УДК 51 (07.07)

**Применение элементов исследования при решении нестандартных тригонометрических уравнений**

Кленовская И.С., Юрковец Л.В
Белорусский национальный технический университет

Очень часто при решении некоторых видов тригонометрических уравнений мы приходим к решению системы или совокупности систем, содержащих как уравнения, так и неравенства.

Говорят, что уравнение равносильно системе, если множество всех решений уравнения совпадает с множеством всех решений системы.

Пример. Решить уравнение: $sin^2 2x + sin^2 4x + sin^2 6x = 0.$

Решение данного уравнения равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 4x = 0, \\ \sin 6x = 0. \end{cases} \quad \text{Следовательно,} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} l, l \in Z. \end{cases} \qquad (1)$$

Если все решения данной системы отметить на единичной окружности, то можно заметить, что совпадение наступает в точках 0; $\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z$

Уравнение равносильно совокупности нескольких систем, если любое решение уравнения является решением хотя бы одной из этих систем, а любое решение каждой из систем является решением уравнения.

Пример. Решить уравнение: $(\sin x - 1)(tgx - 1) = 0$

*Решение.* Данное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} sin\, x - 1 = 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} tgx - 1 = 0, \\ x \in R. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение системы (1) имеет решения $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ , но ни одно из полученных $x_n$ не удовлетворяет второму условию этой системы.

Уравнение системы (2) имеет серию решений $x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z,$ каждое из которых удовлетворяет второму условию системы. Следовательно, только числа $x_k$ являются решениями совокупности систем (1) и (2), а значит, и равносильного ей уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$