

Особенности в постановке и решении функциональных уравнений

Чернявская С.В., Ревтович В.Н.

Белорусский национальный технический университет

Функциональное уравнение-это уравнение, выражающее связь между значением функции в одной точке с ее значениями в других точках. Решить функциональное уравнение - значит найти неизвестную функцию (или функции), тождественно удовлетворяющих исходному уравнению или доказать, что таких функций не существует. При постановке задачи необходимо оговаривать, на каком множестве задается функциональное уравнение и в каком классе функций ищется решение, поскольку количество и поведение решений зависят от этих двух условий.

Часто решение основано на придании переменной конкретного значения и получении на основе этого нового, более простого равенства.

Пример.

Найти все функции $f(x)$, определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых выполнено соотношение $f(x + f(xy)) = xf(1 + f(y))$ для всех $x, y \in \mathbf{R}$.

Решение.

Обозначим через b значение функции в точке ноль, $b = f(0)$.

Положим $y = 0$ в исходном уравнении, получим $f(x + b) = xf(1 + b)$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Теперь заменим в этом равенстве x на $x - b$, получим $f(x) = (x - b)f(1 + b)$. Обозначим $f(1 + b) = a$, тогда последнее равенство примет вид $f(x) = a(x - b)$. Подставив это выражение в исходное уравнение, получим $a(x + a(xy - b) - b) = xa(1 + a(y - b) - b)$. Учитывая, что данное равенство выполняется при любых значениях переменных, в том числе и при $x = 0$, получим $a^2b + ab = 0$. Отсюда следует, что $b = 0$, или $a = 0$, или $a + 1 = 0$. Поэтому будем иметь соответственно следующие функциональные выражения: $f(x) = ax$, или $f(x) = 0$, или $f(x) = b - x$.

Вообще, для функциональных уравнений существует очень мало общих методов решений, что объясняется большим разнообразием и трудностями, возникающими в процессе решения таких уравнений.

Не ставя перед собой цели описать максимально большое количество различных типов и методов решений таких уравнений, мы рассмотрели только те из них, которые достаточно легко могут быть освоены учащимися, поэтому данный материал будет полезен на факультативных занятиях по подготовке школьников к олимпиадам и экзаменам.