УДК 517

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Воронова Н. П., к. т. н., доцент
Писарик С. П., преподаватель, Италия

Белорусский национальный техничсекий университет
Минск, Республика Беларусь

Рассмотрим плоскопараллельную стенку из диатомового кирпича толщиной $a = 0{,}4$ м с начальной температурой $T(x, 0) = 625°$ C. Требуется найти распределение температур в любой момент времени, если на обеих поверхностях стенки (т.е. при $x = -0{,}2$ м и $x = 0{,}2$ м) во время процесса охлаждения поддерживается температура 0ºC (т.е. $T(-0{,}2; t) = \mathrm{T}(0{,}2; t) = 0$). Теплофизические характеристики диатомового кирпича [1]: $\rho = 560$ кг/м^3 ; $c = 0{,}25$ ккал/(кг·град); $\lambda = 0{,}1 + 0{,}00016T$.

Для исследования процессов теплопереноса в них необходимо рассматривать краевые задачи для геометрических тел различной конфигурации; знать теплофизические характеристики строительных материалов (c – коэффициент теплоемкости; λ - коэффициент теплопроводности; ρ - плотность вещества); начальное распределение температур $T(x, 0)$; учитывать вид теплообмена с поверхности с помощью граничных условий разного рода. Так, ряд задач теплопереноса можно описать математической моделью:

$$\begin{cases} C(T)\rho \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{1}{x^n} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \lambda(T) \dfrac{\partial T}{\partial x} \right), 0 < x < a; & (1) \\ \left.(A_1 T + A_2 \lambda \dfrac{\partial T}{\partial x})\right|_{x=0} = A_3; & (2) \\ \left.(B_1 T + B_1 \lambda \dfrac{\partial T}{\partial x})\right|_{x=a} = B_3; & (3) \\ T(x, 0) = f(x). & (4) \end{cases}$$

Задача (1)-(4) представляет собой краевую задачу для уравнения теплопроводности в обобщенной постановке, где искомая функция $T(x,t)$ характеризует значение температуры T в любой момент времени t и в любой точке x на интервале длиной a. При n=0 система (1)-(4) рассматривается в прямоугольной системе координат, при n=1 – в цилиндрической, при n=2 – в сферической. Задавая параметры A_1, B_1, A_2, B_2 в (2) и (3), можно варьировать граничные условия задачи.

При $A_2 = B_2 = 0$ создаются граничные условия I рода, при $A_1 = B_2 = 0$ – граничные условия II рода, а при $A_2 \neq B_2 \neq 0$ – граничные условия III рода.

Для решения задачи в такой постановке удобно применять метод конечных разностей [2]. Аппроксимируем уравнение (1) на четырехточечном шаблоне.

В результате получим неявную двухслойную разностную схему

$$\lambda u_{i+1,\gamma} - (1+2\lambda)u_{i,\gamma} + \lambda u_{i-1,\gamma} = -u_{i,\gamma-1}, \tag{5}$$

где $\lambda = \dfrac{\tau}{h^2}$; h, τ - шаги сетки по координате и времени; $u_{i,\gamma}$ - значения искомой функции в узлах сетки (x_i, τ_γ), причем $x_i = ih, i = 0,1...,n,\ h = \dfrac{a}{n}, \tau_\gamma = \gamma\tau, \gamma = 0,1,..m,\ \tau = \dfrac{T}{m}$. Данная разностная схема аппроксимирует уравнение (1) с погрешностью $O(\tau + h^2)$.

Схема (5) аппроксимирует уравнение теплопроводности только во внутренних узлах сетки, поэтому число уравнений в схеме (5) меньше числа неизвестных $u_{i,\gamma}$. Недостающие уравнения получают из граничных условий (2), (3):

$$\begin{cases} A_1 T(0,\tau_\gamma) + A_2 \lambda \dfrac{\partial T(0,\tau_\gamma)}{\partial x} = A_3; \\ B_1 T(a,\tau_\gamma) + B_2 \lambda \dfrac{\partial T(a_i,\tau_\gamma)}{\partial x} = B_3. \end{cases} \tag{6}$$

Схема (5)-(6) – неявная, поэтому значения $u_{i,\gamma}$ находят, как решение системы линейных уравнений. Для решения такой системы можно применять любой алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений, однако система (5) обладает трехдиагональной матрицей и рациональнее всего решать ее методом прогонки. Таким образом, решив систему разностных уравнений, найдем значения функции $T(x,t)$ на временном слое γ, если известно решение на временном слое γ - 1.

Предложенный алгоритм реализован и апробирован при исследовании теплопереноса во многих строительных конструкциях [3].

Список использованных источников

1. Франчук, А. У. Таблицы теплофизических показателей строительных материалов / А.У. Франчук. – М.: Отд. информ. и патентно-лиценз. работы, 1969.
2. Самарский, А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1990.
3. Воронова, Н.П. Об одном методе решения задач тепломассопереноса в строительных конструкциях / Н.П. Воронова, Р.М. Евдокименко // Прикладные проблемы механики жидкости и газа: материалы IX МНТК. – Севастополь, 2000.