

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Л. Калиниченко, В.А. Калиниченко. Новые методы крепления пористых и компактных материалов. Сборник научных трудов X МНТК. Современные методы и технологии создания и обработки материалов. Минск: ФТИ. 16–18.09.2015. Кн. 1. С.72–79.
2. Калиниченко В.А., Калиниченко М.Л., Григорчик А.Н. Новые методы крепления пористых и компактных материалов на основе титана *Вестник ГрДУ імя Янкі Купалы*. Сер 6. Тэхніка. – 2015. – № 1(198). – С.24–30.
3. Склеивание в машиностроении. Справочник в 2 томах. Т.1 / Д. А. Аронович, В. П. Варламов, В. А. Войтович и др.; Под общ. ред. Г. В. Малышевой. — М.: Наука и технологии, 2005. — 544с.
4. Г. Эпштейн. Склеивание металлов. Авторизованный перевод с английского канд. техн. наук Б.И. Паншина. Под общей редакцией А.Т. Туманова. М.: Государственное издательство оборонной промышленности. 1956. – 212 с.
5. Ж.–Ж. Вильнав. Клеевые соединения. Перевод с французского Л.В. Синегубовой. — М.: Техносфера, 2007. — 385с.
6. М.Л. Калиниченко, В.А. Калиниченко. Сборник научных трудов X МНТК. Современные методы и технологии создания и обработки материалов. Минск: ФТИ. 16–18.09.2015. Кн. 2. С. 196–199.

УДК 621.002

Кане М.М.

ПРЕДПОСЫЛКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

В статье показаны условия использования методов корреляционно-регрессионного и дисперсионного анализа для моделирования технологических процессов, при которых достигается требуемая точность модели и надежная оценка ее адекватности. Обоснована необходимость этих условий, приведены методы проверки их соблюдения.

Задачи исследования

Для моделирования различных случайных процессов, в том числе процессов механической обработки деталей машин, широко используются такие статистические методы, как корреляционно-регрессионный и дисперсионный анализ. При этом качество модели во многом зависит от качества экспериментальных данных, положенных в ее основу. Поэтому ряд авторов указывают на необходимость предварительного анализа экспериментальных данных [1, 2, 3].

Основные результаты

Анализ указанных методов моделирования и распространенных методов оценки адекватности и достоверности полученных результатов показывает, что их эффективное применение возможно при соблюдении следующих требований к экспериментальным данным:

1. зависимые и независимые переменные являются случайными величинами с нормальным законом распределения*;
2. дисперсия зависимой переменной y не зависит от абсолютных значений y – остается постоянной или однородной при различных наблюдениях y ;
3. значения независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_m измеряются с пренебрежимо малыми ошибками по сравнению с ошибкой измерения y ;
4. переменные x_1, x_2, \dots, x_m линейно независимы;
5. процесс формирования y является стационарным и эргодическим;

* Независимые переменные могут быть и неслучайными величинами, в частности, в активных экспериментах.

6. экспериментальные данные получены из ряда независимых испытаний, наблюдений и образуют случайную выборку из данной генеральной совокупности;
7. результаты наблюдений не содержат резко выделяющихся значений, не принадлежащих к данной генеральной совокупности.

В чем причины необходимости соблюдения названных требований к экспериментальным данным? При анализе технологического процесса как случайного стоят задачи оценки параметров распределений независимых и зависимых переменных и проверки различных гипотез. К основным параметрам распределения случайной величины x относится функция плотности распределения $f(x)$ (закон распределения вероятностей), математическое ожидание Mx , дисперсия Dx . К параметрам случайного процесса относятся также коэффициенты уравнения регрессии $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, связывающего средние арифметические значения зависимой y и независимых x_1, x_2, \dots, x_n переменных.

Основными гипотезами, рассматриваемыми при моделировании технологического процесса, являются гипотезы о доверительных интервалах и доверительных вероятностях для параметров распределений переменных, адекватность модели, достоверность коэффициентов регрессии, характер и степень тесноты взаимосвязей между переменными, вид функции распределения, наиболее точно описывающей фактическое распределение параметра, принадлежность величины к генеральной совокупности, однородность ряда дисперсий и др.

Методы определения параметров распределений и моделей, а также критерии для проверки статистических гипотез делятся на два класса: параметрические и непараметрические. Первые методы и критерии эффективны при распределении изучаемых случайных величин по нормальному закону. Для второго класса методов и критериев это условие отсутствует.

К первому классу относятся наиболее развитые и распространенные методы моментов и максимального правдоподобия для расчета параметров распределений; наименьших квадратов для расчета параметров уравнений регрессии; критерии, использующие χ^2 – распределение, t – распределение Стьюдента, F – распределение Фишера, B – распределение (β – распределение), Γ – распределение (γ – распределение), корреляционный анализ и др. К непараметрическим методам относятся Чебышевская аппроксимация для обработки результатов экспериментов вместо метода наименьших квадратов, критерий знаков для сравнения характеристик двух выборок, критерий Сиджела-Тьюки для сравнения дисперсий двух выборок, критерий Краскела и Уоллиса принадлежности ряда независимых выборок единой генеральной совокупности, коэффициент ранговой корреляции Спирмена для оценки тесноты связи и др. Критерии, которые сохраняют «работоспособность» при нарушении предпосылки о нормальном распределении изучаемых случайных величин, называются устойчивыми (рабастными). Под «работоспособностью» понимается способность критерия сохранять вероятность ошибок при их использовании для оценок случайных величин, не подчиняющихся нормальному закону распределения. Большую устойчивость имеют непараметрические критерии, но они имеют небольшую мощность. Параметрические критерии (χ^2 , F , t и др.) имеют большую мощность (меньшую вероятность ошибки при выборе альтернативной гипотезы), но во многих случаях неустойчивы.

Установлено, что один и тот же критерий будет устойчивым при проверке одной нулевой гипотезы и неустойчивым при проверке другой. Например, при использовании критерия χ^2 для проверки гипотезы о законе распределения он весьма устойчив. Однако, при проверке гипотезы о дисперсии изучаемой случайной величины и некоторых других гипотез он уже довольно неустойчив. Критерий Стьюдента рекомендуется использовать для проверки гипотезы о математическом ожидании не только для нормально распределенных случайных величин, но и для величин, имеющих симметричное распределение (асимметрия равна нулю), отличное от нормального.

Приведенные данные указывают на необходимость тщательного выбора статистических критериев и гипотез, проверяемых этим критерием, при планировании методов обработки экспериментальных данных.

Проверка соответствия эмпирических распределений независимых и зависимых случайных величин закону нормального распределения необходима для выбора наиболее эффективных в данных условиях методов обработки и анализа экспериментальных данных, повышения

их точности, в частности, надежности оценки вероятностей, с которыми справедливы те или иные гипотезы.

Довольно часто экспериментальные данные содержат отдельные порции, выборки. При планировании эксперимента это могут быть результаты, полученные в разных точках плана эксперимента. При пассивных экспериментах для увеличения разброса независимых переменных приходится увеличивать длительность исследования или варьировать его некоторые условия. Полученный массив данных должен быть однородным, свободным от систематических ошибок. Вариативность зависимых переменных должна быть обусловлена влиянием только учтенных независимых переменных. При соблюдении этого требования может быть получена точная взаимосвязь изучаемых переменных. Признаком соблюдения требования однородности исходных данных является принадлежность значений y в различных порциях данных к одной генеральной совокупности. Только при соблюдении этого требования можно переходить к следующему этапу обработки опытных данных.

В работах Г.Н.Веселой показано, что ошибки измерений независимых переменных в значительно большей степени влияют на погрешность модели, чем ошибки измерений зависимой переменной. Установлено, что ошибки в определении значений независимых переменных не должны превышать 5-7% интервала их варьирования. Ошибки в определении значения зависимой переменной могут составлять до 30% интервала ее варьирования.

Отсутствие взаимосвязей между независимыми переменными позволяет получить компактную и точную модель их влияния на зависимую переменную y . При наличии взаимосвязей между независимыми переменными необходимо выполнить их ранжирование по степени влияния на y и менее значимые факторы, связанные с более значимыми факторами, следует исключить из модели.

Экспериментальные данные, полученные при пассивном эксперименте в примерно одинаковых условиях можно рассматривать как случайные функции. Примерами таких данных являются результаты измерений характеристик деталей машин, обработанных на одном станке при постоянной настройке одного инструмента за период его стойкости. Получение и обработка экспериментальных данных в этом случае существенно упрощается, если рассматриваемый технологический процесс является стационарным и обладает эргодическим свойством.

Стационарным, как известно, называется процесс, для которого математическое ожидание $m_x(t)$ и дисперсия $D_x(t)$ постоянны (однородны), а корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ зависит только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$, т.е.

$$m_x(t) = m_x = const ; \quad (1)$$

$$D_x(t) = D_x = const ; \quad (2)$$

$$K_r(t_1, t_2) = K_r(t_2 - t_1) = K_{rr}(\tau). \quad (3)$$

Условие (3) может быть записано, как

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_{xx}(\tau) = 0 \quad (4)$$

или как

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = 0, \quad (5)$$

где $R_{xx}(\tau)$ – нормированная корреляционная функция.

Стационарная случайная функция обладает эргодическим свойством, если ее характеристики m_x , D_x , $K_x(\tau)$ могут быть рассчитаны как соответствующие средние по времени для одной реализации большой продолжительности. Иными словами, эргодичность определяет способность процесса к воспроизведению своих характеристик в различных реализациях. Следовательно, условием эргодичности процесса является соблюдение условий (1-3) для различных реализаций процесса. Эргодичными могут быть только стационарные процессы. Если стационарный процесс обладает эргодическим свойством, его основные характеристики могут быть

установлены по одной реализации достаточно большой продолжительности (объем выборки $n = 50 \dots 100$ шт.) Если анализ выборки не подтвердил стационарность процесса, необходимо либо учесть фактор времени в модели процесса как независимую переменную, либо найти объем выборки (период времени для ее отбора), для которой процесс будет стационарным.

Применение многих статистических методов является правомерным лишь в ситуациях, когда справедливо допущение о статистической независимости обрабатываемого ряда наблюдений $x_1, x_2 \dots x_n$. Этот же вопрос возникает и применительно к случайным процессам $\{X_1(t_1) \dots X_N(t_N)\}$. Альтернативой случайности выборки является отбор данных по какому-то принципу, при котором, например, имеет место зависимость результатов наблюдения от порядкового номера наблюдения. Такая ситуация снижает точность модели процесса. Поэтому необходимо в пассивном эксперименте обеспечить стохастическую независимость наблюдений.

Предварительный анализ экспериментальных данных иногда устанавливает результаты, резко отличающиеся по своему значению от остальных. Возникает вопрос о причинах таких отклонений. Являются ли они обычными случайными колебаниями изучаемого параметра, связанными с его природой, или они вызваны влиянием неучтенных факторов, либо нарушением условий сбора данных, либо грубыми ошибками измерений? В последних двух случаях «подозрительные» наблюдения, очевидно, следует исключить из дальнейшего рассмотрения, т.к. их учет снизит точность математической модели.

При наличии резко выделяющихся опытных данных необходимо уточнить условия их получения и, по возможности, повторить эксперимент. Если проведение такого анализа и повторение эксперимента затруднительно или повторный эксперимент приводит тоже к «подозрительным» результатам, тогда необходимо прибегнуть к статистическим методам оценки резко выделяющихся опытных данных.

Укажем наиболее предпочтительные методы проверки соблюдения названных предпосылок успешного использования статистических методов для моделирования технологических процессов.

Оценка распределения зависимой и независимых (для пассивного эксперимента) переменных по нормальному закону может производиться либо на основе анализа природы этих переменных, либо с помощью критериев согласия, либо с помощью приближенных критериев. К числу наиболее распространенных критериев согласия относятся критерии Пирсона χ^2 , Колмогорова λ , Смирнова ω^2 (для некоторых условий его называют критерием Мизеса-Смирнова или Андерсона-Дарменга), критерий Шапиро-Уилка W . Процедуры применения этих критериев описаны в [2, 4]. Критерии согласия не позволяют применять однозначное решение о соответствии изучаемого распределения некоторому теоретическому закону. С их помощью нулевая гипотеза о виде функции распределения либо отклоняется, либо считается, что имеющаяся информация не дает повода для отклонения выдвинутой гипотезы о виде функции распределения. Поэтому на практике эмпирическую функцию распределения часто сравнивают с несколькими теоретическими и в качестве предпочтительной принимают ту, которая в наилучшей степени согласуется с эмпирической. Чем меньше значение критерия согласия, тем больше степень приближения эмпирического и теоретического законов распределения.

Критерий χ^2 является наиболее универсальным. Он применим для любых распределений, видов случайных величин (дискретных и непрерывных), при отсутствии данных о параметрах теоретического распределения. Но для его использования необходим большой объем выборки ($n \geq 100$) и рекомендуется полученный с его помощью результат подтвердить с помощью другого критерия согласия, особенно при $n \approx 100$.

Критерий Колмогорова λ теоретически является более мощным, чем критерий Пирсона χ^2 , но он применяется для проверки гипотез о законах распределения только непрерывных случайных величин. Ограничением области его применения является требование о том, что значения параметров гипотетической функции распределения должны быть заранее известны. Если это условие не соблюдается и параметры гипотетического распределения оцениваются по данным выборки большого объема ($n = 100 \dots 200$), рекомендуется применять больший уровень значимости $\alpha = 0,10 \dots 0,20$.

Критерий согласия ω^2 используется при объемах выборки $50 \leq n \leq 200$ и является более мощным, чем критерий χ^2 , но при его применении требуется больший объем вычислений.

Критерий согласия Шапиро-Уилка W предназначен для проверки гипотезы о нормальном или логарифмически нормальном распределении при ограниченном объеме выборки ($n \leq 50$) и является более мощным, чем другие критерии.

К приближенным методам оценки нормальности распределения относятся:

1. графический метод, при котором опытные данные наносят на вероятностную бумагу и сравнивают с графиком принятой функции распределения;
2. сравнение выборочных показателей асимметрии и эксцесса эмпирического распределения с их средними квадратическими отклонениями;
3. по совокупности малых выборок, при объеме выборок $n = 4$ [4];
4. по величине эмпирического коэффициента вариации $V = S/\bar{x}$ (для нормального закона $V \approx 0,25$, для логарифмически нормального закона $V \approx 0,68$).

Если распределение входящих в модель случайных величин отличается от нормального, приближение этих распределений к нормальному можно достичь их преобразованием. Простейшими из них являются преобразования вида $y = \sqrt{x}$, $y = \lg(x + a)$. В работах А.Хальда, Дж.Бокса, Д.Кокса приведены более сложные преобразования [2].

Однородность двух выборок при нормальном распределении измеряемого параметра проверяют с помощью критерия Фишера, нескольких выборок при их одинаковом объеме – с помощью критерия Кохрена, нескольких выборок при их неравном объеме – с помощью критерия Бартлета [2, 3, 4]. Однородность дисперсии случайной величины y также может быть достигнута путем ее преобразования. Например, путем замены y на $\ln y$. Воспроизводимость опытов и однородность дисперсий достигается, когда выявлены и устранены источники нестабильности эксперимента, а также с помощью более точных методов и средств измерений.

Для проверки стационарности процесса случайную последовательность значений его характеристики, соответствующую порядку проведения измерений, разбивают на несколько (5...10) равных отрезков. Для каждого j -го отрезка определяют среднее арифметическое значение \bar{y}_j и дисперсию Sy_j^2 . Условие стационарности (2) проверяется с помощью критерия Кохрена, условие (1) – с помощью критерия Фишера [3], а условие (3) – путем последовательного расчета значений нормированной корреляционной функции $R_{xx}(\tau)$ для рассматриваемых отрезков. Условие (3) считается выполненным при соблюдении условия (5) [5].

При проверке эргодичности процесса используют ту же методику что и при проверке его стационарности. Но вместо отрезков одной выборки рассматривают несколько (3-5) реализаций объемом 50...100 шт, полученных в примерно одинаковых условиях, характерных для данного процесса [5].

Проверка независимости, случайности ряда наблюдений может производиться с помощью критериев медианы выборки, «восходящих» и «нисходящих» серий, квадратов последовательных разностей (критерия Аббе) [2, 3]. Последний критерий является более мощным, чем другие. Он может быть использован, если изучаемая выборка извлечена из нормальной генеральной совокупности. При применении критерия Аббе по значениям x_i выборки, расположенным в порядке их наблюдения ($x_1, x_2, x_3 \dots x_n$), образуются $n-1$ разностей между соседними членами: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = x_3 - x_2 \dots a_{n-1} = x_n - x_{n-1}$. Затем определяются

$$C^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2; \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Для оценки случайности выборки используется критерий $\tau = C2/S2$. Если $\tau \leq \tau_\alpha$, то гипотеза о стохастической независимости, случайности результатов наблюдений отвергается с вероятностью $P = 1 - \alpha$. Для $n > 60$ τ_α подсчитывается по формуле

$$\tau_\alpha = 1 + \frac{U_\alpha}{\sqrt{n + 0,5(1 + U_\alpha^2)}},$$

где U_α – α -квантиль нормированного нормального распределения.

Для анализа резко выделяющихся значений случайных величин в выборке используют графический и аналитические методы [2]. Наиболее распространенным критерием для исключения одного экстремального значения является критерий К.Пирсона-Н.В.Смирнова-Ф.Граббса

$$\tau = \frac{|x - \bar{x}|}{S},$$

где x – крайний (max или min) элемент в выборке, \bar{x} , S – среднее арифметическое значение и среднее квадратическое отклонение в полной выборке (до исключения крайнего значения).

Критические значения $\tau_{1-\alpha}$ для данного уровня значимости α зависят только от объема выборки n . При $\tau > \tau_{1-\alpha}$ крайнее значение x отбрасывается как ошибочное. Процесс исключения подозрительных значений рекомендуется начинать с максимального значения и проводить последовательно для крайних значений вариационного ряда. После исключения ошибочного результата значения \bar{x} и S необходимо пересчитать. Критерий τ справедлив для нормально распределенных случайных величин и чувствителен к отклонениям от этого закона. Для уменьшения вероятности ошибочного решения предварительно необходимо убедиться в том, что результаты получены при соблюдении требований к точности измерений в постоянных условиях реализации процесса. Для повышения надежности анализа выделяющихся результатов аналитический метод их анализа может быть дополнен графическим.

Выводы

1. Впервые применительно к технологическим процессам механической обработки деталей машин сформулированы требования к экспериментальным данным, используемым для их моделирования.

2. С учетом специфики изучаемых процессов обоснована необходимость соблюдения указанных требований, описаны пути их достижения при получении или обработке экспериментальных данных.

3. Показаны предпочтительные методы проверки соблюдения указанных требований и приведены рекомендации по эффективному применению этих методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон, Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента: пер. с англ. / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М. : Мир, 1981. – 520 с.
2. Айвазян, С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: справочное издание / С.А. Айвазян, Е.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
3. Кане, М.М. Основы научных исследований в технологии машиностроения. учеб. пособие для вузов / М.М. Кане. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – 231 с.
4. Степнов, М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний : справочник / М.Н. Степнов. – М. : Машиностроение, 1985. – 232 с.
5. Кане, М.М. Анализ эргодичности процессов зубофрезерования и шевингования цилиндрических зубчатых колес / М.М. Кане: сб. науч.ст Машиностроение, вып.5. – Минск : Вышэйшая школа, 1981.