УДК 519.63

Устойчивость неявной разностной схемы для нелинейного уравнения переноса

Королёва О.М.
Белорусский национальный технический университет

При исследовании устойчивости неявных разностных схем возникает необходимость получения априорных оценок не только для разностного решения задачи, но и для всех производных, входящих в нелинейную часть разностных уравнений. В данной работе исследована устойчивость по начальным данным неявной разностной схемы, аппроксимирующей нелинейное уравнение переноса. В прямоугольнике $(x,t)\in\bar{Q}_T,\ \bar{Q}_T=\bar{\Omega}\times[0,T],\ \bar{\Omega}=\{x:0\le x\le l\}$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения переноса:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}=0,\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$\upsilon(x,0)=\upsilon_0(x)\ge 0,\quad 0\le x\le l,\quad \upsilon(0,t)=\mu\ge 0,\quad 0<t\le T.$$

Если $\upsilon_0(x)$ – монотонно возрастающая функция

$$0\le\upsilon_0'(x)\le c_0, \tag{2}$$

то решением начально-краевой задачи (1) является гладкая функция. Нарушение же условия (2) приводит к образованию ударных волн.

На равномерной разностной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ с шагами h,τ по пространственной и временной переменной аппроксимируем дифференциальную задачу (1) неявной разностной схемой

$$y_t+\hat{y}\hat{y}_{\bar{x}}=0, \tag{3}$$

$$y(x,0)=\upsilon_0(x),\quad x\in\bar{\omega}_h,\quad \hat{y}_0=\mu.$$

Для реализации разностной схемы (3) используем итерационный процесс

$$\overset{m+1}{y}_{t,i}+\overset{m}{y}_i\,\overset{m+1}{y}_{\bar{x},i}=0,\quad \overset{0}{y}_i=y_i^n,\quad i=\overline{1,N},\quad \overset{m+1}{y}_0=\mu,\quad m=0,1,\ldots \tag{4}$$

Доказана сходимость итерационного процесса к решению разностной задачи. Оценки разностного решения и его производных использовались для доказательства устойчивости разностной схемы (3) по начальным данным в равномерной метрике. В случае нарушения условия (2) при исследовании итерационного процесса (4) получены условия на величину временного шага гарантирующие ограниченность производных решения на каждой итерации.