УДК 51(07.07)

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОК К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Кленовская И.С., старший преподаватель
Ревтович В.Н. к. п. н., зав. Кафедрой

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

При решении некоторых алгебраических уравнений бывает очень удобно использовать тригонометрические подстановки, которые иногда очень сложные уравнения и системы уравнений приводят к несложным тригонометрическим уравнениям. Идея данного метода состоит в замене неизвестной переменной x тригонометрической функцией, например, $x = \sin\alpha\left(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$ или $x = \cos\alpha\left(0 \le \alpha \le \pi\right)$, т.к. каждая из перечисленных функций на указанных промежутках монотонна и каждое из своих значений принимает только один раз. Часто так же используют подстановку $x = tg\alpha\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Пример. Решить уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$.

Решение. Область определения для данного уравнения: $|x| \le 1$, поэтому воспользуемся подстановкой $x = \sin\alpha\left(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда уравнение примет вид $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{cos\alpha} = \frac{35}{12}$.

Преобразуем данное уравнение к виду

$$12\left(\sin\alpha + cos\alpha\right) = 35\sin\alpha \cdot cos\alpha .$$

Сделаем еще одну замену, пусть $t=\sin\alpha+cos\alpha$, тогда $\sin\alpha\cdot cos\alpha=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Получим квадратное уравнение относительно *t*, т. е.

$$35t^2-24t-35=0.$$

Решением данного уравнения являются $t_1=\dfrac{7}{5}$ и $t_2=-\dfrac{5}{7}$.

Если $t_1=\dfrac{7}{5}$, следовательно, $\begin{cases}\sin\alpha+cos\alpha=\dfrac{7}{5}\\ \sin\alpha\cdot cos\alpha=\dfrac{12}{25}\end{cases}$.

Из уравнений системы составим квадратное уравнение относительно $\sin\alpha\left(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ вида

$$25sin^2\alpha-35sin\alpha+12=0$$

и получим

$$\sin\alpha=\frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

Если $t_2=-\dfrac{5}{7}$, следовательно, $\begin{cases}\sin\alpha+cos\alpha=-\dfrac{5}{7}\\ \sin\alpha\cdot cos\alpha=-\dfrac{12}{49}\end{cases}$.

Из уравнений системы составим квадратное уравнение относительно $\sin\alpha$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le 0\right)$ вида $49sin^2\alpha+35sin\alpha-12=0$ и получим $\sin\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{73}}{14}$ и $\sin\alpha=\dfrac{-5-\sqrt{73}}{14}$.

По условию подходит $\sin\alpha = \frac{-5-\sqrt{73}}{14}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ и $\frac{-5-\sqrt{73}}{14}$.

<u>Пример.</u> Решить уравнение: $\sqrt{1+x^2}+x = \frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Для решения данного уравнения удобно выполнить подстановку $x = tg\alpha\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Исходное уравнение примет вид $\frac{1+sin\alpha}{cos\alpha} = cos^3\alpha$..

Преобразуем полученное уравнение к виду

$$\frac{1+sin\alpha}{cos\alpha} - \left(1-sin^2\alpha\right)cos\alpha = 0.$$

Следовательно, $\left(1+sin\alpha\right)-\left(1-sin\alpha\right)\left(1+sin\alpha\right)cos^2\alpha = 0$.

Т.к. $1+sin\alpha \neq 0\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, получим $1-\left(1-sin\alpha\right)\left(1-sin^2\alpha\right)=0.$

Имеем $sin^3\alpha - sin^2\alpha - sin\alpha = 0.$ Отсюда,
$sin\alpha = 0$ или $sin^2\alpha - sin\alpha - 1 = 0$.
Из равенства $sin\alpha = 0$ следует решение x=0.

Решая уравнение $sin^2\alpha - sin\alpha - 1 = 0$, получим $\sin\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Из последнего равенства следует, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Отсюда найдем $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ и $tg\alpha = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$

Итак, уравнение имеет два корня: x=0 и $x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: *x=0 и* $x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

УДК 51.(07.07)

ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Коваленок Н.В., старший преподаватель
Кленовская И.С., старший преподаватель

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

В практике вступительных экзаменов и в заданиях ЦТ достаточно часто встречаются задачи на определение наибольших и наименьших значений функций. Как правило, подобные задачи допускают варианты решения с применением и без применения производной. В связи с тем, что сейчас тема «производная» включена в школьный курс как ознакомительная тема, более актуальными оказываются такие приемы, как замена переменной и применение стандартных неравенств, вытекающих из свойств элементарных функций, изучаемых в школьном курсе алгебры.

Рассмотрим метод вычисления наибольших и наименьших значений функций, основанный на применении подходящей замены переменной и сведения в последующем к задаче по исследованию на некотором промежутке квадратичной функции.

Пример 1. Найти наименьшее значение функции.

$$f(x) = (4-x)(1-x)(x+4)(x+7).$$