УДК 378.146:51

ПОДГОТОВКА К ЦЕНТРАЛИЗОВАННОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ ПО МАТЕМАТИКЕ: УМНОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НА ФУНКЦИЮ

Бычков П.В., к. ф.-м. н

Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины
Гомель, Республика Беларусь

В настоящее время на факультативных занятиях по математике всё большее внимание уделяется изучению нестандартных методов решения уравнений и неравенств из различных разделов математики (алгебра, тригонометрия и геометрия). В известной степени это вызвано тем, что в последние годы имеет место устойчивая тенденция к усложнению заданий, предлагаемых на централизованном тестировании по математике.

Цель данной работы – показать применение нестандартных методов: умножение уравнения на функцию, угадывание корня уравнения, использование симметричности уравнения, исследование уравнения на промежутках действительной оси. Эти методы более рациональны, чем традиционные, и позволяют экономить время выполнения заданий, что очень важно, например, при централизованном тестировании. В работе показано применение данных методов для решения самых сложных заданий.

Иногда решение алгебраического уравнения существенно облегчается, если умножить обе его части на некоторую функцию — многочлен от неизвестной. При этом надо помнить, что возможно появление лишних корней — корней многочлена, на который умножали уравнение. Поэтому надо либо умножать на многочлен, не имеющий корней, и получать равносильное уравнение, либо умножать на многочлен, имеющий корни, и тогда каждый из таких корней надо обязательно подставить в исходное уравнение и установить, является ли это число его корнем.

Пример 1.1. Решите уравнение

$$x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

Решение. Умножив обе части уравнения на многочлен x^2+1, не имеющий корней, получим уравнение

$$\left(x^2+1\right)\left(x^8-x^6+x^4-x^2+1\right)=0 \qquad (2)$$

равносильное уравнению (1). Уравнение (2) можно записать в виде

$$x^{10}+1=0 \qquad (3)$$

Ясно, что уравнение (3) не имеет действительных корней, поэтому и уравнение (1) их не имеет.

Ответ: корней нет.

Пример 1.2 [1] Решите уравнение

$$6x^3-x^2-20x+12=0 \qquad (4)$$

Решение. Умножив обе части этого уравнения на многочлен $x+1/2$, получим уравнение

$$6x^4+2x^3-\frac{41}{2}x^2+2x+6=0\,, \qquad (5)$$

являющееся следствием уравнения (4), так как уравнение (5) имеет корень $x=-1/2$, не являющийся корнем уравнения (4).

Уравнение (5) есть симметрическое уравнение четвертой степени. Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения (5), то, разделив обе его части на $2x^2$ и перегруппировав его члены, получим уравнение

$$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{41}{4}=0 \qquad (6)$$

равносильное уравнению (5). Обозначив $y=x+\dfrac{1}{x}$, перепишем равнение (6) в виде

$$3y^2 + y - \frac{65}{4} = 0 \tag{7}$$

Уравнение (7) имеет два корня: $y_1 = -\frac{5}{2}$ и $y_2 = \frac{13}{6}$. Поэтому уравнение (6) равносильно совокупности уравнений $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$ и $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$.

Решив каждое из этих уравнений, найдем четыре корня уравнения (6), а тем самым и уравнения (5): $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -2$,

Так как корень $x_4 = -\frac{1}{2}$ является посторонним для уравнения (4), то отсюда получаем, что уравнение (4) имеет три корня: x_1, x_2, x_3.

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; -2\right\}$.

Список использованных источников

1. Супрун, В. П. Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач / В. П. Супрун. – М.: АВЕРСЭВ, 2003, 253 с.

2. Азаров, А. И. , Барвенов, С. А. Математика для старшеклассников. Методы решения алгебраических уравнений, неравенств и систем. М. : АВЕРСЭВ, 2004, 447 с.

3. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Респ. Ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: АВЕРСЭВ, 2012. – 37 с.; 2011. – 37 с. ; 2010. – 36 с