УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ ФОРМЫ РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Акимов В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In article the operational approach to a problem of construction of the closed form of the decision of one private system of the algebraic equations is considered.

Обратимся к бесконечной системе вида

$$a_n - \frac{2n}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\mathrm{th}\frac{k\pi}{2}}{n^2-k^2}\left[1-(1)^{k+n}\right] = b_n\,. \tag{1}$$

Заменим (1) функциональным и соотношением от аргумента с непрерывным спектром значений. Запишем разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} a_k th\frac{k\pi}{2}\cos kx\,. \tag{2}$$

После сравнения коэффициентов Фурье левой и правой частей равенства (2) придем к уравнению (1), устанавливая тем самым равноценность (1) и (2). Применим формализм операторного метода [1]. Берем операторы

$D_1(d_x) = \frac{d_x sh\pi d_x}{n^2+d_x^2}$ – для четных членов, содержащих cos*kx,*

$D_1(d_x) = \frac{sh\pi\, d_x}{n^2+d_x^2}$ – для нечетных членов, содержащих sin*kx,*

где $d_x = \frac{d}{dx}$.

Так как здесь $a_0 = 0$, то оператор $D_0 = \frac{sh\pi d_x}{d_x}$ применять не надо.

Запишем соотношения

$$\frac{\sin nx}{n^2+d_x^2} = -\frac{x\cos x}{2n} + A\sin nx + B\cos nx,\ \frac{\cos nx}{n^2+d_x^2} = \frac{x\sin x}{2n} + C\sin nx + D\cos nx,$$

$$\mathrm{sh}\pi d_x[x\cos nx] = \mathrm{sh}\pi d_x[d_n \sin nx] = d_n\,\mathrm{sh}\pi d_x[\sin nx] = d_n(\sin\pi n\cos nx) =$$
$$= \pi\cos\pi n\sin nx + x\sin\pi nx\cos nx = (-1)^n\pi\sin nx.$$

Аналогично рассуждая, мы получим

$$d_x\mathrm{sh}\pi d_x[x\cos nx] = (-1)^n\pi n\cos nx;$$
$$d_x\mathrm{sh}\pi d_x[x\sin nx] = (\;\;1)^n\pi n\sin nx.$$

Представим второе справа слагаемое в виде двойного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k th\frac{k\pi}{2}\cos kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k th\frac{k\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\sin mx}{m^2-k^2}\left[1-(-1^{m+k})\right] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_k th\frac{k\pi}{2}\,\frac{m\sin mx}{m^2-k^2}\left[1-(-1^{m+k})\right].$$

Репозиторий БНТУ

Применение оператора D₁ приведет нас к исходной системе (1). Таким образом, мы видим, что использование оператора D₁ соответствует способу Фурье для тригонометрических рядов.

Для достижения поставленной цели будем использовать понятие обратного оператора. Итак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(tg\,\frac{\pi d_x}{2}\right) \sin kx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(1 - tg\,\frac{\pi d_x}{2}\right)^{-1} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx\,.$$

Так как $th\frac{k\pi}{2}\cos kx = tg\,\frac{\pi d_x}{2}\sin kx$ и т.к. $th\frac{k\pi}{2}\sin kx = -tg\,\frac{\pi d_x}{2}\cos kx$;

с учетом

$$\frac{1}{1-\tan\frac{\pi d_x}{2}} = 1 + \mathrm{tg}\,\frac{\pi d_x}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\pi d_x}{2} + \mathrm{tg}^3\frac{\pi d_x}{2} = \left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi d_x}{2} + \mathrm{tg}^4\frac{\pi d_x}{2} + \cdots\right) +$$
$$+\mathrm{tg}\,\frac{\pi d_x}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi d_x}{2} + \mathrm{tg}^4\frac{\pi d_x}{2} + \cdots\right)$$

где

$$\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi d_x}{2} + \mathrm{tg}^4\frac{\pi d_x}{2} + \cdots\right)[\sin kx] = \frac{1}{1+\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}}\sin kx;$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi d_x}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi d_x}{2} + \mathrm{tg}^4\frac{\pi d_x}{2} + \cdots\right)[\sin kx] = \frac{\mathrm{th}\frac{k\pi}{2}}{1+\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}}\cos kx;$$

а также используя тождества

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi d_x}{2}\sin kx = \mathrm{th}\,\frac{k\pi}{2}\cos kx\,, \tag{3}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi d_x}{2}\cos kx = -\mathrm{th}\,\frac{k\pi}{2}\sin kx\,. \tag{4}$$

Находим

$$\left(1 - tg\,\frac{\pi d_x}{2}\right)^{-1}[\sin kx] = \frac{\mathrm{th}\frac{k\pi}{2}}{1+\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}}\cos kx + \frac{1}{1+\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}}\sin kx.$$

Преобразовывая коэффициенты при cos*kx* *и* sin*kx* будем иметь:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\mathrm{th}\frac{k\pi}{2}}{1+\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{th}\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{th}\,k\pi;$$

$$\frac{\left(1+\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}\right)-\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}}{1+\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}} = 1 - \frac{\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}}{1+\mathrm{th}^2\frac{k\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{th}\,k\pi\,\mathrm{th}\,\frac{k\pi}{2} = \frac{2\mathrm{ch}\,k\pi\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2} - \mathrm{sh}\,k\pi\,\mathrm{sh}\frac{k\pi}{2}}{2\mathrm{ch}\,k\pi\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2}} =$$
$$\frac{2\mathrm{ch}\,k\pi\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2} + \mathrm{ch}\,k\pi\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2} - \mathrm{sh}\,k\pi\,\mathrm{sh}\frac{k\pi}{2}}{2\mathrm{ch}\,k\pi\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2}} = \frac{\mathrm{ch}\,k\pi\,\mathrm{ch}\,k\pi + \mathrm{ch}\frac{k\pi}{2}}{2\mathrm{ch}\,k\pi\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{ch}\,k\pi}\right); \tag{5}$$

В результате получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(1 + \frac{1}{\mathrm{ch}\,k\pi}\right)\sin kx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\mathrm{th}\,k\pi\cos kx.$$

Если левую и правую часть равенства (5) умножить на sin*kx* и проинтегрировать от 0 до π, то окончательно находим:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{ch}\,k\pi}\right)b_n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\frac{\mathrm{th}\,k\pi}{n^2-k^2}\left[1 - (1)^{n+k}\right]. \tag{6}$$

Построенное решение необходимо проверить.

Репозиторий БНТУ

Подействуем почленно оператором $\left(1 - tg\frac{\pi d_x}{2}\right)$ на левую и правую часть решения (5), учитывая при этом (3), (4). После выполнения несложных операций придем к исходной форме разложения (2), эквивалентной системе (1), при этом нужно учесть тождества

$$1 + \frac{1}{\operatorname{ch} k\pi} + \operatorname{th} k\pi \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \equiv 2,$$

$$\operatorname{th} k\pi - \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{\operatorname{ch} k\pi} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \equiv 0.$$

Таким образом, решение (3) удовлетворяет системе (1).

Отметим, что рассматриваемая бесконечная система (1) имеет отношение к одной задаче теории фильтрации, поэтому справедливо указать на прикладное значение полученного результата. Кроме того в этой статье впервые был найден и применен обратный оператор $\left(1 - tg\frac{\pi d_x}{2}\right)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. – Минск: Технопринт, 2003. – 101 с.

Репозиторий БНТУ