ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППАРАТА МАТРИЦ ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КАРДАННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The feasibility of matrix methods are shown for definition of function of position cardan joint.

В учебной литературе по теории механизмов и машин для определения кинематических характеристик карданной передачи (механизма шарнира Гука) обычно используются методы начертательной геометрии. Вместе с тем для решения этих задач может быть успешно применён аппарат матриц. Использование матричных методов в учебном курсе теории механизмов и машин прежде всего связано с введением нового раздела «Манипуляторы и промышленные роботы». Но возможности этого метода могут быть использованы и в ряде других случаев, в частности для определения функции положения карданной передачи.

На рис. 1, *а* показана схема карданной передачи в вертикальной плоскости. Передача состоит из двух одинаковых вилок 1 (ведущей) и 3 (ведомой) и крестовины 2. На рис.1, *б* показан вид слева на крестовину.

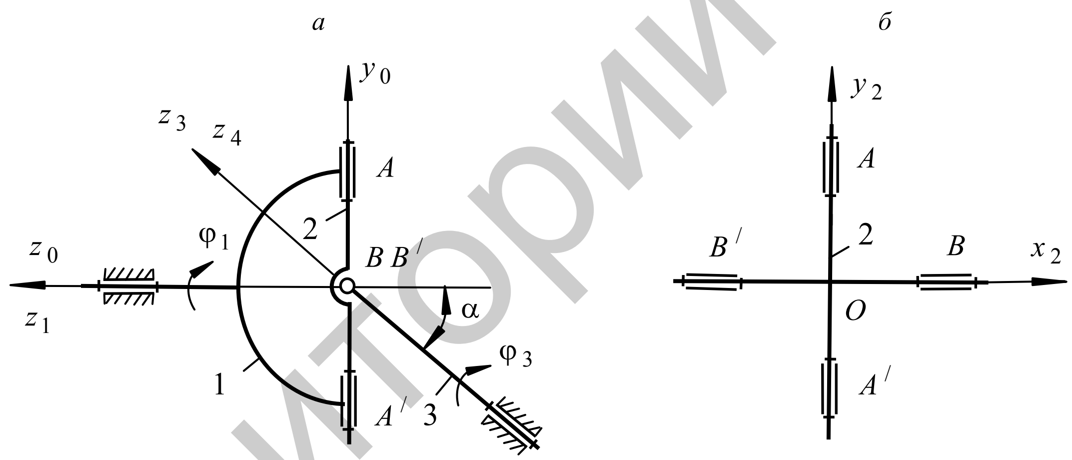

Рис. 1

С каждым звеном связываем систему координат. Системы $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ и $x_3 y_3 z_3$ – подвижные, системы $x_0 y_0 z_0$ и $x_4 y_4 z_4$ – неподвижные. Относительное положение координатных систем характеризуется углами: φ_1 - угол поворота вилки 1 вокруг оси $z_1(z_0)$, φ_3 – угол поворота вилки 3 вокруг оси $z_3(z_4)$, φ_{21} – угол относительного поворота крестовины 2 вокруг оси $y_2(y_1)$, α – угол между осями z_0 и z_4 в вертикальной плоскости. Все системы координат имеют общее начало в точке O. Поэтому для получения уравнений преобразования координат используются только матрицы поворота 3×3, которые описывают одноосные повороты вокруг соответствующей оси. Выражения этих матриц получаются на основании схем относительного положения систем координат, представленных на рис.2. Каждый элемент матриц записывается в соответствии с известными правилами составления матриц поворота при переходе от одной координатной системы к другой [3]. Например, матрица A_{01} выражает переход от системы координат $x_1\,y_1\,z_1$ к системе $x_0\,y_0\,z_0$ при вращении системы $x_1\,y_1\,z_1$ вокруг общей оси $z_1\left(z_0\right)$ (см. рис.2, *а*) и имеет вид

$$A_{01}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

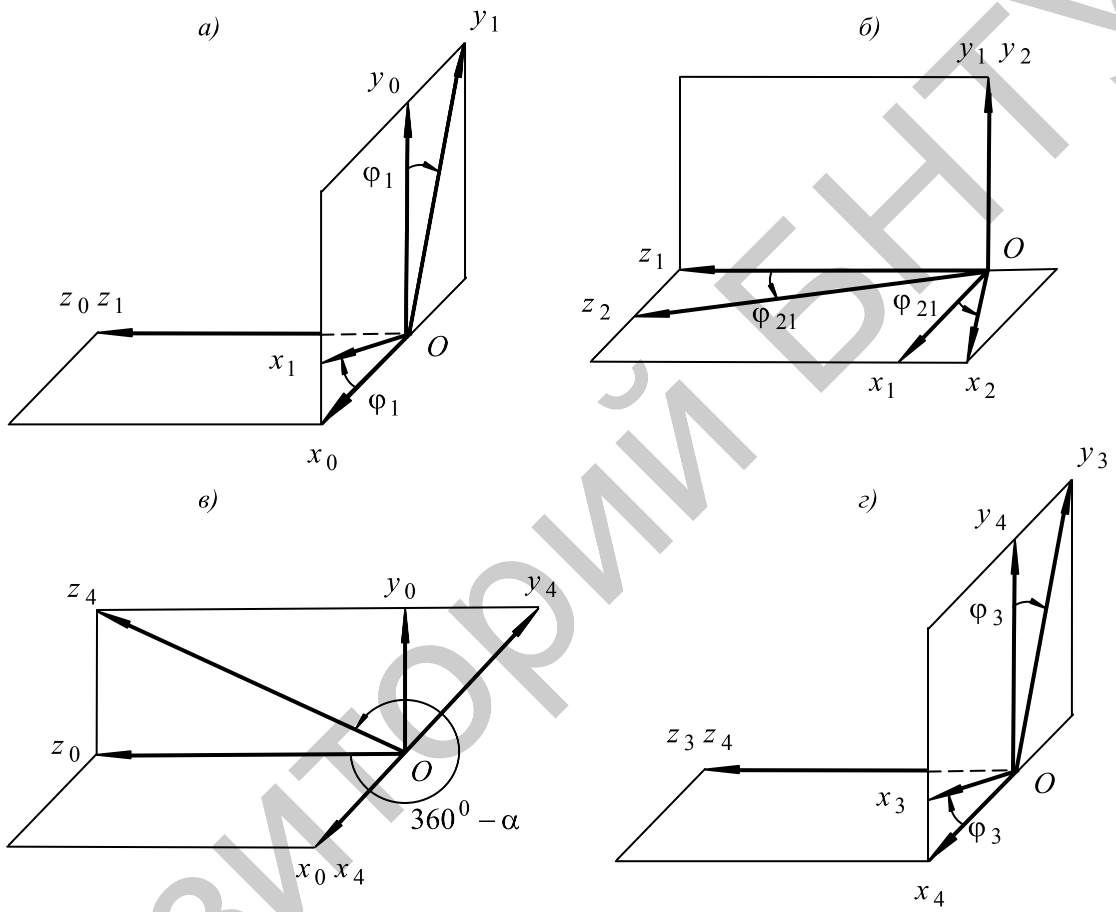

Рис. 2

Аналогичным образом на основании рис.2*б*, 2*в* и 2*г* получены и остальные матрицы:

$$A_{12}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_{21} & 0 & \sin\varphi_{21}\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi_{21} & 0 & \cos\varphi_{21}\end{bmatrix};\quad A_{04}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix};$$

$$A_{43}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & 0\\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Для получения матричного уравнения, выражающего зависимость угловых параметров карданной передачи, воспользуемся методом размыкания замкнутой кинематической цепи механизма в точке B – центре вращательной кинематической пары, связывающей звенья 2 и 3 [2]. Тогда

$$A_{01}\,A_{12}\,r_B^{(2)} = A_{04}\,A_{43}\,r_B^{(3)}, \tag{1}$$

где $r_B^{(2)}$ и $r_B^{(3)}$ – столбцовые матрицы, составленные из координат точки B соответственно в системах $x_2\,y_2\,z_2$ и $x_3\,y_3\,z_3$.

$$r_B^{(2)} = r_B^{(3)} = \begin{bmatrix} l_{OB} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После перемножения матриц в уравнении (1) и приравнивания соответствующих элементов получим

$$l_{OB}\cos\varphi_1\cos\varphi_{21} = l_{OB}\cos\varphi_3, \tag{2}$$

$$l_{OB}\sin\varphi_1\cos\varphi_{21} = l_{OB}\cos\alpha\sin\varphi_3, \tag{3}$$

$$-l_{OB}\sin\varphi_{21} = -l_{OB}\sin\alpha\sin\varphi_3. \tag{4}$$

Разделив выражение (3) на выражение (2), получаем соотношения, выражающие функцию положения $\varphi_3(\varphi_1)$ карданной передачи в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\cos\alpha}.$$

Алогичное выражение, полученное геометрическим методом, приводится в учебнике [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
2. Литвин, Ф.Л. Определение функции положения пространственного механизма способом условного размыкания контура / Ф.Л. Литвин // Машиноведение. – 1970. – № 3. – С. 51-57.
3. Филонов, И.П. Теория механизмов, машин и манипуляторов / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: Дизайн ПРО, 1998. – 656 с.