УДК 51.(07.07)

НЕСТАНДАРТНЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Пинчукова С.П., преподаватель

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Существует ряд уравнений, для решения которых используются нестандартные методы: функциональные методы; методы, основанные на ограниченности входящих в уравнение функций; методы замены переменных тригонометрическими выражениями и другие.

Рассмотрим примеры решения таких уравнений.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение

$$4\sin^3 x - \sin x + \cos x = 0$$

Решение. Умножим $\cos x - \sin x$ на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Имеем

$$4\sin^3 x + (\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$4\sin^3 x + \sin^2 x\cos x - \sin^3 x + \cos^3 x - \sin x\cos^2 x = 0$$

$$3\sin^3 x + \sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x + \cos^3 x = 0$$

Разделим обе части этого уравнения на $\cos^3 x \neq 0$

Получим $3tg^3 x + tg^2 x - tgx + 1 = 0$

Пусть $tgx = m$.

Тогда $3m^3 + m^2 - m + 1 = 0$ (*)

Если уравнение (*) имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена, т.е. находятся среди чисел 1 и -1 .

Если $m = 1$, то $3m^3 + m^2 - m + 1 = 3 + 1 - 1 + 1 \neq 0$,

Если $m = -1$, то $3m^3 + m^2 - m + 1 = -3 + 1 + 1 + 1 = 0$, Значит, $m=-1$ - корень уравнения (*), следовательно, многочлен $3m^3+m^2-m+1$ делится на $m+1$. В частном получается $3m^2-2m+1$.

Уравнение (*) принимает вид $(m+1)(3m^2-2m+1)=0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1, \\ 3m^2-2m+1=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1, \\ \varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow \ m=-1.$$

Значит, $tgx=-1, x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in z.$ Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$6x\sqrt{1-9x^2}+18x^2-3\sqrt{2}x-1=0.$$

Решение. Пусть $y=3x$, тогда $2y\sqrt{1-y^2}+2y^2-\sqrt{2}y-1=0$.

Из этого уравнения следует, что $y\in[-1;1]$.

Каждому значению y из отрезка $[-1;1]$ соответствует и притом только одно значение t из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ такое, что $y=\sin t$, т.е. $t=\arcsin y$.

Для переменной t уравнение принимает вид

$$2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+2\sin^2 t-\sqrt{2}\sin t-1=0 \ ,$$

$$2\sin t\cdot|\cos t|+2\sin^2 t-\sqrt{2}\sin t-1=0 \text{, т.к. } t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\text{,то } \cos t>0;$$

$$2\sin t\cdot\cos t+(2\sin^2 t-1)-\sqrt{2}\sin t=0 \text{, } \sin 2t-\cos 2t-\sqrt{2}\sin t=0.$$

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{2}$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t-\sin t=0\,,\ \sin 2t\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}-\sin t=0\,,$$

$$\sin(2t-\frac{\pi}{4})-\sin t=0\,,\ 2\sin\frac{2t-\frac{\pi}{4}-t}{2}\cdot\cos\frac{2t-\frac{\pi}{4}+t}{2}=0\,,$$

$$\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0,\\ \cos\left(\frac{3t}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}=\pi n,\ n\in z,\\ \frac{3t}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in z;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in z,\\ t=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3},k\in z;\end{array}\right.$$

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ первое уравнение имеет один корень $t_1=\frac{\pi}{4}$, а второе уравнение на этом отрезке имеет два корня

$$t_2=\frac{5\pi}{12},\ t_3=\frac{5\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{3\pi}{12}=-\frac{\pi}{4}.$$

Им соответствует три корня исходного уравнения:

$$x_1=\frac{1}{3}y_1=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6},\ \ x_2=\frac{1}{3}y_2=\frac{1}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

и

$$x_3=\frac{1}{3}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{12}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right).$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{6}}}{12}$.

Пример 3. При каком значении t уравнение $3\sin^2 5x - 7\cos x + 10\log_2(x^2+16) - 11x^2 - 5 = t$ имеет нечетное число корней?

Решение. Рассмотрим функцию

$$y = 3\sin^2 5x - 7\cos x + 10\log_2(x^2+16) - 11x^2 - 5$$

1. Область определения этой функции – множество действительных чисел, т.е. область определения этой функции симметрична относительно нуля.

2. $y(-x) = 3\sin^2(-5x) - 7\cos(-x) + 10\log_2((-x)^2+16) - 11(-x)^2 - 5 =$
$$= 3\sin^2 5x - 7\cos x + 10\log_2(x^2+16) - 11x^2 - 5 = y(x).$$

3.

Значит, эта функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат. Следовательно, количество отрицательных нулей функции равно количеству положительных нулей этой функции. Поэтому сумма количества отрицательных нулей функции и положительных нулей функции – число четное. Уравнение будет иметь нечетное число корней, если $x = 0$ является корнем этого уравнения.

Если $x = 0$, то

$$t = 3\sin^2 0 - 7\cos 0 + 10\log_2 16 - 110 - 5 = 0 - 7 + 10 \cdot 4 - 5 = 28.$$

Ответ. 28.