

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч., Гурин А.Н.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The account of torsion bars with a non-round cross-section is presented. It's a practical interesting method as most simply account. The approximation of geometrical reinforce with 8 per. miscalculation is received. The particular cases of non-round cross-sections (there are ellipse, triangle and rectangle) are considered.

Большой практический интерес представляет собой вопрос о кручении стержней некруглого поперечного сечения, применяемых в различных конструкциях. В таких стержнях при кручении поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются (депланируют). Это связано с тем, что точки поперечного сечения получают перемещения, направленные вдоль оси стержня.

Если на стержень не наложены связи, препятствующие свободной деформации его поперечных сечений, то такое кручение называется свободным. При свободном кручении в стержне возникают лишь касательные напряжения.

Таким образом, при кручении стержней некруглого поперечного сечения нарушается одна из основных гипотез сопротивления материалов — гипотеза плоских сечений. Поэтому при решении таких задач необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но также их депланацию. Эта задача усложняется еще и тем, что напряжения в стержне определяются функцией не одной переменной (ρ) полярной системы координат, как в стержнях круглого сечения, а двух переменных (x, y) декартовой системы координат. Следовательно, определение напряжений в стержнях некруглого поперечного сечения представляет собой довольно сложную задачу, которая решается методами теории упругости [1].

При кручении стержней произвольного поперечного сечения основными параметрами, представляющими практический интерес, являются наибольшие касательные напряжения τ_{max} , возникающие в стержне, и относительный угол закручивания θ (угол закручивания на единицу длины стержня). При этом независимо от формы сечения значения этих величин могут быть записаны в виде

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_k}; \quad \theta = \frac{T}{GI_k}; \quad \theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (1)$$

где T — крутящий момент, приложенный к стержню; G — модуль сдвига материала стержня; $d\varphi$ — взаимный поворот поперечных сечений стержня на участке dz ; W_k и I_k — геометрические характеристики сечений некруглой формы при кручении — соответственно геометрическая характеристика прочности (момент сопротивления кручению) и жесткости (геометрическая жесткость).

Задачу о кручении стержней впервые решил знаменитый французский ученый Б. Сен-Венан (1797–1886). Однако, точное решение, предложенное Сен-Венаном и заключающееся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений равновесия совместно с заданными краевыми условиями, является довольно сложным, даже для простых сечений. Немецкий ученый Л. Прандтль (1875–1953) впервые предложил решение этой задачи путем введения понятия функции напряжений $\Phi(x, y)$, что значительно упрощает расчет.

Эта функция дифференцируема и связана с касательными напряжениями следующим образом [2, 3]:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (2)$$

Функция Φ должна удовлетворять уравнениям равновесия, уравнениям сплошности и краевым условиям. Подставляя соотношения (2) в уравнения равновесия и применяя формулы закона Гука при кручении, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = -2G\theta. \quad (3)$$

При свободном кручении краевые условия на торцах принимают вид (рис. 1):

$$\int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = T. \quad (4)$$

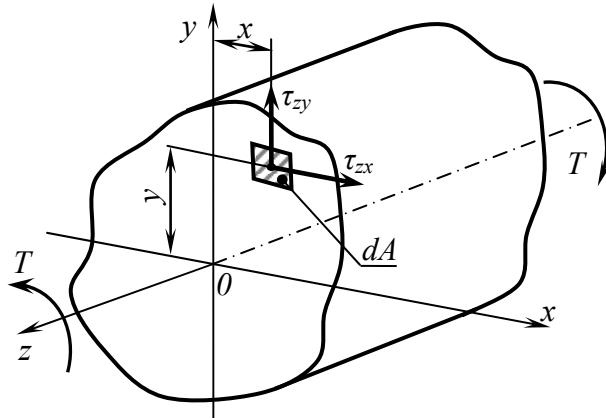


Рис. 1. К определению краевых условий на торцевой поверхности стержня

Учитывая выражения (2), а также, применяя теорему Грина при интегрировании [3], условие (4) может быть записано в следующем виде:

$$T = 2 \int_A \Phi dA. \quad (5)$$

Но, так как $T = G\theta I_k$, то формула для определения геометрической жесткости односвязных (сплошных, без внутренних полостей) сечений принимает вид:

$$I_k = \frac{2}{G\theta} \int_A \Phi dA. \quad (6)$$

Функция напряжений может быть определена следующим образом [3]:

$$\Phi = C \cdot f(x, y), \quad (7)$$

где $f(x, y)$ — уравнение контура сечения; C — постоянная, определяемая из уравнения (3).

При этом для точек контура:

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые простейшие сечения.

Эллиптическое сечение. Уравнение

контура (рис. 2) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b — полуоси эллипса.

С учетом условия (8) функцию Φ записываем в следующем виде:

$$\Phi(x, y) = C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Подставляя в уравнение (3), находим постоянную C :

$$C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta.$$

По формуле (6) находим геометрическую жесткость:

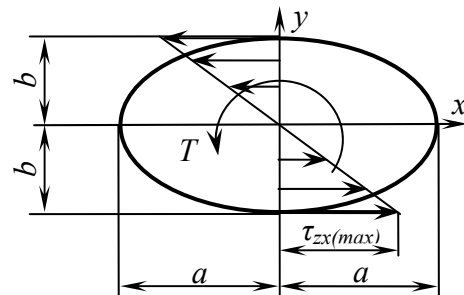


Рис. 2. Распределение касательных напряжений в эллиптическом сечении

$$I_k = \frac{2}{G\theta} \int_A C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dA = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} \left(A - \frac{1}{a^2} I_y - \frac{1}{b^2} I_x \right),$$

где A, I_x, I_y — соответственно площадь и осевые моменты инерции сечения.

После интегрирования и упрощения получим

$$I_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Тогда

$$T = G\theta \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Функция Φ принимает вид:

$$\Phi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = -\frac{T}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

По уравнениям (2) находим:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2T}{\pi a b^3} y; \quad \tau_{zy} = \frac{2T}{\pi a^3 b} x.$$

Наибольшие напряжения возникают в точках пересечения контура с малой осью эллипса:

$$\tau_{\max} = \tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k}, \quad \text{где} \quad W_k = \frac{\pi a b^2}{2}.$$

Для кругового сечения $\left(a = b = \frac{d}{2} \right)$ получим

$$I_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{\pi d^4}{32} = I_p; \quad W_k = \frac{\pi a b^2}{2} = \frac{\pi d^3}{16} = W_p.$$

где I_p и W_p — соответственно полярный момент инерции и полярный момент сопротивления сечения круглой формы.

Треугольное сечение (треугольник равнобедренный). Запишем уравнения сторон треугольника в центральных осях x, y (рис. 3):

$$\text{сторона AB: } y + \frac{h}{3} = 0;$$

$$\text{сторона AC: } y - \sqrt{3}x - \frac{2}{3}h = 0;$$

$$\text{сторона BC: } y + \sqrt{3}x - \frac{2}{3}h = 0.$$

Функция напряжений запишется в виде:

$$\Phi(x, y) = C \left[\left(y + \frac{h}{3} \right) \left(y - \sqrt{3}x - \frac{2}{3}h \right) \left(y + \sqrt{3}x - \frac{2}{3}h \right) \right].$$

Используя (3), находим постоянную C :

$$C = -G\theta.$$

Находим геометрическую жесткость по формуле (6):

$$I_k = \frac{2}{G\theta} \int_A \Phi dA.$$

Подставляя значение Φ , раскрывая скобки и интегрируя в пределах изменения переменных x и y , окончательно получим

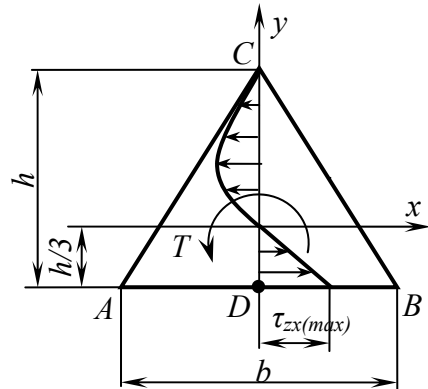


Рис. 3. Распределение касательных напряжений в треугольном сечении

$$I_k = \frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{b^4\sqrt{3}}{80}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в т. D основания АВ:

$$\tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k}, \text{ где } W_k = \frac{2 \cdot h^3}{15 \cdot \sqrt{3}} = \frac{b^3}{20}.$$

Принимая $T=G\theta I_k$, можно записать:

$$\tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k} = G\theta \frac{I_k}{W_k} = G\theta \frac{h}{2}.$$

Прямоугольное сечение. Вышеизложенный метод не позволяет получить решение для прямоугольных сечений. В этом случае функция напряжений представляется в виде ряда Фурье:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f(y) \cdot \cos \frac{n\pi x}{b}, \quad (9)$$

где $f(y)$ — функция, подлежащая определению.

Так как на контуре $\Phi(x, y)=0$, то в формуле (9) используются только нечетные значения n ($n=1, 3, 5, \dots$).

Геометрическая жесткость в этом случае определяется следующим образом:

$$I_k = k_1 \frac{bh^3}{3} = k_1 I_{x_1},$$

где I_{x_1} — момент инерции сечения относительно оси x_1 , проходящей через большую сторону сечения (рис. 4).

Значение коэффициента k_1 определяется по формуле [3]:

$$k_1 = 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{h}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{th(k_n b)}{(2n+1)^2} \approx 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{h}{b} \cdot th\left(\frac{\pi b}{2h}\right), \text{ где } k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h}.$$

Максимальные касательные напряжения, которые возникают посредине длинных сторон (точки А и А₁ на рис.4), равны:

$$\tau_{\max} = \tau_{zx(\max)} = k_2 \frac{T}{W_k}, \text{ где } W_k = \frac{I_k}{h}.$$

Значение коэффициента k_2 определяется по формуле [3]:

$$k_2 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \cdot ch(k_n b)}.$$

По вышеперечисленным формулам можно вычислить значения коэффициентов k_1 и k_2 при любых соотношениях сторон прямоугольного сечения.

Следует отметить, что в отечественной литературе по сопротивлению материалов приводятся следующие формулы для определения W_k и I_k [5, 6]:

$$W_k = \alpha bh^2; \quad I_k = \beta bh^3.$$

При этом для сечений, у которых $b \gg h$, $\alpha = \beta = 1/3 \approx 0,333$. Такому значению коэффициентов α и β нет логического объяснения.

В то же время, согласно формулам, предлагаемым в настоящей статье, в предельном случае ($b \gg h$) получим: $k_1 = k_2 = 1$. И тогда

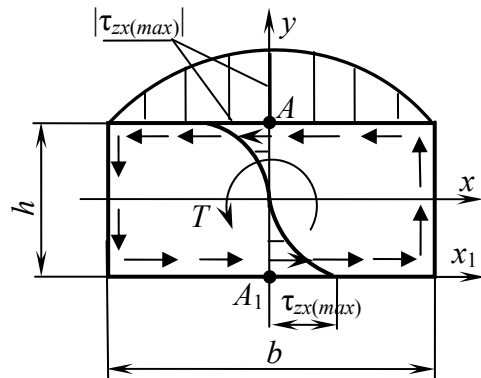


Рис. 4. Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении

$$I_k = I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad W_k = \frac{I_{x_1}}{h} = \frac{bh^2}{3} = 2W_x,$$

где W_x — осевой момент сопротивления прямоугольного сечения.

Такой подход к решению задачи о кручении стержня прямоугольного сечения является, на наш взгляд, более логичным.

В [2] приведены приближённые формулы для определения коэффициентов α и β :

$$\alpha \approx \frac{1}{3 + 1,8 \frac{h}{b}}; \quad \beta \approx \frac{1}{3 + 2 \left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2} \right)}.$$

Применяя эти формулы, можно получить приближенные выражения для вычисления коэффициентов k_1 и k_2 :

$$k_1 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2} \right)}; \quad k_2 = \frac{1 + 0,6 \frac{h}{b}}{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2} \right)}.$$

Расчет I_k по приближенной формуле Сен-Венана. Для определения геометрической жесткости сплошных сечений произвольной формы Б. Сен-Венаном была предложена следующая приближённая формула [4]:

$$I_k = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p}. \quad (10)$$

Учитывая то, что величины A и I_p можно легко определить, формула (10) представляет собой хорошую аппроксимацию величины I_k для любых односвязных сечений. При этом погрешность вычислений составляет не более 8%. В то же время в отечественной литературе по сопротивлению материалов эта формула нигде не встречается.

Таким образом, приведенные в статье формулы позволяют значительно упростить решения, связанные с кручением стержней некруглого односвязного поперечного сечения. Предложенная методика представляет практический интерес в инженерных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян.— М.: Ассоц. строит. ВУЗов, 1995.— 572 с.
2. Биргер, И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов.— М.: Наука, 1986.— 560 с.
3. André Bazergui, Thang Bui-Quoc, André Biron, Georgus McInure, Charles Laberge. Résistance des matériaux. — Ecole Polytechnique de Montréal, 2003. — 466 p.
4. Pierre Agati, Frédéric Lerouge, Marc Rosseto. Résistance des matériaux. — Paris: Dunod, 2004.— 454 p.
5. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов: учебник / Э.И. Старовойтов.— Гомель: БелГУТ, 2004.— 376 с.
6. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин.— М.: Физматлит, 2002.— 544 с.