Итак, уравнение имеет два корня: x=0 и $x=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: *x=0 и* $x=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

УДК 51.(07.07)

ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Коваленок Н.В., старший преподаватель
Кленовская И.С., старший преподаватель

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

В практике вступительных экзаменов и в заданиях ЦТ достаточно часто встречаются задачи на определение наибольших и наименьших значений функций. Как правило, подобные задачи допускают варианты решения с применением и без применения производной. В связи с тем, что сейчас тема «производная» включена в школьный курс как ознакомительная тема, более актуальными оказываются такие приемы, как замена переменной и применение стандартных неравенств, вытекающих из свойств элементарных функций, изучаемых в школьном курсе алгебры.

Рассмотрим метод вычисления наибольших и наименьших значений функций, основанный на применении подходящей замены переменной и сведения в последующем к задаче по исследованию на некотором промежутке квадратичной функции.

Пример 1. Найти наименьшее значение функции.

$$f(x) = (4-x)(1-x)(x+4)(x+7).$$

Решение. $(4-x)(1-x)(x+4)(x+7) = (x^2+3x-28)(x^2+3x-4)$.

Произведем замену $t = x^2+3x$. Рассмотрим выражение

$$(t-28)(t-4) = t^2 - 32t + 112 = (t-16)^2 - 144.$$

Это выражение при t=16 принимает наименьшее значение, равное -144.

Уравнение $x^2+3x-16=0$ имеет решения $x = \frac{-3-\sqrt{73}}{2}$ и $x = \frac{-3+\sqrt{73}}{2}$.

Следовательно, при этих значениях x выражение

$(4-x)(1-x)(x+4)(x+7)$ принимает наименьшее значение -144.

Ответ: наименьшее значение функции равно -144.

Также приведём пример, в котором первоначально производится преобразование тригонометрических функций и далее используется свойство ограниченности тригонометрических функций.

Пример 2: Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = 2\sin^4 x + \cos^4 x.$$

Решение. Используя формулы $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, получим $f(x) = 2(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = 2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} + \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{3-2\cos 2x+3\cos^2 2x}{4}$.

Пусть $t = \cos 2x$, $-1 \le t \le 1$. Рассмотрим функцию: $y(t) = \frac{3}{4} \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot t + \frac{3}{4}$ на отрезке [-1; 1]. Исходная задача свелась к равносильной задаче, нахождения наименьшего значения квадратичной функции $y(t)$ на отрезке [-1; 1]. Так как абсцисса вершины $t_в = \frac{1}{3}$ принадлежит отрезку [-1; 1], старший коэффициент $y(t)$ положителен, то наименьшее значение квадратичной функции равно её значению в точке $t = t_в$, т.е.

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}.$$

Выполняя обратную замену, получаем, что функция $f(x) = 2\sin^4 x + \cos^4 x$ принимает наименьшее значение, также равное $\frac{2}{3}$, и достигается оно при x таких, что $\cos 2x = \frac{1}{3}$, т.е. при $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ. Наименьшее значение функции равно $\frac{2}{3}$.

Пример 3: Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\sin\left(6x + \frac{7\pi}{10}\right)-\sin\left(6x + \frac{\pi}{5}\right).$$

Решение. $f(x)=\sin\left(6x+\frac{7\pi}{10}\right)-\sin\left(6x+\frac{\pi}{5}\right)=2\cos\frac{\left(6x+\frac{7\pi}{10}\right)+\left(6x+\frac{\pi}{5}\right)}{2} \cdot$ $\sin\frac{\left(6x+\frac{7\pi}{10}\right)-\left(6x+\frac{\pi}{5}\right)}{2} = 2\cos\left(6x + \frac{9\pi}{20}\right)\cdot \sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cos\left(6x+\frac{9\pi}{20}\right)$.

Поскольку для всех $x \in R$ справедливо неравенство
$-1 \le \cos\left(6x+\frac{9\pi}{20}\right) \le 1$, то: $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\cos\left(6x+\frac{9\pi}{20}\right) \le \sqrt{2}$.

Следовательно, наибольшее значение функции равно $\sqrt{2}$ и достигается, если $\cos\left(6x+\frac{9\pi}{20}\right) = 1$, т.е. при $x = -\frac{3\pi}{40} + \frac{\pi ï}{3}$, $n \in Z$.

Ответ. Наибольшее значение функции равно $\sqrt{2}$.

При решении некоторых уравнений и неравенств олимпиадного уровня так же бывает необходимо находить наибольшее и наименьшее значения функций.

Пример 4: Решить уравнение $tg^2 6x+cos^2 6x+1=\sqrt{1-2cos2x-4\cos x}$.

Решение. Преобразуем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения.

$$cos^2 6x + (tg^2 6x+1) = \sqrt{1-2\left(2cos^2 x-1\right)-4\cos x};$$

$$cos^2 6x + \frac{1}{cos^2 6x} = \sqrt{3-4\cos x-4cos^2 x}.$$

$$cos^2 6x + \frac{1}{cos^2 6x} = \quad . .$$

Выражения, входящие в левую и правую часть уравнения, имеют смысл при значениях *x,* удовлетворяющих следующей системе неравенств:

$$\begin{cases}(2\cos x+1)^2 \le 4 \\ \cos 6x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \le 0,5 \\ \cos 6x \ne 0\end{cases}.$$

При этих значениях *x* справедливо двойное неравенство

$$0 \le 4- (2\cos x+1)^2 \le 4 \Rightarrow 0 \le \sqrt{4-(2\cos x+1)^2} \le 2.$$

Причём $\sqrt{4-(2\cos x+1)^2} = 2$, если $cos\ x$ = -0,5, т. е. при $x =$ $= \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

С другой стороны $cos^2\ 6x + \dfrac{1}{cos^2 6x} \ge 2$.

Причем $cos^2\ 6x + \dfrac{1}{cos^2 6x} = 2$, если $cos^2\ 6x = 1$, т.е. при $x =$
$= \dfrac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Мы получили, что в исходном уравнении равенство возможно только в случае, когда обе части уравнения равны 2. Поэтому далее задача сводится к отбору общих решений двух серий значений x:

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z} \text{ и } x = \frac{\pi k}{6},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Из уравнения $\dfrac{\pi k}{6} = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ получаем, что $k = \pm 4 + 12n$, т.е. первая серия целиком содержится во второй.

Ответ. $\pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}$.