УДК 372.881

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ» В СРЕДНЕЙ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Чернявская С.В., к. ф.-м. н., доцент

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Вопрос о преемственных связях в преподавании математики в школе и ВУЗе в течение ряда лет является основой научного исследования на кафедре естественно-научных дисциплин ИИФОиМО. Проблема нестыковки школьного курса математики с высшей в последнее время приобрела особо острое звучание, поскольку уровень знаний учащихся, а следовательно, и студентов младших курсов снизился и многие из них испытывают трудности в овладении в достаточном объеме курса высшей математики.

Рассмотрим возможность соединить методы элементарной математики и математического анализа на примере одной из важнейших тем - решения задач на экстремум. Представляется интересным рассмотреть наиболее известные из методов решения и найти точки их соприкосновения или показать возможность решения одной задачи различными методами. Потребность в современных методах решения указанного типа задач вызвала к жизни такие разделы современных научных знаний как вариационное исчисление, выпуклый анализ, теорию оптимального управления.

В курсе школьной математики задачам на экстремум уделяется недостаточное внимание и, встречаясь на экзамене с нестандартно поставленной задачей на эту тему, абитуриенты не знают, как к ней подступиться. Однако, для решения минимаксных задач в элементарной математике имеется целый набор приемов решения. Например, метод перебора при заданных ограничениях, применение теорем о средних, нахождение множества значений функции и другие. Приведем ряд примеров.

Пример 1. По двум перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке О, движутся точки А и В по направлению к О со скоростями 1 м/с и 2 м/с. Достигнув точки О, они продолжают движение.

В начальный момент времени расстояния АО=5м, ВО=20м. Через сколько секунд расстояние АВ будет минимальным?

Решение. Обозначив за t искомое время, выразим расстояния ОА и ОВ через t секунд от начала движения: $(5-t)^2, (20-2t)^2$. Тогда квадрат расстояния между точками А и В в этот момент будет равен $AB^2 = (5-t)^2 + (20-2t)^2 = 5t^2 - 90t + 425$. Наименьшее значение квадратичная функция такого вида имеет в вершине параболы, то есть при t=9.

Рассмотрим примеры, в которых для нахождения максимальных или минимальных значений используются известные неравенства. В частности, для любых неотрицательных чисел $x_1, x_2, ...x_n$ справедливо неравенство между их средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$. Равенство достигается при $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Пример 2. Дан круг единичного радиуса. На диаметре АВ взята точка F, через нее проведена хорда CD. Найти положение хорды, при котором площадь четырехугольника ACBD будет максимальной.

Решение. Введем следующие обозначения: O- центр окружности, $|OF| = a, \angle CFB = \alpha$. Тогда $|CD| = 2\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \alpha}$ и площадь четырехугольника через произведение диагоналей выразится следующим образом: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \sin\alpha, \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Найдем наибольшее значение функции при указанных ограничениях.

Пусть $a \sin\alpha = \sqrt{x}$, тогда

$f(x) = (1-x)x, x \in \left[0; a^2\right], f'(x) = 1 - 2x$ и стационарная точка $x = 0{,}5$. При этом возможны два случая:

1) если $|a| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $f_{\max} = f(0{,}5)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2) если $|a| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $f_{\max} = f(a^2)$, откуда $\alpha = \arcsin\frac{1}{a\sqrt{2}}$.

Пример 3. Некоторая фирма по продаже компьютеров заказала 2400 штук у поставщика, которые могут быть доставлены все сразу или несколькими партиями в течение года. Раскупаются компьютеры равномерно, в среднем по 200 штук в месяц. Доставка одной партии компьютеров на склад (независимо от количества) обходится компании в 1000 у.е. Хранение на складе одного компьютера в течение года обходится в 30 у.е. Какими партиями нужно заказывать компьютеры, чтобы доставка и хранение их в течение года обходились как можно дешевле?

Решение. Пусть в каждой партии будет x компьютеров, тогда количество партий равно 2400/x. Затраты на доставку составят $\frac{240 \cdot 10^4}{x}$ руб. На складе в среднем будет храниться x/2компьютеров и затраты на хранение составят 15x руб. Тогда суммарные затраты будут равны $f(x) = \frac{240 \cdot 10^4}{x} + 15x$. Найдем, при каком x функция принимает наименьшее значение. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, получим $f(x) \ge 2\sqrt{\frac{240 \cdot 10^4}{x} \cdot 15x} = 12000$. Минимум суммарных затрат равен 12000 и достигается это значение при x=400.

Заметим, что многие из рассмотренных задач легко решаются методами математического анализа.

Рассмотренные примеры являются лишь небольшой частью огромного класса задач на оптимизацию, где демонстрируется взаимодействие методов математики элементарной и высшей. В этом взаимодействии проявляется преемственность в обучении математике в школе и вузе, без которой невозможно получение устойчивых знаний и навыков.