

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (16.9)$$

и формулу для периода крутильных колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}. \quad (16.10)$$

Величина $\nu = 1/T$ называется **частотой** и равна числу колебаний в единицу времени. Соответственно, $\omega_0 = 2\pi\nu$ равно числу колебаний, совершаемых за 2π секунд, т. е. является по своему физическому смыслу **циклической (круговой)** частотой гармонических колебаний.

Затухающие колебания

В случае, когда на маятник во время движения действует сила сопротивления, колебания становятся затухающими, т. е. их амплитуда постепенно убывает. Для их описания в уравнение (16.10), наряду с моментами сил упругости, следует добавить момент сил сопротивления (трения), который можно представить как

$$M_{\text{тр}} = -k \frac{d\alpha}{dt}, \quad (16.11)$$

где $d\alpha/dt$ – угловая скорость вращения маятника;

k – постоянный коэффициент;

знак «минус» – момент сил сопротивления противоположен по направлению движения маятника.

В результате уравнение движения системы примет более сложный вид:

$$k \frac{d\alpha}{dt} - f\alpha = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (16.12)$$

Введя обозначения $\omega_0^2 = f/l$ и $2\beta = k/l$, преобразуем к виду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = 0. \quad (16.13)$$

При условии, что силы сопротивления относительно невелики (выполняется условие $\beta^2 < \omega_0^2$), решение этого уравнения примет вид

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \varphi) = A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (16.14)$$

где $A(t) = \alpha_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда колебаний, зависящая от времени;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний; причем, когда $\beta^2 \ll \omega_0^2$, то $\omega \approx \omega_0$.

Коэффициент β получил название коэффициента затухания. Он обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в $e \approx 2,72$ раз:

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (16.15)$$

На рис. 16.2 представлен график такого затухающего колебательного процесса.

На практике вместо коэффициента затухания β используют другие, связанные с β величиной:

а) декремент затухания (отношение амплитуд колебаний для двух соседних периодов)

$$\psi = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{\alpha_0 e^{-\beta t}}{\alpha_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}; \quad (16.16)$$

б) логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \psi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T; \quad (16.17)$$

в) добротность колебательной системы

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W(t+T)}. \quad (16.18)$$

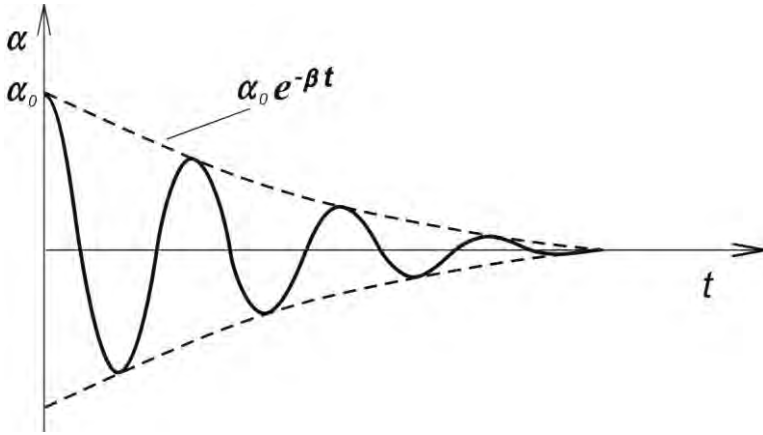


Рис. 16.2

При слабом затухании колебаний добротность с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли энергии за один период колебаний.

Так как энергия системы, совершающей колебания, равна

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2}, \quad (16.19)$$

то формулу (16.18) можно переписать как

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \\ &= 2\pi \frac{\alpha_0^2 e^{-2\beta t}}{\alpha_0^2 e^{-2\beta t} - \alpha_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} \end{aligned} \quad (16.20)$$

При слабом затухании (малом коэффициенте β) экспоненту можно разложить в ряд Тейлора, пренебрегая слагаемыми, выше первого порядка:

$$e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T.$$

Тогда формулу (16.20) можно переписать как

$$Q \approx \frac{\pi}{\beta T}. \quad (16.21)$$

С учетом (16.17) выражение (16.20) можно переписать как

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N, \quad (16.22)$$

где $N = \tau / T$ – число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в $e \approx 2,72$ раза.

Таким образом, из приведенной теории колебаний крутильного маятника видно, что период колебаний такого маятника непосредственно связан с моментом инерции маятника модулем кручения струны, а в случае затухающих колебаний – и с коэффициентом затухания и с производными от него величинами. Полученные соотношения можно использовать для определения некоторых из входящих в эти соотношения величин экспериментальным путем.

Практическая часть

Лабораторная установка

Лабораторная установка (рис. 16.3) состоит из колебательной системы (держатель 1 и струна 2), магнита 3, фотоэлектрического датчика 4, электронного устройства 5 для измерения периода и числа колебаний и шкалы 6 для измерения угловой амплитуды. Цанговые устройства 7 служат для крепления перемычки 8, а винт 9 – для крепления тел в держателе. Для измерения периода колебаний маятника необходимо нажать кнопку «Сброс» и повернуть маятник на

такой угол, при котором электромагнит будет его удерживать. Нажать кнопку «Пуск». В окошках 10 и 11 электронного устройства появляются текущие отчеты числа периодов и времени соответственно. Нажать кнопку «Стоп». Рассчитать период колебаний, разделив время на число колебаний.

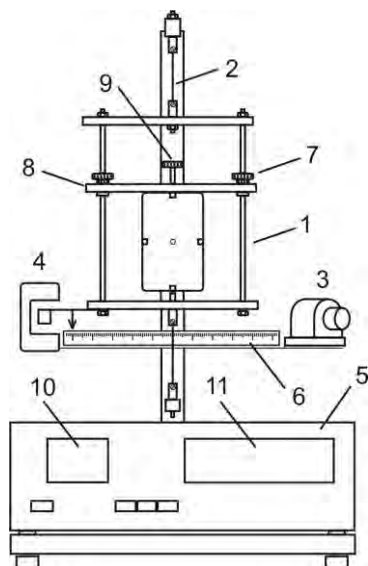


Рис. 16.3

Вывод рабочих формул

Определение модуля кручения струны и неизвестного момента инерции тела

Отклоним крутильный маятник на угол α_0 . Запасенная потенциальная энергия будет при этом равна

$$E_{\text{п}} = f \frac{\alpha_0^2}{2}, \quad (16.23)$$

где f – модуль кручения струны.

При прохождении положения равновесия маятник имеет максимальную кинетическую энергию, равную

$$E_k = I \frac{\omega_{a \max}^2}{2}, \quad (16.24)$$

где $\omega_{a \max}$ – максимальная угловая скорость маятника;

I – момент инерции маятника.

Угловая скорость маятника при крутильных колебаниях

$$\omega_a = \frac{d\alpha}{dt} = \alpha_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Следовательно,

$$\omega_{a \max} = \alpha_0 \omega_0 = \frac{2\pi\alpha_0}{T},$$

где T – период колебаний.

Поэтому

$$E_k = I \frac{2\pi^2 \alpha_0^2}{T^2}. \quad (16.25)$$

Хотя колебания затухающие, но можно полагать, что в пределах одного периода убыль энергии невелика и максимальная потенциальная энергия равна максимальной кинетической. На этом основании приравняем (16.23) и (16.25):

$$I \frac{2\pi^2 \alpha_0^2}{T^2} = f \frac{\alpha_0^2}{2}. \quad (16.26)$$

Установим в держатель маятника куб таким образом, чтобы ось вращения проходила перпендикулярно граням куба через его центр масс. В этом случае можно записать

$$(I + I_0) \frac{2\pi^2 \alpha_0^2}{T_0^2} = f \frac{\alpha_0^2}{2}, \quad (16.27)$$

где I_0 – момент инерции куба, который рассчитывается по формуле $I_0 = m l^2 / 6$ (где m – масса куба; l – длина ребра куба);

T_0 – период колебаний маятника с закрепленным в нем кубом.

Если начальные углы отклонения маятника в обоих опытах равны, то правые части формул (16.26) и (16.27) также равны и можно приравнять их левые части:

$$I \frac{2\pi^2 \alpha_0^2}{T^2} = (I + I_0) \frac{2\pi^2 \alpha_0^2}{T_0^2}. \quad (16.28)$$

Выразим отсюда момент инерции маятника:

$$I = I_0 \frac{T^2}{T_0^2 - T^2}. \quad (16.29)$$

Пусть в держателе закреплено тело с неизвестным моментом инерции I_x . На основании закона сохранения механической энергии можно записать равенство, аналогичное равенству (16.28):

$$I \frac{2\pi^2 \alpha_0^2}{T^2} = (I + I_x) \frac{2\pi^2 \alpha_0^2}{T_x^2}. \quad (16.30)$$

Откуда получим формулу для расчета I_x :

$$I_x = I \frac{T_x^2 - T^2}{T^2}, \quad (16.31)$$

где T_x – период колебаний маятника с исследуемым телом.

Период крутильных колебаний в общем виде выражается формулой (16.10). Запишем эту формулу для маятника с укрепленным в держателе кубом:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l + l_0}{f}}.$$

Получим выражение для расчета модуля кручения струны:

$$f = \frac{4\pi^2(l + l_0)}{T_0^2}. \quad (16.32)$$

Изучение затухающих колебаний

Пусть в некоторый момент t_1 амплитуда затухающих колебаний равна

$$\alpha_1 = \alpha_0 e^{-\beta t_1}, \quad (16.33)$$

а в момент времени t_2 (спустя интервал времени τ)

$$\alpha_2 = \alpha_0 e^{-\beta t_2}. \quad (16.34)$$

Разделим (16.33) на (16.34):

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = e^{\beta(t_2 - t_1)} = e^{\beta\tau}. \quad (16.35)$$

Прологарифмируем формулу (16.35) и выразим коэффициент затухания:

$$\ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \beta\tau,$$

откуда

$$\beta = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (16.36)$$

Теперь можно определить логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы:

$$\lambda = \beta T, \quad (16.37)$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N. \quad (16.38)$$

Задание 16.1. Определение модуля кручения струны и момента инерции тел

1. Измерить период колебаний маятника без закрепления тел в держателе T .
2. Закрепить куб в держатель и измерить период колебаний T_0 .
3. Рассчитать момент инерции куба I_0 ($m = 0,325 \pm 0,001$ кг, $l = 0,035 \pm 0,001$ м).
4. По формуле (16.29) рассчитать момент инерции маятника I .
5. Установить в держателе тело с неизвестным моментом инерции I_x и измерить период колебаний T_x .
6. По формуле (16.31) определить момент инерции I_x закрепленного тела.
7. По формуле (16.32) определить модуль кручения струны f .
8. Рассчитать ошибки измерений.

Задание 16.2. Изучение затухающих колебаний

1. Установить в держателе маятника куб.
2. Измерить время, в течение которого амплитуда убывает от $\alpha_1 = 120^\circ$ до $\alpha_2 = 90^\circ$.
3. По формуле (16.36) определить коэффициент затухания β .
4. По формулам (16.37) и (16.38) определить логарифмический декремент затухания λ и добротность колебательной системы Q .
5. Рассчитать погрешность измерений.

Контрольные вопросы

1. При каких условиях возникают затухающие колебания?
2. Вывод формулы для периода колебаний крутильного маятника.

3. Уравнение затухающих колебаний.
4. Что такое декремент затухания и логарифмический декремент затухания? Их связь с коэффициентом затухания.
5. Как в работе определяются модуль кручения струны и момент инерции подвесной системы?
6. Как выглядит график затухающих колебаний?

Литература

1. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – М. : Высшая школа, 2007. – С. 267–271.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1987. – Т. 1. Механика. Молекулярная физика. – С. 181–198.
3. Петровский, И. И. Механика / И. И. Петровский. – Минск : БГУ, 1973. – С. 283–317.
4. Сивухин, Д. В. Механика : учебное пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1989. – Т. 1. Общий курс физики. – 576 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 4 т. / И. В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2012. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. – С. 256–288.

Лабораторная работа № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ МЕТОДОМ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ

Цель работы:

- ознакомиться с основными характеристиками волновых процессов;
- изучить условия образования и особенности стоячей волны.

Теоретическая часть

Волновое движение. Виды волн

Процесс распространения колебаний в среде называется волновым движением или просто волной^{*}. Особую роль играют гармонические волны. Это связано с тем, что любое распространяющееся колебание, какова бы ни была его форма, всегда можно рассматривать как результат суперпозиции (сложения) гармонических волн с соответственно подобранными частотами, амплитудами и фазами.

В твердых телах колебания частиц среды, порожденные действием периодической силы, вызывающей отклонение частиц от положения равновесия, приводят к периодически изменяющимся деформациям, распространяющимся в этих телах с конечной скоростью. При рассмотрении процессов распространения волн в телах обычно отвлекаются от молекулярного строения этих тел и рассматривают их как сплошную среду, непрерывно распределенную в пространстве.

В газовой среде волны представляют собой чередующиеся области высокого и низкого давления и плотности, перемещающиеся в пространстве. Эти области возникают в результате вынужденных колебаний частиц газа, происходящих с различной фазой в различных

^{*} В общем случае наличие упругих свойств среды не является обязательным для распространения в ней волн. Например, электромагнитные и гравитационные волны распространяются и в вакууме. Поэтому в физике волнами называют всякие распространяющиеся в пространстве возмущения состояния вещества или поля. Под возмущением понимают отклонение физических величин от их равновесных состояний.

точках. Под действием изменяющегося давления волн звукового диапазона (16–20 кГц) барабанная перепонка уха человека совершает вынужденные колебания, которые через уникальную сложную систему слухового аппарата вызывают биотоки, протекающие к мозгу.

Под *частицей среды*, совершающей вынужденные колебания, понимают малый элемент объема среды, размеры которого в то же время во много раз больше межмолекулярных расстояний. Вследствие действия упругих сил деформация будет распространяться в среде с определенной скоростью, называемой *скоростью волны*.

Важно отметить, что частицы среды не увлекаются движущейся волной. Скорость их колебательного движения U отличается от фазовой скорости, с которой перемещаются поверхности одинаковой фазы v . Так как частицы совершают колебания относительно своих положений равновесия, их суммарное отклонение за период равно нулю. Поэтому распространение волн не вызывает переноса вещества, хотя при этом переносится энергия от источника колебаний в окружающее пространство.

В зависимости от того, в каком направлении происходят колебания частиц, говорят о волнах продольной или поперечной поляризации. Волны называются *продольными*, если смещение частиц среды происходит вдоль направления распространения волны (например, при периодическом упругом сжатии или растяжении тонкого стержня вдоль его оси). Продольные волны распространяются в средах, в которых силы упругости возникают при сжатии или растяжении (т. е. в твердых, жидких и газообразных).

Если частицы колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, то волны называются *поперечными*. Они распространяются только в средах, в которых возможна деформация сдвига (только в твердых телах). Кроме того, поперечные волны распространяются на свободной поверхности жидкости (например, волны на поверхности воды) или на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей (например, на границе пресной и соленой воды).

Уравнение плоской волны. Фазовая скорость

Волновой поверхностью называют геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. В простейших случаях они имеют

форму плоскости или сферы, а соответствующая волна называется плоской или сферической. **Фронтом волны** называется геометрическое место точек, до которых в данный момент времени доходят колебания. Фронт волны разделяет области пространства, уже вовлеченную в волновой процесс и еще не вовлеченную. Волновых поверхностей существует бесконечное множество, а фронт волны один, и он перемещается с течением времени.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x . Пусть частицы среды, лежащие в плоскости $x = 0$, начинают в момент $t = 0$ совершать колебания по гармоническому закону относительно исходного положения равновесия. Это значит, что смещение частиц от их исходного положения ξ изменяется во времени по закону синуса или косинуса, например,

$$\xi = A \sin \omega t, \quad (5.1)$$

где ξ – смещение данных частиц от их положения равновесия в момент времени t ,

A – максимальное значение смещения (амплитуда);

ω – циклическая частота.

Пренебрегая затуханием в среде, получим уравнение колебания частиц, расположенных в плоскости, соответствующей произвольному значению $x > 0$. Пусть волна распространяется в направлении возрастания координаты x . Чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до указанной плоскости, волне требуется время

$$\tau = \frac{x}{v}, \quad (5.2)$$

где v – скорость перемещения поверхности постоянной фазы (фазовая скорость).

Поэтому колебания частиц, лежащих в плоскости x , начнутся в момент $t = \tau$ и будут происходить по такому же закону, что и в плоскости $x = 0$, но с отставанием по времени на величину τ :

$$\xi = A \sin[\omega(t - \tau)]. \quad (5.3)$$

С учетом (5.2), выражение (5.3) преобразуется:

$$\xi = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) представляет собой уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x . Величина ξ представляет собой отклонение частиц среды, имевших любую исходную координату x , от положения равновесия в любой момент времени t при распространении указанной волны. Уравнение (5.4) соответствует случаю, когда частицам с координатой $x = 0$ в момент $t = 0$ была сообщена начальная скорость. Если же в начальный момент данным частицам сообщено отклонение от положения равновесия без сообщения скорости, в (5.4) вместо синуса нужно поставить косинус. Аргумент косинуса или синуса называют **фазой колебания**. Она определяет состояние колебательного процесса в данный момент времени (знак и модуль относительного отклонения частиц от их положения равновесия). Из (5.4) видно, что фаза колебаний частиц, расположенных в плоскости x , меньше соответствующей величины для частиц, которые расположены в плоскости $x = 0$, на величину, равную $\omega x/v$.

Если плоская волна распространяется в направлении убывания x (налево), то уравнение (5.4) преобразуется к виду

$$\xi = A \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right]. \quad (5.5)$$

Учитывая, что

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (5.6)$$

запишем (5.4) в виде

$$\xi = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)\right], \quad (5.7)$$

где T – период колебания.

Расстояние λ , на которое волна распространяется за период T , называется **длиной волны**:

$$\lambda = vT. \quad (5.8)$$

Можно также определить длину волны и как расстояние между двумя ближайшими точками, фазы колебаний которых отличаются на 2π (рис. 5.1).

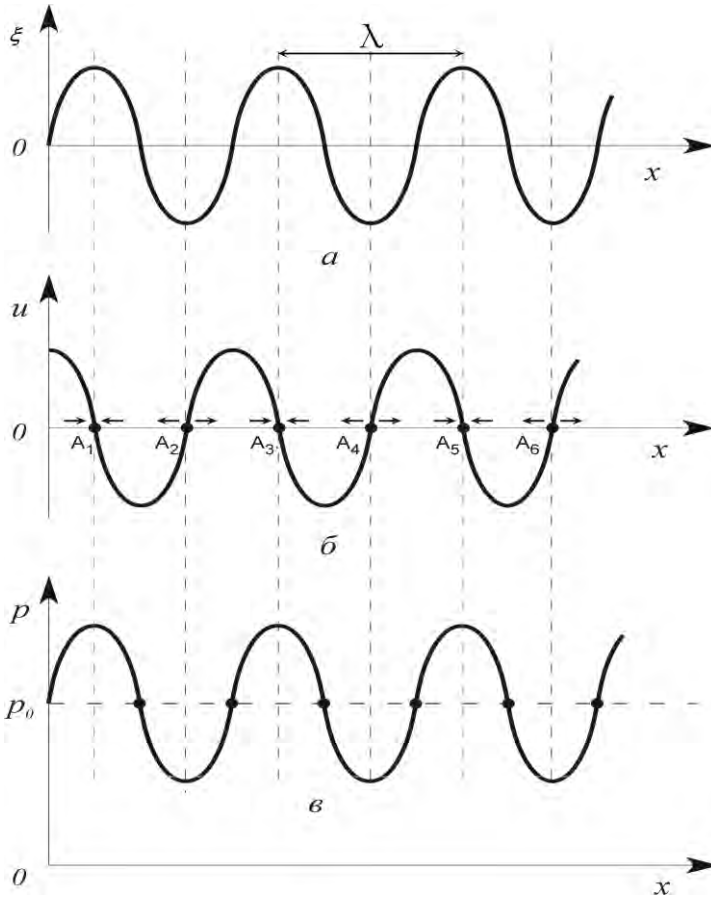


Рис. 5.1

Как отмечено выше, упругие волны в газах представляют собой чередующиеся области с более высоким и более низким давлением и плотностью, перемещающиеся в пространстве с течением времени.

Это показано рис. 5.1, на котором представлены для некоторого момента времени смещение частиц (а), их скорости (б), давление или плотность (в) в различных точках пространства. Для наглядности амплитуда кривой на рис. 5.3, в сильно увеличена (обычно выполняется условие $|\rho - \rho_0| \ll \rho_0$).

Частицы среды совершают колебания со скоростью

$$u = \frac{d\xi}{dt} = A\omega \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \quad (5.9)$$

Эту величину не надо путать с фазовой скоростью волны v . Слева и справа от точек A_1, A_3, A_5 и других скорости частиц направлены к этим точкам. Поэтому в них образуются максимумы плотности (давления). Справа и слева от точек A_2, A_4, A_6 и других скорости частиц направлены от данных точек и в них образуются минимумы плотности (давления).

Смещение частиц среды при распространении в ней бегущей волны в различные моменты времени представлены на рис. 5.2. Как видно, имеется аналогия с волнами на поверхности жидкости. Максимумы и минимумы отклонений от положения равновесия перемещаются в пространстве с течением времени с фазовой скоростью v . С такой же скоростью перемещаются максимумы и минимумы плотности (давления).

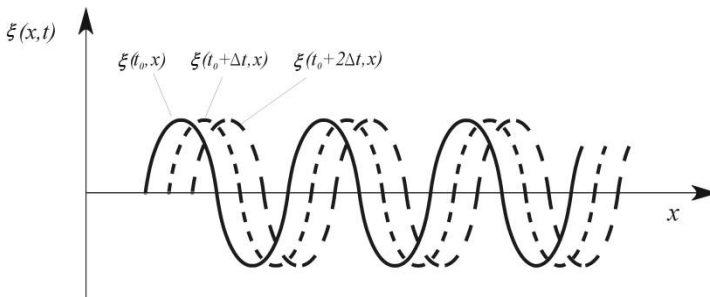


Рис. 5.2

Выражение в квадратных скобках (т. е. фазу волны) в формуле (5.7) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x}{\nu T} = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x = \omega t - kx,$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.10)$$

называется волновым числом.

Тогда уравнение бегущей волны можно представить также в виде

$$\xi = A \sin(\omega t - kx). \quad (5.11)$$

Фазовая скорость волны зависит от упругих свойств и плотности среды. В прил. Б показано, что фазовая скорость продольной волны в твердом теле определяется по формуле

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5.12)$$

где E – модуль Юнга среды;
 ρ – плотность.

Продольные волны распространяются также и в жидкостях и газах.

Скорость распространения продольной волны в жидкостях и газах определяется по формуле

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (5.13)$$

где K – модуль объемной упругости среды.

Скорость распространения поперечной волны

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (5.14)$$

где G – модуль сдвига.

Поперечные волны распространяются только в твердых телах, в которых возможна деформация сдвига, и на границах раздела сред (например, «вода–воздух»).

Скорость упругих волн в газах

Звуковые волны в воздухе являются продольными. Закон Гука для них имеет вид

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}, \quad (5.15)$$

где Δp – отклонение давления;

$\Delta V / V$ – относительное изменение объема.

Следовательно, модуль объемной упругости воздуха можно записать как

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V} = -\frac{\Delta p}{\Delta V} V. \quad (5.16)$$

Знак «минус» означает, что увеличению давления (процессу сжатия среды) соответствует уменьшение объема и наоборот. Полагая, что изменения объема и давления бесконечно малы, можно записать

$$K = -\frac{dp}{dV} V. \quad (5.17)$$

При распространении волн в газах давление и плотность периодически повышаются и понижаются (соответственно при сжатии и разрежении), в результате чего происходит изменение температуры различных участков среды. Сжатие и разрежение происходят так быстро, что смежные участки не успевают обменяться энергией. Процессы, происходящие в системе без теплообмена с окружающей средой, называются *адиабатическими*. При адиабатическом процессе изменение состояния газа описывается уравнением Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (5.18)$$

Параметр γ называют показателем адиабаты. Он равен отношению молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_v :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (5.19)$$

Взяв дифференциал от обеих частей равенства (5.18), получим

$$dpV^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{\gamma p}{V}. \quad (5.20)$$

Подставив это значение в (5.17), получим для модуля упругости газа

$$K = \gamma p.$$

Подставив полученное значение K в (5.13), найдем скорость упругих волн в газах:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (5.21)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

можно выразить плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}, \quad (5.22)$$

где μ – молярная масса;

R – универсальная газовая постоянная;

T – температура газа.

Подставляя данное выражение для плотности в (5.12), получим конечную формулу для нахождения скорости звука в газе:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}. \quad (5.23)$$

Измерение скорости звука – один из наиболее точных методов определения показателя адиабаты.

Преобразуя формулу (5.19), получим

$$\gamma = \frac{\mu v^2}{RT}. \quad (5.24)$$

Таким образом, для определения показателя адиабаты достаточно измерить температуру газа и скорость распространения звука.

Стоячие волны

Особый интерес представляет собой результат интерференции двух волн с одинаковой амплитудой и частотой, распространяющихся навстречу друг другу. На опыте это можно осуществить, если на пути бегущей волны перпендикулярно к направлению распространения поставить хорошо отражающую преграду. В результате сложения (интерференции) падающей и отраженной волн возникнет так называемая *стоячая волна*.

Уравнения падающей и отраженной волн запишем в следующем виде:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx), \quad (5.25)$$

$$\xi = A \cos(\omega t + kx). \quad (5.26)$$

Необходимо отметить, что выбор функции \sin или \cos в уравнениях волн (5.25), (5.26) не принципиален и проводится из соображений удобства.

По принципу суперпозиции суммарное смещение равно сумме смещений, создаваемых обеими волнами. Сложение выражений (5.25) и (5.26) дает

$$\xi = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (5.27)$$

Это уравнение, называемое уравнением стоячей волны, удобно в дальнейшем анализировать в виде

$$\xi = A_S \cos \omega t, \quad (5.28)$$

где множитель

$$A_S = |2A \cos kx| = \left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|. \quad (5.29)$$

является амплитудой стоячей волны. Как видно из выражения (5.29), **амплитуда стоячей волны зависит от координаты точки, но не зависит от времени. У бегущей плоской волны амплитуда не зависит ни от координаты, ни от времени (при отсутствии затухания).**

Множитель $\cos \omega t$ показывает, что в точках среды возникает колебание с той же частотой, что и колебания встречных волн. Так как функция $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ может принимать значения от 0 до 1, то амплитуда стоячей волны в зависимости от координаты точки может принимать значения от $A_S = 0$ до $A_S = 2A$.

Точки стоячей волны, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называют *узлами*, а точки, в которых она максимальна, – *пучностями*. Координаты пучностей стоячей волны можно определить из равенства

$\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1$ или $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$. Тогда для координат пучностей имеем

$$x = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad (5.30)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

Координаты узлов определяются из равенства $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0$, откуда следует, что $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \pm \pi m$ или они удовлетворяют условию

$$x = \frac{\lambda}{4} \pm m \frac{\lambda}{2}. \quad (5.31)$$

Из (5.30) и (5.31) следует, что расстояние между соседними узлами, как и расстояние между соседними пучностями, равно $\lambda / 2$, а расстояние между соседним узлом и пучностью равно $\lambda / 4$.

Из уравнения (5.27) следует, что *все точки среды, расположенные между двумя соседними узлами, колеблются в одной фазе, причем значение фазы определяется только временем. В частности, они достигают максимального отклонения в один и тот же момент времени. Для бегущей волны, как следует из (5.4), фаза определяется как временем, так и пространственной координатой.* В этом еще одно отличие между стоячими и бегущими волнами. При переходе через узел фаза стоячей волны скачкообразно изменяется на 180° .

Смещение от положения равновесия в стоячей волне в разные моменты времени приведено на рис. 5.3.

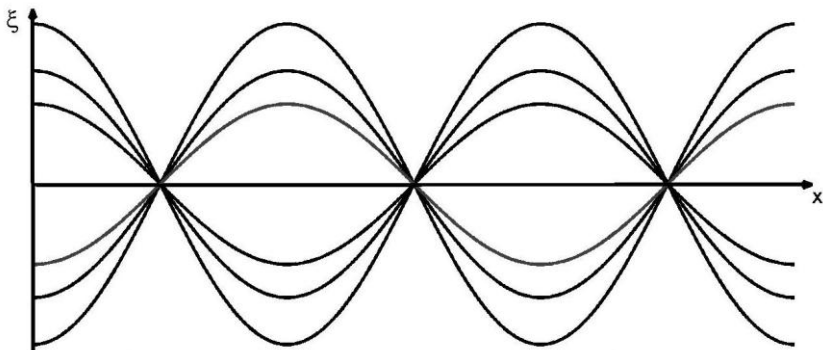


Рис. 5.3

При отражении волн на границе двух сред возникает либо узел, либо пучность (в зависимости от так называемых акустических сопротивлений сред). Акустическим сопротивлением среды называют величину ρv , где ρ – плотность среды, v – скорость упругих волн в среде. Если среда, от которой отражается волна, обладает более высоким акустическим сопротивлением, чем та, в которой эта волна возбуждается, то на границе раздела образуется узел. В этом случае фаза волны при отражении меняется на противоположную (на 180°). Амплитуда колебаний в стоячей волне как функция координаты для данного случая представлена на рис. 5.4. При отражении волны от среды с меньшим акустическим сопротивлением изменение фазы колебаний не происходит.

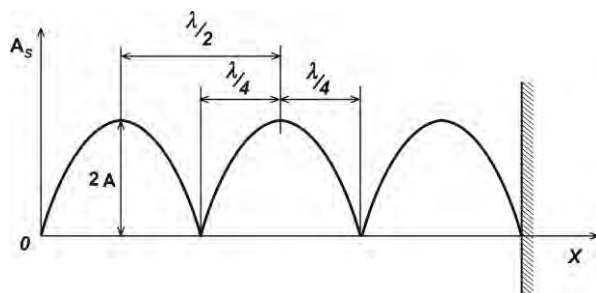


Рис. 5.4

В отличие от бегущей волны, которая переносит энергию, в стоячей волне никакого переноса энергии нет. Бегущая волна может двигаться в каком-либо направлении, а у стоячей волны нет направления распространения. Под термином «стоячая волна» нужно понимать особое колебательное состояние среды, образованное интерферирующими волнами.

В момент, когда частицы среды проходят положение равновесия, полная энергия частиц, захваченных колебанием, равна кинетической. В момент, когда отклонение частиц от положения равновесия максимально, их полная энергия является уже потенциальной.

Стоячие волны различной природы (упругие, электромагнитные) проявляются во многих физических явлениях (например, колебания струн музыкальных инструментов, камертонов, колебания электрического тока в вибраторах антенн и т. д.).

Пусть плоская звуковая волна распространяется вдоль оси цилиндра, при этом один из краев цилиндра открыт, а другой закрыт поршнем. В столбе воздуха, ограниченном его стенками и поршнем, в результате сложения падающей и отраженной от поршня волн образуется стоячая волна. Вследствие разности акустических сопротивлений поршня и воздуха на границе с поршнем всегда будет находиться узел стоячей волны. На открытом же конце цилиндра будет находиться пучность.

В этом случае в цилиндре будут устойчивыми лишь такие колебания, для которых на длине столба L укладывается нечетное число четвертей длин волн, т. е. выполняется условие

$$L = \frac{\lambda}{4}(2n-1), \quad (5.32)$$

где n – любое целое число, большее нуля.

Из этого условия можно выразить длину волны

$$\lambda = \frac{4L}{(2n-1)} \quad (5.33)$$

или частоту колебаний

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{(2n-1)v}{4L}. \quad (5.34)$$

Возникающие колебания с частотами, удовлетворяющими условию (5.34), называются собственными колебаниями системы. Колебания с наименьшей частотой $\nu_0 = v / (4L)$ называют *основным тоном*, а остальные, с частотами $3\nu_0, 5\nu_0, 7\nu_0$ – *обертнами*.

Если частота фиксирована, то устойчивых колебаний можно добиться, изменяя L путем перемещения поршня до выполнения условия (5.33). Расстояние между двумя соседними положениями поршня, при которых возникают устойчивые колебания, равно $\lambda / 2$. На эту величину отличаются и соответствующие длины столбов воздуха в трубе.

Методика определения скорости звука в воздухе

Возникновение собственных колебаний в столбе воздуха можно использовать для нахождения скорости распространения звука в нем. Эту скорость можно определить, зная длину волны λ и ее частоту ν , по формуле

$$v = \lambda \nu. \quad (5.35)$$

Для измерения длины волны используется экспериментальная установка, состоящая из стеклянной цилиндрической трубы, внутри которой может перемещаться подвижной металлический поршень P , перекрывающий сечение трубы (рис. 5.5). На противоположном конце трубы установлен микрофон M . Он превращает акустические колебания в колебания электрического тока. Зависимость тока от времени можно наблюдать на экране осциллографа (рис. 5.6).

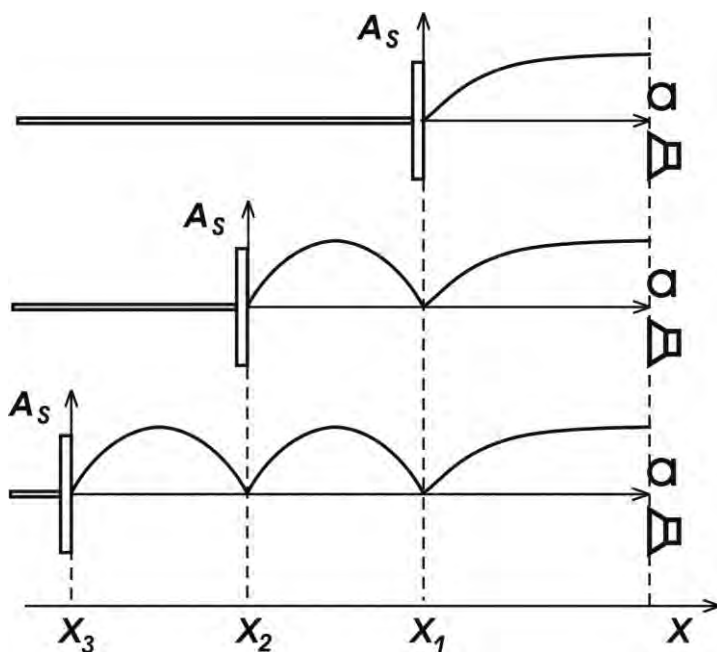


Рис. 5.5

Из динамика D в замкнутый объем (трубу) поступает звуковая волна. В результате дифракции и отражения от стенок трубы в резонаторе образуется несколько типов колебаний. При определенных положениях поршня возникает стоячая волна, аналогичная той, которая возникала бы при падении на поршень плоской волны, распространяющейся вдоль оси трубы (назовем ее осью x) и отражения от него. Перемещая поршень, можно добиться максимального сигнала в микрофоне. В этом случае положение пучности совпадает с положением мембраны микрофона, а на границе «воздух–поршень» образуется узел. Если частота фиксирована, то устойчивые колебания устанавливаются только при определенных расстояниях L между поршнем и мембраной микрофона, которые, казалось бы, можно определить из формулы (5.32).

Однако она справедлива только для идеального случая. Имеется несколько причин, по которым эта формула на практике оказывается весьма неточной.

Во-первых, данная формула соответствует так называемым идеальным границам: акустическое сопротивление второй среды стремится к бесконечности (закрытая граница) или оно стремится к нулю (открытая граница). Так как акустическое сопротивление второй среды всегда имеет конечное значение, то узлы и пучности смещаются от закрытого и открытого концов трубы. Особенно сильным оказывается смещение пучности от открытого конца трубы. Второй причиной являются так называемые волноводные эффекты, усиливающиеся по мере роста диаметра трубы. Наконец, поглощение энергии звуковой волны воздухом также вносит коррективы в указанную формулу. Совокупность этих трех факторов называют *краевым эффектом*.

По указанным причинам формула (5.32) соответствует только идеальным условиям и на практике для всей стоячей волны является неточной.

Однако краевой эффект проявляется только на ближайшей к микрофону области пространства. При перемещении поршня в направлении от микрофона достигается первое его положение, при котором в микрофоне достигается максимум интенсивности. В данном положении координату края поршня, от которого происходит отражение волны, обозначим x_1 . В точке x_1 находится узел

стоячей волны. При последующем увеличении длины столба воздуха, когда координата указанного края поршня равна x_2 , снова возникают устойчивые колебания и в микрофоне достигается максимум интенсивности. В пространстве между точками x_1 и x_2 , в которых находятся соседние узлы стоячей волны, зависимость амплитуды вдоль оси трубы уже хорошо описывается формулой для стоячей волны (5.25), и краевой эффект не проявляется. Расстояние между точками x_1 и x_2 , т. е. между соседними узлами стоячей волны, с высокой степенью точности равно $\lambda / 2$.

При достаточно длинной трубе возможно несколько положений поршня левее точки x_1 , при которых достигается максимум сигнала в микрофоне, и расстояние между любыми такими соседними положениями поршня с высокой степенью точности будет составлять $\lambda / 2$ (например, положения x_2 и x_3 на рис. 5.5).

Описанная картина носит упрощенный характер, так как в реальности происходит отражение и от закрытого конца трубы, в котором находится микрофон и происходит наложение нескольких волн. Максимумы интенсивности являются более узкими, чем при наложении только двух волн. Однако положение узлов x_1 , x_2 , x_3 не изменяется, если достигается максимум амплитуды в точке, где расположен микрофон. Соответственно, не изменяется и расстояние между соседними узлами, равное $\lambda / 2$.

Описание лабораторной установки

Установка для измерения скорости звука в воздухе (рис. 5.6) состоит из полого цилиндра 1 с перемещающимся поршнем 2 и миллиметровой линейкой 3, звукового генератора 4, динамика 5, микрофона 6, осциллографа 7.

Мембрана динамика совершает колебания с частотой, равной частоте синусоидальных колебаний генератора. Колебания мембраны возбуждают колебания воздушного столба в цилиндре с той же частотой. Возникающие колебания воспринимаются микрофоном, преобразуются в электрические сигналы, которые поступают на вход осциллографа. При перемещении поршня в цилиндре на экране осциллографа наблюдается периодическое изменение амплитуды сигнала. Расстояние между двумя ближайшими положениями поршня, при которых

наблюдаются максимумы (минимумы) сигнала, равно половине длины волны и измеряется с помощью миллиметровой линейки 3.

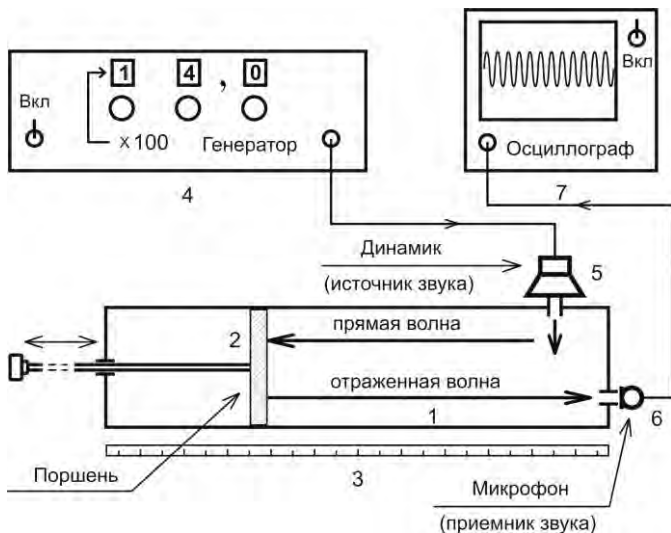


Рис. 5.6

Задание

1. Включить осциллограф. На звуковом генераторе установить значение первой из указанных частот и включить генератор.
2. Перемещая поршень в направлении от микрофона, определить два соседних положения поршня, x_1 и x_2 , при которых достигается максимальное значение сигнала на осциллографе, с которым соединен микрофон. За положение поршня принимается координата плоскости поршня, от которой отражается волна (т. е. плоскости, обращенной к микрофону).
3. Определить скорость звука в воздухе, используя формулу

$$v = 2lv, \quad (5.36)$$

где v – частота колебаний звукового генератора;

$l = |x_2 - x_1|$ – измеренное расстояние между двумя соседними положениями поршня, при которых достигается максимальное значение сигнала на осциллографе.

4. Повторить пункты 2–3 для двух других частот.
5. Рассчитать абсолютную и относительную погрешности скорости звука.
6. Рассчитать показатель адиабаты γ для воздуха по формуле (5.24).

Контрольные вопросы

1. Что такое волна?
2. Какие волны называются продольными, а какие поперечными?
3. Приведите формулы для скоростей продольных и поперечных волн.
4. Напишите уравнения бегущей волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x и в противоположном направлении. Что определяется величиной ξ ?
5. Что такое длина волны?
6. В каком случае возникают стоячие волны? Напишите уравнение стоячей волны.
7. Какие особые точки имеются у стоячей волны?
8. Чем стоячие волны отличаются от бегущих?
9. Как определяется длина волны, используя методику стоячих волн?

Литература

1. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – М. : Высшая школа, 2007. – С. 284–296.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1987. – Т. 2 : Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – С. 274–300.
3. Петровский, И. И. Механика / И. И. Петровский. – Минск : БГУ, 1973. – С. 317–341.
4. Сивухин, Д. В. Механика : учебное пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1989. – Т. 1 : Общий курс физики. – С. 379–400.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие : в 4 т. / И. В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2012. – Т. 2 : Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – С. 319–340.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Решим уравнение свободных колебаний (11.5) и покажем, что его решением действительно является гармоническая функция. Решение (11.5) будем искать в виде $e^{\lambda t}$ (стандартный прием в теории дифференциальных уравнений), где λ – некоторая неизвестная пока величина. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(e^{\lambda t})}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \quad (\text{A1})$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2(e^{\lambda t})}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подставив (A1) в (11.5), получим

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{A2})$$

или

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (\text{A3})$$

Уравнение (A3) называется характеристическим уравнением. Из него следует

$$\lambda = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0, \quad (\text{A4})$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

То есть выяснили, что λ представляет собой мнимое число. Следовательно, частные решения уравнения (11.4, 11.5) будут иметь вид:

$$x_1 = e^{+i\omega_0 t}, \quad (\text{A5})$$

$$x_2 = e^{-i\omega_0 t}.$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что полное решение однородного дифференциального уравнения представляет собой линейную комбинацию частных решений этого уравнения. Поэтому полное решение (11.5) будет иметь вид

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (\text{A6})$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные коэффициенты.

Воспользуемся формулами Эйлера, согласно которым

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (\text{A7})$$

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Тогда выражение (A6) может быть преобразовано к виду

$$x = C_1 [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] + C_2 [\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)]. \quad (\text{A8})$$

Сделаем замену, перейдя от неизвестных коэффициентов C_1 , C_2 к другим величинам A и φ , определяемым из соотношений:

$$C_1 + C_2 = A \sin \varphi, \quad (\text{A9})$$

$$i(C_1 - C_2) = A \cos \varphi.$$

Тогда, воспользовавшись тригонометрической формулой для синуса сумм двух углов, получим

$$x = A \sin \varphi \cos(\omega_0 t) + A \cos \varphi \sin(\omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (\text{A10})$$

Таким образом, из полученного результата следует, что координата тела будет изменяться со временем гармонически (т. е. зависимость от времени описываться функциями \sin или \cos):

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

или

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Функции \sin и \cos легко переходят друг в друга при изменении начальной фазы на $\pi / 2$. Поэтому для ее определения φ следует использовать дополнительные данные, например, начальные или граничные условия.

Скорость продольных волн в твердом теле

Предположим, что имеется длинный упругий стержень (рис. Б1) с площадью поперечного сечения, равной S , в котором распространяется продольное возмущение вдоль оси x с плоским волновым фронтом. Пусть за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ фронт переместится от точки A до точки B на расстояние $AB = v \Delta t$, где v – фазовая скорость упругой волны. Длительность промежутка Δt возьмем настолько малой, что скорость движения частиц во всем объеме (т. е. между сечениями, проходящими перпендикулярно оси x через точки A и B) будет одинаковой и равной u .

Частицы из точки A за указанный промежуток времени переместятся на расстояние $u\Delta t$. Частицы же, расположенные в точке B , в момент $t_0 + \Delta t$ только начнут движение и их перемещение к данному моменту времени будет равно нулю. Пусть первоначальная длина участка AB равна l . К моменту $t_0 + \Delta t$ она изменится на величину $u\Delta t$, которая и будет величиной деформации Δl . Масса участка стержня между точками A и B равна $\Delta m = \rho S v \Delta t$. Изменение импульса этой массы за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ равно

$$\Delta p = \rho S v u \Delta t. \tag{Б1}$$

Силу, действующую на массу Δm , можно определить из закона Гука:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES} \text{ или } \frac{u \Delta t}{v \Delta t} = \frac{F}{ES}.$$

Тогда $F = \frac{ESu}{v}.$

По второму закону Ньютона $\Delta p = F \Delta t$ или $\Delta p = \frac{ESu \Delta t}{v}$. Приравняв правые части последнего выражения и выражения (Б1), получим

$$\rho S v u \Delta t = \frac{E S u \Delta t}{v},$$

откуда следует

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (\text{Б2})$$

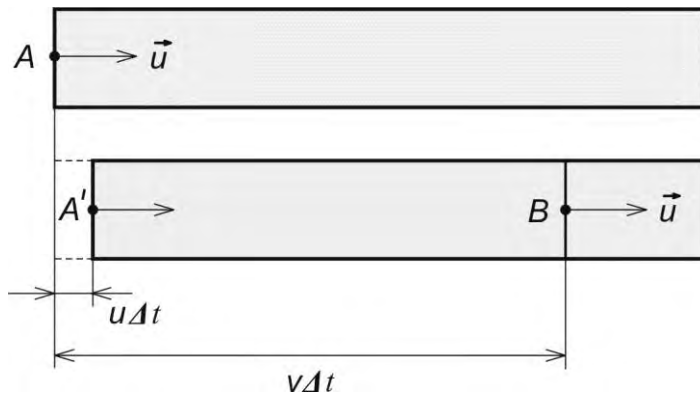


Рис. Б1

Учебное издание

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лабораторный практикум
для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические
приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные
и лазерные приборы и системы»,
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»,
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»

Составители:

БОБУЧЕНКО Дмитрий Степанович
БУМАЙ Юрий Александрович
КРАСОВСКИЙ Василий Васильевич
ЧЕРНЫЙ Владимир Владимирович

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *А. Е. Дарвиной*

Подписано в печать 30.03.2017. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 4,19. Уч.-изд. л. 3,27. Тираж 100. Заказ 605.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.