УДК 51(07.07)

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Сенькова Е.В., преподаватель

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Данный тип уравнений довольно часто используется при изучении технических дисциплин, встречаются такие задания на вступительных экзаменах и в заданиях ЦТ . Как правило, подобные задачи вызывают трудности в решении учащимися. Исходя из этого, тема эта актуальна и требует к себе отдельного внимания и рассмотрения. Можно выделить семь методов решения таких уравнений: метод группировки, метод перебора, метод неопределенных коэффициентов, использование обобщенной теоремы Виета, метод функциональной подстановки, метод Виета-Кардано, графический метод.

Рассмотрим примеры на *метод функциональной подстановки*. Суть метода состоит в ведении новой переменной, применение которой приводит к более простому выражению. Сложность метода заключается в выборе вида самой подстановки.

Пример 1:

Решить уравнение

$$64\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3-\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^3=63$$

Решение: Обозначим $u=4\dfrac{x+3}{x-1}$ и $v=\dfrac{x+3}{x+2}$, тогда исходное уравнение примет вид $u^3-v^3=63$

Кроме того, имеем

$$u-v=(x+3)\left(\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{3(x+3)^2}{(x-1)(x+2)}=\frac{3uv}{4}\ ,$$

получаем

$$u^3 - v^3 = (u - v)\left(u^2 + uv + v^2\right) = (u - v)(\left((u - v)^2 + 3uv\right) = \frac{3uv}{4}\left(\frac{9u^2v^2}{16} + 3uv\right) = 63$$

Пусть $y = uv$, то получаем $y\left(3y^2 + 16y\right) = 448$

Единственным решением уравнения $3y^3 + 16y^2 - 448 + 0$ является y = 4.

Так как y= uv, $u = 4\frac{x+3}{x-1}$ и $v = \frac{x+3}{x+2}$, то $\frac{4(x+3)^2}{(x-1)(x+2)} = 4$ и $x = -\frac{11}{5}$

Ответ: $x = -\frac{11}{5}$

Рассмотрим пример на использование *тригонометрической подстановки.* Этот прием относится к числу нестандартных методов решения алгебраических уравнений

Пример 2:
Решить уравнение

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Решение:
Поскольку x = 0 не является корнем уравнения, то разделим обе его части на 2x. Тогда

$$4x^2 = \frac{1}{2x} + 3$$

Если x<-1 или x>1, то левая часть уравнения будет больше 4, а правая его часть – меньше 4. Следовательно, корни исходного уравнения находятся на отрезке $-1 \le x \le 1$

Пусть x=cosw, где $0 \le w \le \pi$, тогда исходное уравнение принимает вид тригонометрического уравнения

$$8\cos^3 w - 6\cos w - 1 = 0 \;;$$

$$4\cos^3 w - 3\cos w = \frac{1}{2} \;;$$

$$\cos 3w = \frac{1}{2} \;;$$

Решением последнего уравнения являются

$w = \frac{\pi}{9}(6n \pm 1)$, где n - число корней. Однако, $0 \le w \le \pi$, поэтому

$w_1 = \frac{\pi}{9}$; $w_2 = \frac{5\pi}{9}$ и $w_3 = \frac{7\pi}{9}$

Так как $x = \cos w$, то $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$; $x_2 = \cos\frac{5\pi}{9}$; $x_3 = \cos\frac{7\pi}{9}$

Ответ. $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos\frac{5\pi}{9}$, $x_3 = \cos\frac{7\pi}{9}$

Пример 3

Решить уравнение

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^2 - 3x$$

Решение:

Естественная область определения уравнения будет $-1 \le x \le 1$ Поэтому можно воспользоваться тригонометрической подстановкой $x = \cos w$, где $0 \le w \le \pi$, тогда получаем $|\sin w| = \cos 3w$ Поскольку $0 \le w \le \pi$, то sinw = cos3w.

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$\cos 3w - \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right) = 0 \;;$$

$$\sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2w - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Решением этого уравнения являются $w = \frac{3}{4}\pi + \pi n$ или $w = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$,где $n, k \in Z$

Поскольку $0 \le w \le \pi$, то подходящими являются только три значения $w_1 = \frac{\pi}{8}$, $w_2 = \frac{5\pi}{8}$, $w_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Так как $x = \cos w$ *, то исходное уравнение имеет три корня:*

$$x_1 = \cos w_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$x_2 = \cos w_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ;$$

$$x_3 = \cos w_3 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ /