УДК 539.3

Корректные и некорректные задачи операторного метода

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

В качестве основного объекта рассматривается операторное уравнение

$$Az = u,$$

где A – линейный оператор, действующий из гильбертова пространства Z в гильбертово пространство U. Требуется найти решение операторного уравнения z, соответствующее правой части уравнения u.

Такое уравнение является типичной математической моделью для многих физических, так называемых обратных задач, если предполагать, что искомые физические характеристики z не могут быть непосредственно измерены, а в результате эксперимента могут быть получены только данные u, связанные с z посредством оператора A.

Французским математиком Ж. Адамаром были сформулированы условия корректности постановки задач, где говорится, что существует обратный оператор A^{-1}, область значений которого совпадает с U. Причем оператор A^{-1} должен быть непрерывным, т.е. «малым» изменениям правой части u соответствуют «малые» изменения решения z. Более того Ж. Адамар считал, что только корректные задачи должны рассматриваться при решении практических задач.

Однако хорошо известны примеры некорректно поставленных по Ж.Адамару задач, к изучению и решению которых приходится прибегать при рассмотрении многочисленных прикладных задач. Нужно отметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство решений Z. Выбор пространства решений и нормы в нем обычно определяется требованиями прикладной задачи. Задачи могут быть некорректно поставленными при одном выборе нормы и корректно поставленными при другом. Хорошо известным примером некорректно поставленной задачи является интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Даже при очень малых ошибках в задании его правой части решение может либо отсутствовать, либо как угодно сильно отличаться от искомого точного решения.

Разрабатываемые автором операторные методы решения задач математической физики и теории упругости также привели как к корректным, так и некорректным задачам. Особенно остро данная проблема дает себя знать при разложении функций в неортогональные ряды новым операторным методом.